

单向最优搜索理论

DANXIANG ZUIYOU SOUSUO LILUN

陈建勇 著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

单向最优搜索理论

陈建勇 著

国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书将最优搜索理论中的单向搜索问题按照静止目标、运动目标,离散时间和空间、连续时间和空间,搜索力分配、搜索路径等方面进行了基本分类,系统地论述了相关问题的最优模型、数学性质及最优算法。

全书共分9章,第1章绪论;第2章介绍了最优搜索的基本概念和基本问题;第3章至第6章,讨论了静止目标的搜索力分配和搜索路径问题;第7章讨论了离散空间运动目标的搜索路径问题;第8章讨论了运动目标的搜索力分配问题;第9章在介绍了最优控制理论的基本概念的基础上,讨论了能够涵盖静止和运动目标,离散和连续时间与空间,搜索力分配和搜索路径各类问题的最优搜索的最优控制模型及算法。

本书可供从事运筹学理论和实践的技术人员学习和参考,也可以作为相关专业研究生教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

单向最优搜索理论/陈建勇著. —北京:国防工业出版社,2016.12

ISBN 978-7-118-11168-2

I. ①单… II. ①陈… III. ①应用数学—研究
IV. ①O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第002589号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京嘉恒彩色印刷有限责任公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×1000 1/16 印张 11½ 字数 212千字

2016年12月第1版第1次印刷 印数 1—2000册 定价 49.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

搜索理论产生于第二次世界大战期间。为应对德国潜艇对同盟国海上运输船队的威胁,美国海军部成立了由 B. O. Koopman、G. Kimball 和 P. M. Morse 等科学家组成的反潜战运筹研究小组。他们在研究对大西洋德军潜艇的搜索问题的过程中,提出了关于搜索理论的一些基本的概念,如先验目标位置分布、探测函数、搜索力约束、搜索优化准则等。Koopman 教授总结了这一时期的工作,于 1956—1957 年公开发表了 3 篇论文,即 *Theory of Search: Part I: Kinetic Bases*, *Part II: Target Detection*, *Part III: The Optimum Distribution of Searching Effort*, 奠定了搜索理论的基础。在随后的几十年里,搜索理论的研究和应用都有了较大的发展,并且与其他学科结合,产生了新的研究和应用领域。

搜索理论包含了许多关于搜索的问题,也涉及关于搜索问题的许多方面,但其核心问题是在搜索资源或搜索方式的约束下,按照某种准则设计最优的搜索方案的问题,所以搜索理论也称为最优搜索理论。

如果按照目标对于搜索行为的反应对最优搜索问题进行分类,可以分为单向搜索问题和双向搜索问题。双向搜索问题指的是搜索的目标对搜索行为会采取主动行为的搜索问题。例如,合作目标会采用更容易被搜索者找到的运动策略,甚至在目标也有搜索手段的情况下,双方都是搜索者,也都是目标。Benkoski 在“*A survey of the search theory literature*”一文中,将合作目标的搜索问题,排除在一般讨论的最优搜索问题之外。双向搜索主要指非合作目标对搜索者进行规避的搜索,也称为搜索对策或搜索博弈。单向搜索问题指的是目标的运动状态与搜索行为无关的搜索问题。显然,对静止目标的搜索问题一定是单向搜索问题。对于单向搜索问题,可以根据目标的位置和运动的概率信息,寻求整个搜索过程的最优方案。本书将最优搜索理论中的单向搜索问题按照静止目标、运动目标、离散时间和空间、连续时间和空间、搜索力分配、搜索路径等方面进行了基本分类,系统地论述了相关问题的最优模型、数学性质及最优算法,力图体现最优搜索理论的核心基础性问题全貌和逻辑关系。全书共分 9 章,各章的主要内容如下。

第 1 章绪论,介绍了最优搜索理论的一般概念、最优搜索问题的基本要素

以及最优搜索问题的分类形式。第2章介绍了目标信息、探测与探测函数、搜索变量等基本概念和由这些基本量构成的最优搜索理论的基本问题。第3~6章讨论静止目标的最优搜索问题。第3章讨论了包括连续空间和离散空间的静止目标搜索力分配问题。第4章讨论了离散空间最优搜索路径的一般问题和具有转换成本的最优搜索路径问题。第5章是第4章内容的延伸,讨论了在搜索路径和搜索力均为搜索变量时的离散空间静止目标搜索问题。第6章讨论了静止目标一维线性搜索问题和 N 维连续空间最优搜索路径问题。第7~9章讨论运动目标的最优搜索问题。第7章讨论了离散空间运动目标的最优搜索路径问题,包括 N 单元问题的一般线性规划解和二单元问题的特殊解。第8章讨论了运动目标的搜索力分配问题和搜索力分配受限的离散空间运动目标搜索力分配问题。其中后者的问题可以转化为多搜索者搜索的路径问题。第9章在介绍了连续空间随机运动目标的搜索状态方程及其解的问题以及最优控制的基本概念的基础上,讨论了最优搜索问题的最优控制模型及其性质。运动目标搜索问题的最优控制模型,涵盖了搜索路径问题和搜索力分配问题,同时也涵盖了静止目标的搜索问题。

感谢国防工业出版社张正梅编辑和海军航空工程学院研究生处对本书出版的帮助和支持。

感谢陈长康同学绘制了书中的插图。

向所有参考文献的作者表示敬意。

由于作者水平有限,书中难免存在错误、疏漏和不当之处,请专家和读者不吝批评指教。

陈建勇

二〇一六年九月

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 搜索问题与最优搜索理论	1
1.2 最优搜索问题的构成要素	3
1.2.1 一个小题目	3
1.2.2 最优搜索问题的构成要素	4
1.3 最优搜索问题的分类	6
1.4 本书的内容安排	6
参考文献	7
第 2 章 搜索理论的基本概念	8
2.1 目标信息	8
2.1.1 目标位置的概率分布	8
2.1.2 确定性运动目标	8
2.1.3 随机运动目标的确定性函数描述	9
2.1.4 运动目标的随机过程描述	9
2.1.5 离散马尔可夫过程	10
2.1.6 运动目标转换密度函数	10
2.1.7 随机运动目标的微分方程描述	10
2.2 探测与探测函数	11
2.2.1 概率型探测函数	11
2.2.2 探测率函数	12
2.2.3 应用探测率函数的一个小例子	12
2.3 搜索变量	13
2.3.1 搜索力分配函数	13
2.3.2 搜索力分配函数与探测函数	14
2.3.3 搜索路径	14
2.4 搜索资源	14
2.5 最优搜索的基本问题	15

2.5.1 最优搜索力分配问题的数学描述	15
2.5.2 最优搜索路径问题的数学描述	16
参考文献	16
第3章 静止目标搜索力分配	17
3.1 最优性条件	17
3.1.1 拉格朗日乘子法	17
3.1.2 最优搜索计划的充分条件	18
3.1.3 最优搜索计划的充分必要条件	20
3.1.4 正则探测函数	20
3.1.5 发现概率收益率函数	21
3.2 最优搜索计划	22
3.2.1 一个典型算例	22
3.2.2 正则函数最优搜索计划的定理	24
3.3 一致最优搜索计划	24
3.3.1 算例	24
3.3.2 一致最优搜索计划的定义	25
3.3.3 一致最优搜索计划的定理	25
3.3.4 一致最优搜索计划发现目标平均时间	26
3.3.5 搜索计划的后验概率分布	27
3.4 最大概率搜索计划	28
3.4.1 有关的定义和定理	28
3.4.2 最大概率搜索计划	29
3.5 最优增量搜索计划	30
3.6 离散搜索力最优搜索计划	32
3.6.1 离散搜索力模型	32
3.6.2 最优性条件	33
3.6.3 序列搜索计划	35
参考文献	36
第4章 离散空间静止目标搜索路径	37
4.1 离散空间最优搜索路径的基本问题	37
4.1.1 基本问题的最优性	37
4.1.2 最终周期性序列	40
4.2 最优搜索路径的一般性问题	43

4.2.1	问题描述	43
4.2.2	可行序列的存在性	45
4.2.3	最优序列的性质	45
4.2.4	合并搜索问题	46
4.2.5	最优序列的存在性及构建	48
4.2.6	ε -最优序列	49
4.3	具有转换成本的最优搜索路径	49
4.3.1	问题的描述	49
4.3.2	序列状态与最优序列的动态规划解	50
4.3.3	最终周期性序列	52
4.3.4	最小期望费用上界及非最优序列	52
4.3.5	最优序列性质	58
	参考文献	59
第5章	离散空间静止目标搜索路径上的搜索力	60
5.1	二单元问题的最优路径和费用	60
5.1.1	基本问题	60
5.1.2	最优性及算法	60
5.1.3	简短讨论	63
5.2	N 单元问题的最优路径和费用	64
5.2.1	基本问题	64
5.2.2	最优性条件	66
5.2.3	最优搜索路径和探测时间的逼近算法	70
5.2.4	特殊概率函数的最优性	70
5.2.5	零转移费用问题	73
	参考文献	74
第6章	连续空间静止目标搜索路径	75
6.1	一维空间线性搜索问题	75
6.1.1	基本问题及其概率模型	75
6.1.2	最优序列的性质	76
6.1.3	最优序列的计算	81
6.2	N 维空间搜索路径	84
6.2.1	连续搜索路径概率模型	85
6.2.2	最优路径的必要条件	85

6.2.3	R 强凸集上的概率搜索	92
6.2.4	最优路径的存在性定理	97
	参考文献	102
第7章	离散空间运动目标搜索路径	103
7.1	离散空间马尔可夫运动目标	103
7.2	最优搜索问题及动态方程	104
7.2.1	序列状态	104
7.2.2	最大概率搜索序列及动态规划解	104
7.2.3	最小期望费用搜索序列及动态规划解	106
7.3	二单元问题的动态方程及特殊解	107
7.3.1	二单元问题的序列状态	107
7.3.2	期望探测次数方程	108
7.3.3	最大发现概率方程	109
7.3.4	完全探测的期望探测次数解	109
7.3.5	完全探测的最大发现概率解	112
7.3.6	无学习问题的最优解	115
7.4	二单元最优搜索问题的数值解	116
7.4.1	最小期望探测次数的逼近解	116
7.4.2	最小期望探测次数的概率阈值解	118
7.4.3	最大发现概率搜索序列的阈值概率	119
7.5	N 单元最优搜索问题的特殊解	120
7.5.1	N 单元无学习问题及其解	120
7.5.2	N 单元完全探测问题及其解	121
	参考文献	122
第8章	运动目标搜索力分配	123
8.1	确定性运动目标搜索力分配	123
8.1.1	问题的描述	123
8.1.2	T -最优的等价形式	124
8.1.3	T -最优的充分必要条件	125
8.1.4	目标运动可因式分解时的一致最优搜索计划	125
8.2	基于随机参数的运动目标搜索力分配	128
8.2.1	问题的描述	128
8.2.2	最优的充分必要条件	129

8.2.3	离散空间问题	129
8.3	基于随机过程的运动目标搜索力分配	130
8.3.1	搜索模型	130
8.3.2	Gateaux 微分	131
8.3.3	T -最优的必要条件	132
8.3.4	发现概率上界和 T -最优的充分条件	135
8.4	离散时间最优搜索问题	136
8.4.1	离散时间连续空间问题	137
8.4.2	离散时间离散空间问题	137
8.5	最优搜索策略的计算方法	138
8.5.1	通用逼近算法	138
8.5.2	马尔可夫目标指数型探测函数最优算法	139
8.6	分配空间受限的搜索力分配问题	143
8.6.1	搜索力分配空间受限的搜索模型	143
8.6.2	连续搜索力的最优解及其算法	144
8.6.3	离散搜索力的最优解及其算法	146
	参考文献	149
第9章	搜索问题的最优控制理论模型	150
9.1	最优控制理论简介	150
9.1.1	连续时间系统的最优控制问题	150
9.1.2	极小值原理	150
9.1.3	动态规划原理与 HJB 方程	151
9.2	搜索状态方程	152
9.2.1	联合概率密度与生存概率	152
9.2.2	搜索状态方程	153
9.2.3	状态方程的边界条件	155
9.2.4	静止目标搜索状态方程的解	156
9.2.5	一阶搜索状态方程的特征迹线解	156
9.2.6	搜索状态方程的摄动问题及其解	158
9.3	最优搜索路径问题	163
9.3.1	搜索模型	163
9.3.2	搜索路径约束	163
9.3.3	最优搜索路径的动态规划原理	164

9.3.4 最优搜索路径逼近算法	166
9.4 不连续探测的探测点序列问题	166
9.4.1 问题的描述	166
9.4.2 最优探测点序列的动态规划解	167
9.4.3 非探测起点的最优探测点序列	168
9.5 搜索力分配的最优控制模型	169
9.5.1 搜索力分配模型	169
9.5.2 搜索力分配的最优控制模型	170
参考文献	170
后记	172

第1章 绪 论

1.1 搜索问题与最优搜索理论

在过去的日常语言中,不太常用“搜索”这个词,与之意义相同而更多用的词是“寻找”。进入互联网时代,“搜索”这个词用得多了起来,有人因为“搜索”这件事成了超级富豪,有人通过“搜索”招来了更多的生意。本书讨论的是“搜索”这件事,但与能不能发财基本上没有关系。

当“搜索”作为一个动词使用时,一般有一个作为对象的名词跟随,如“敌人”、“潜艇”、“目标”,还有在互联网上搜索“资料”。如果使用“寻找”或“找”来代替“搜索”,这种事就太多了,我们每个人都经历过,如寻找丢失的钥匙、从一大堆音乐 CD 中寻找一首老歌、在茫茫人海中寻找一个结婚的对象、在热闹的街市上找一个小吃摊等。寻找目标的过程,也就是“搜索”。

不但人有许许多多的搜索目标的行为,动物也有,如与主人走散或被主人抛弃的狗,会寻找它的主人,如果找不到主人,它要去寻找食物;蜜蜂中的侦察兵先行飞出去寻找花源;孤独的老虎在丛林中搜寻猎物等。

最优搜索理论当然不是关于人和动物的搜索行为的理论,最优搜索理论关心的不是人和动物的搜索行为“是”什么样的,有什么规律,而是关心“怎样”搜索是“最好的”。动物的搜索行为可能给出“怎样”搜索的某种启发,但最优搜索理论还是要排除动物的搜索行为,只针对人和人所能控制的搜索工具的主动的搜索行为。然而,人的主动的搜索行为,仍然极为丰富、极为复杂,最优搜索理论不能全部承担,如在众多的异性中寻找一个结婚对象这样的搜索行为,还是不在最优搜索理论的研究范围中。

下面给出对“最优搜索理论”的一种定义。

最优搜索理论是用数学的方法研究如何以“最佳”的方式寻找某种位置不确定的、被称为“目标”的预定对象的理论,是应用数学学科的一个分支。

人类在搜索目标时,会有意或无意地采取某种方式,不同的搜索方式,可能会有不同的搜索效果。那么有没有一种搜索方式,使得搜索效果最好呢?用数学的方法,寻求一种最好的搜索方式,是最优搜索理论的内容,也是最优搜索理

论研究的目的。

上述最优搜索理论的定义,包含了最优搜索理论的最基本的特征。

(1) 使用数学的方法进行研究。这意味着对于具体的搜索者、搜索行为和目标,必须能够进行数学的描述。

(2) “目标”是确定的。最优搜索理论中的“目标”,是对明确的搜索对象的一种抽象,具体可指海底的沉船、海洋中的敌潜艇、一座写字楼里的某个人、在游乐场里走失的某个小孩等;当然,对象的数量可以是一个,也可以是多个。而不明确的搜索对象,一般不能成为最优搜索理论中的“目标”,如游乐场里的任意一个小孩。寻找一个结婚的对象这种行为被排除在最优搜索理论的研究之外,其原因之一就是“结婚的对象”不是一个明确的“目标”。

(3) “目标”位置是不确定的。搜索的目的就是要确定目标的位置,所以,在最优搜索理论中的目标,位置一定是不确定的。实际上也存在一些对位置确定的“目标”的搜索。例如,观众在电影院里寻找自己的座位,或者在电影院里找坐在某个座位上的一个人,这种搜索所依据的目标信息是明确的,搜索过程是依据准确信息的逻辑判断过程,一般不属于最优搜索理论的研究范畴。

(4) 概率意义下的“最佳”搜索方式。寻求“最佳”的搜索方式,也就是“最优搜索方案”,首先需要给出最优准则,即确定“最优”是对于某个指标值的最大或最小。例如,某个搜索方式,能够使得发现目标的时间最少,或消耗资源最少,那么这个搜索方式,就称为发现目标的时间或消耗资源准则下的最优。按照这样的搜索方式进行实际的搜索,真的会使发现目标的时间或资源消耗最少吗?不是的。用确定的搜索方案进行搜索,是否能够发现目标、何时发现目标都是随机的,不存在确定的发现目标的时间或资源消耗量。最优搜索理论中的最优准则,只能是概率性的指标,如“平均发现目标时间”、“发现概率”等。依据目标的概率性信息和概率性的最优准则所得的最优搜索方案,也只能是概率意义下的最优,不能保证一次搜索试验的搜索效果最优。

符合前述最优搜索理论定义的搜索问题,仍然是非常广泛的。由于理论的体系化、研究方法的差异以及最优搜索理论的发展现状等多方面因素,人们往往会给最优搜索理论的研究对象,在最优搜索理论的定义内进行一些不是非常严格的限定,从而将一些属于或可能会属于最优搜索理论的问题,排除在最优搜索理论之外。以下是对最优搜索理论中的搜索问题的一种进一步限定,不妨称为经典的最优搜索问题。

(1) 抽象化、典型化的目标模型和探测模型下的搜索模型及求解问题。在实际的最优搜索问题研究中,建立符合或接近实际情况的目标模型和探测模型,是一项基础性的工作,但这项工作分散的且没有系统化的方法,所以一般

最优搜索理论主要在抽象化的、典型化的目标模型和探测模型下讨论搜索模型的建立及其求解。

(2) 非合作目标的搜索问题。非合作目标,指的是对搜索行为没有主动反应的目标和对搜索采取规避策略的目标。与之相对应的是合作目标。合作目标会采取最容易被搜索者发现的策略;如果目标也有搜索手段,则搜索者对合作目标的搜索问题成为一种相互搜索的问题。一般最优搜索理论仅考虑对非合作目标的搜索问题。

(3) 战术性搜索问题。如果搜索方式是指可数量化的搜索力量在空间和时间上的分配方案,这样的问题称为战术性搜索问题。而更高层次的复杂的搜索策略和搜索观念的最优问题,不属于最优搜索理论的研究范畴。例如,某人在一个大商场里寻找丢失了的宠物狗,他是自己一人寻找,还是到商场广播室广播寻找,还是在商场里贴悬赏寻狗启事,还是打“110”等搜索方式中的选择,都属于“战略性”搜索问题。假如他决定在商场走着寻找,该以什么样的速度走什么样的路线;如果他要蹲守,该蹲在商场的哪个地方或守在商场的哪个出口;如果他召了很多人来帮忙,该在商场的每层、每个区分配几个人,这些问题都属于战术性搜索问题。

(4) 不依赖探测数据的搜索问题或低数据率修正的搜索问题。不依赖探测数据的搜索,指的是依照在搜索开始之前就确定的搜索方案进行搜索,除非发现目标或结束搜索,搜索过程中的探测数据不对搜索过程产生影响。低数据率修正的搜索,指的是探测数据不是实时地用于修正搜索方案,而是阶段性地用于修正搜索方案。最优搜索理论将搜索问题限定在无探测数据和低数据率的搜索问题上,是为了能够获得搜索全程或一个阶段的最优搜索方案。这实际上排除了用卡尔曼滤波的方法对目标进行位置估计这一类的目标搜索问题。

1.2 最优搜索问题的构成要素

1.2.1 一个小题目

3个密闭的盒子里,分别有5、3、2共10个球,其中9个黑球,1个红球。一次可以从任意盒子中摸出一只球进行查看,如果不是红球,则将其放回原来的盒子,继续从任意盒子中摸查,直到摸出红球为止。

问题1:假如只有4次摸球查看的机会,请问,应该如何在这3个盒子中分配这4次摸查机会,能够使摸到红球的概率最大?

根据题意,红球在 3 个盒子中的概率分别为 $p_1 = 0.5$ 、 $p_2 = 0.3$ 、 $p_3 = 0.2$ 。
 设在 3 个盒子中的摸查次数分别为 n_1 、 n_2 、 n_3 。根据条件, $n_1 + n_2 + n_3 = 4$ 。
 假如红球在第一个盒子中,在该盒子摸查 n_1 次,摸出红球的概率为

$$b_1(n_1) = 1 - (1 - 0.2)^{n_1} = 1 - 0.8^{n_1}$$

类似地,有

$$b_2(n_2) = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{n_2} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2}$$

$$b_3(n_3) = 1 - (1 - 0.5)^{n_3} = 1 - 0.5^{n_3}$$

在 3 个盒子中分别摸查 n_1 、 n_2 、 n_3 次,摸出红球的概率为

$$\begin{aligned} P(n_1, n_2, n_3) &= p_1 b_1(n_1) + p_2 b_2(n_2) + p_3 b_3(n_3) \\ &= 1 - \left[0.5 \times 0.8^{n_1} + 0.3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n_2} + 0.2 \times 0.5^{n_3}\right] \end{aligned}$$

在 $n_1 + n_2 + n_3 = 4$ 的约束下, n_1 、 n_2 、 n_3 分别为多少才能够使 $P(n_1, n_2, n_3)$ 最大? 这是一个整数变量的等式约束的非线性最优化问题。计算可得,当 $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 1$, 发现红球的概率最大,为 0.38。

问题 2: 如何安排在 3 个盒子中的摸查次序,能够使摸到红球时的摸查次数的期望值最小?

摸到红球时的摸查次数的期望值为

$$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} [1 - P(n, \xi)]$$

其中 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots\}$ 是一个由 3 个盒子组成的时间序列,表示摸查的次序, $\xi_n \in \{\text{盒子 1, 盒子 2, 盒子 3}\} (n=1, 2, 3, \dots)$ 。 $P(n, \xi)$ 表示按照序列 ξ 摸查 n 次摸到红球的概率。显然,期望次数 $E(\xi)$ 是序列 ξ 的函数。当 ξ 中每个盒子的摸查次数都是无穷大时,有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, \xi) = 1$, $E(\xi)$ 收敛到一个有限值,其中存在一个序列,使得 $E(\xi)$ 极小。下面给出使期望次数最小的无穷序列的前几次的摸查顺序为:前 3 次任意顺序摸查 3 个盒子,从第 4 次起,摸查顺序为盒子 1、盒子 2、盒子 2、盒子 1、盒子 3、盒子 1、盒子 2、盒子 1、 $\dots$ 。

注意到,前 4 次在 3 个盒子的摸查次数,与问题 1 的结果相同。

1.2.2 最优搜索问题的构成要素

将前面的小题目,改造成一个对静止目标的最优搜索问题。

首先,将 3 个盒子称为目标空间,同时也是搜索空间。

将红球称为目标。

将一次一次摸查盒子中的球的全过程,称为“搜索”。将在一个盒子中摸查

一次球,称为一次“探测”,或一次“观察”。

p_1, p_2, p_3 称为“目标先验分布”,是一组给定的概率值。

条件概率 $b_1(n_1), b_2(n_2), b_3(n_3)$ 称为“探测函数”。这组函数的自变量是探测次数,称为“搜索力”。

给定的总摸查次数 $n_1 + n_2 + n_3 = 4$, 称为“资源约束”。一般的资源量,不一定与搜索力是同一个量。

$P(n_1, n_2, n_3) = 1 - (0.5 \times 0.5^{n_1} + 0.3 \times 0.7^{n_2} + 0.2 \times 0.8^{n_3})$, 称为指标函数。使指标函数极大的解 n_1, n_2, n_3 , 称为最优解,也可称为“最优搜索力分配”。

$E(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} [1 - P(n, \xi)]$ 也是一种指标函数,使其极小的自变量序列 ξ , 称为最优解,或“最优搜索路径”。

归纳一般的最优搜索问题的构成要素如下。

(1) 目标信息。搜索的目的,就是通过搜索获得目标的确切信息。所以,在搜索开始及搜索过程中,一定没有目标的确切信息。然而在没有目标的任何信息情况下,不可能构成最优搜索问题。所以,在最优搜索理论中,必须具有目标的概率信息。

(2) 搜索者和探测器特征。搜索者和探测器,有时可以是同一主体。采用什么样的搜索方式,探测器具有什么样的探测能力,是探测效果的最主要因素,也是构成搜索模型的关键因素。

(3) 搜索模型。根据目标信息和探测模型构成的一种数学关系,包括指标函数、自变量函数、资源约束等。在最优搜索理论中,最常用的指标是发现概率,或不发现概率,其他还有发现目标期望时间、发现目标期望资源消耗等。自变量或自变量函数指的是指标函数的自变量或自变量函数,最常用的有搜索力、搜索力密度或其空间函数、路径函数等。搜索资源,在实际搜索问题中,一定有约束。在最优搜索理论中,资源约束是最优搜索模型构成的必要条件之一。1.2.1 小节的问题1中,如果不是限定 $n_1 + n_2 + n_3$ 为某个正数,而是允许其为无穷大,则在3个盒子中的探测次数均为无穷大时,发现概率为1。最优搜索力分配的问题,被消解掉了。问题2中,总资源没有限制,可以为无穷大,但是对资源分配的形式是有限制的,即一次摸查,只能在一个盒子中进行。

(4) 求最优解。最优搜索问题的终极目标,是求出使指标函数最优的自变量函数。有的问题有解析解,有的问题只能给出数值解,甚至有的复杂问题,数值解也是很难获得的。

一般地说,最优搜索问题就是由这样一些要素构成最优搜索模型,然后用某种有效的方法求出最优解。

1.3 最优搜索问题的分类

最优搜索问题的构成要素可以表示为不同的形式,在构成搜索模型并求解时,会产生相应的差别。按照不同的要素,最优搜索问题可以进行不同形式的分类。

- (1) 按照目标是否运动,可分为静止目标搜索问题和运动目标搜索问题。
- (2) 按照目标空间,可分为连续空间搜索问题和离散空间搜索问题。
- (3) 按照探测时间,可分为连续时间搜索问题和离散时间搜索问题。
- (4) 按照指标函数的自变量函数,可分为搜索力分配问题和搜索路径问题。
- (5) 按照搜索力分配形式,可分为连续搜索力分配问题和离散搜索力分配问题。
- (6) 按照目标是否对搜索有主动反应,可分为单向搜索问题和双向搜索问题。

另外,根据具体搜索问题的变化,还可以进行其他形式的分类,如单目标搜索问题和多目标搜索问题、单搜索者搜索问题和多搜索者搜索问题等。

1.4 本书的内容安排

本书将最优搜索理论中最基本的单向搜索问题,进行了3个层次的区分。

第一个层次,区分了静止目标搜索问题和运动目标搜索问题。其中第3~6章是关于静止目标搜索,第7~9章是关于运动目标搜索。在一般意义上,静止目标搜索问题可以认为是运动目标搜索问题的一种特殊情况。将静止目标的问题安排在本书前部单独讨论,出于以下几点考虑:第一,体现最优搜索理论的研究历史。最优搜索理论最初的研究成果,主要是关于静止目标搜索;第二,静止目标搜索问题,可以作为读者学习运动目标搜索问题的基础和铺垫;第三,一些关于静止目标搜索问题的性质和规律,在运动目标搜索问题中,尚没有性质和规律与之严格对应;第四,运动目标最优搜索方案求解的复杂性,使得静止目标搜索问题有最直接的独立存在的价值。

第二个层次,区分了连续空间和离散空间。连续空间搜索问题和离散空间搜索问题,在建模形式和数学性质方面往往有很大差别。

第三个层次,区分了搜索力分配问题和搜索路径问题。在本质意义上,搜索路径问题是搜索力的分配空间受到某种严格限制的搜索力分配问题。由于建模方式和求解方法的差别,本书明确区分了搜索力分配问题和搜索路径问