国家级示范性高等院校精品规划教材

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

主 编 徐龙华
副主编 杨高翔 黄兆霞

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

国家级示范性高等院校精品规划教材

概率论与数理统计

主　编　徐龙华
副主编　杨高翔　黄兆霞

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书的主要内容有随机事件、随机变量、随机向量、数字特征、极限定理、样本与统计量、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、Excel在统计分析中的应用等知识. 每章后配有适量习题，并在书后附有参考答案. 书末有三个附录，其中附录一介绍了概率论与数理统计的起源与发展；附录二分析了概率论与数理统计考研题型并对考研知识点进行总结，汇集了往年硕士研究生概率论与数理统计入学统一考试真题及参考答案. 附录三给出了几个重要的分布表.

本书着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本原理、基本方法，强调直观性，注重可读性，突出基本思想和应用背景，注重对教材的内容作适当的扩展和延伸，注重数学与应用的有机结合. 表述上从具体实例入手，由浅入深，由易及难，由具体到抽象，通过案例分析，使得难点分散，便于教学.

本书结构严谨，通俗易懂，例题丰富，可读性强. 书中结合实际给出了大量例题和习题，特别是用Excel进行概率统计分析提供了简单实用的计算工具. 本教材可作为高等学校工科、农医、经济、管理、统计、应用数学等专业的概率论与数理统计课程的教材，并可作为上述各专业领域读者的教学参考书，也可作为考研复习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/徐龙华主编. —天津：天津大学出版社，2016. 8
国家级示范性高等院校精品规划教材
ISBN 978-7-5618-5626-0

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第182807号

出版发行 天津大学出版社
地 址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742
网 址 www. publish. tju. edu. cn
印 刷 天津市蓟县宏图印务有限公司
经 销 全国各地新华书店
开 本 185mm×260mm
印 张 21
字 数 526千
版 次 2016年8月第1版
印 次 2016年8月第1次
定 价 42.00元

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的一门学科，在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有极为广泛的应用. 概率论与数理统计是我国普通高等院校工科、农医、经济、管理、统计、应用数学等专业的一门重要基础理论课程，本书可作为面向上述各专业的概率论与数理统计课程教材，又可作为考研复习指导书.

本书分两部分. 概率论部分(第 1 章至第 5 章)作为基础知识，为读者提供了必要的理论基础，主要介绍了随机事件、随机变量、随机向量、数字特征、极限定理. 数理统计部分(第 6 章至第 9 章)主要讲述了参数估计和假设检验，并介绍了回归分析和方差分析. 每章后配有适量习题，并在书后附有习题提示和解答. 根据不同专业的需要，适量选取部分内容，根据学时多少带 * 的章节可以选学或自学. 为了增强统计分析能力，增加了 Excel 在统计分析中的应用这一部分内容. 本书在内容处理上注意到不同专业和地方高校生源的特点，尽量使数学概念、理论与方法易于被学生接受. 在例题与习题的配置上注意到了学习难度的循序渐进，选择了一些经典例子或历年研究生入学考试试题.

本书着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本原理、基本方法，强调直观性，注重可读性，突出基本思想和应用背景，注重对教材的内容作适当的扩展和延伸，注重数学与应用的有机结合. 表述上从具体实例入手，由浅入深，由易及难，由具体到抽象，通过案例分析，使得难点分散，便于教学. 为了使本书具有广泛的适用性以及良好的可读性和趣味性，本书在取材与写作上，做了以下三个方面的努力：

(1)在保证叙述严谨的条件下，尽量使用较少的数学知识，避免过于数学化论证，由浅入深，逐步启发读者思考；

(2)突出应用型和实用性，进一步提高读者的学习兴趣；

(3)在选材与叙述上尽量做到举例的多样性，注重应用，所选择的例题和习题既具有启发性，又具有广泛的应用性.

本书由徐龙华担任主编，杨高翔、黄兆霞担任副主编，第 1、3、5 章由黄兆霞编写，第 2、4、6 章由杨高翔编写，第 7 ~ 10 章由徐龙华编写. 全书由徐龙华、杨高翔统稿.

本书的编写工作还得到了安康学院教材建设基金资助，编者借此机会表示感谢.

限于编者的水平有限，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正.

编者

2016 年 4 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

自然界和社会上发生的现象是多种多样的. 人们所观察到的现象大体上可以分为两种类型. 一类是事前可以预知结果的,即在某些确定的条件下,某一确定的现象必然会发生,或根据它过去的状态,完全可以预知它将来的发展状态. 这类现象称为确定性现象或必然现象. 例如,向上抛一石子必然下落;在一个标准大气压下,水在 100 ℃时一定沸腾;同性电荷必定相互排斥;等等. 在自然界和社会上还存在着另一类现象,它是事前不能预知结果的,即在相同的条件下重复进行试验时,每次所观察到的结果未必相同,或即使知道它过去的状态,也不能肯定它将来的发展状态. 称这一类型的现象为随机现象或偶然性现象. 例如,抛一枚质地均匀的硬币,硬币落地后的结果可能是带币值的一面朝上,也可能是另一面朝上,并且在每次抛硬币之前,不能预知其抛币后的结果肯定是什么;某射击运动员用一支步枪在同一地点进行射击训练,每次射击的成绩(环数)可能不同,并且在每次射击之前,均无法预知其射击后的成绩;等等.

虽然随机现象在一定的条件下,可能出现这样或那样的结果,且在每次试验或观察之前不能预知这一次试验的确切结果,但人们经过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出一定的规律性. 例如,多次抛掷均匀硬币时,出现带币值的一面朝上的次数约占抛掷总次数的一半. 这种在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,就是以后我们所说的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机试验与样本空间

为了叙述方便,我们常把对某种现象的一次观察、测量或进行一次科学试验,统称为一个试验. 下面是一些试验的例子:

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

E_2:将一枚硬币连抛两次,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

E_3:将一枚硬币连抛两次,观察正面 H 的次数;

E_4:在某一批产品中任选一件,检验其是否合格;

E_5:观察某城市某个月内交通事故发生的次数;

E_6:在一大批电视机中任意抽取一台,测试其寿命;

E_7:观察某地明天的天气是雨天还是非雨天.

显然,以上的试验都具有如下的特点:

(1)试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果.

(2)进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

一般地，我们把具有上述两个特点的试验称为随机试验，或简称试验. 用英文大写字母 E 表示.

再仔细分析一下，我们发现试验 $E_1,\cdots,E_6$ 还具有如下的特点：

(3) 可以在相同条件下重复进行.

但是试验 E_7 却不具有特点(3)，这是因为除非时间倒转，否则我们都不可能对它进行重复试验. 以后我们把不满足条件(3)的随机试验称为不可重复的随机试验，而把同时满足(1)、(2)、(3)的随机试验称为可重复的随机试验. 可重复的随机试验已经得到广泛深入的研究，有成熟的理论和方法. 但是，在现代经济管理和决策分析中，不可重复的随机试验的研究也引起了人们的关注. 不过，本书中除了个别地方外，所讨论的大都是可重复的随机试验. 因此，在不引起混淆的情况下，以后把可重复的随机试验也简称为随机试验或试验.

对于任一个随机试验 E，由于它必须满足条件(1)，因此，试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，记为 Ω，Ω 中的元素，即 E 的每个结果，称为样本点. 样本点一般用 ω 来表示，于是可记 $\Omega=\{\omega\}$.

前面所提到的试验 $E_1,\cdots,E_7$ 所对应的样本空间 $\Omega_1,\cdots,\Omega_7$ 为

$\Omega_1=\{H,T\}$；

$\Omega_2=\{HH,HT,TH,TT\}$；

$\Omega_3=\{0,1,2\}$；

$\Omega_4=\{$合格，不合格$\}$；

$\Omega_5=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$；

$\Omega_6=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_7=\{$雨天，非雨天$\}$.

应该注意的是，试验 E_2 和 E_3 的过程都是将一枚硬币连抛两次，但由于试验的目的不一样，所以样本空间 Ω_2 和 Ω_3 截然不同，这说明试验的目的决定试验所对应的样本空间.

1.1.2 随机事件

进行随机试验时，人们关心的往往是满足某种条件的样本点所组成的集合. 若规定电视机的寿命超过 15 000 h 为合格品，则在试验 E_6 中我们关心的是电视的寿命是否大于 15 000 h，满足这样的样本点组成 Ω_6 的一个子集 $A=\{t\mid t>15\ 000\}$. 我们称 A 为试验 E_6 的一个随机事件.

一般地，称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件，简称事件. 事件是概率论中的最基本的概念，通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 设 A 是一个事件，当且仅当试验中出现的样本点 $\omega\in A$ 时，称事件 A 在该次试验中发生. 显然，要判定一个事件是否在一次试验中发生，只有当该次试验有了结果以后才能知道.

由一个样本点组成的单点集称为基本事件. 例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$，试验 E_3 有三个基本事件 $\{0\},\{1\},\{2\}$.

例 1.1.1 投掷一颗骰子，观察出现的点数. 其可能出现的点数为 1,2,3,4,5,6，若令 $A_i=\{i\}$，$i=1,2,3,4,5,6$，则 A_i 为随机试验的基本事件，样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 1.1.2 观察单位时间内到达某公交车站候车的人数，则基本事件为 $A_i=\{i\}$，$i=0,1,2,\cdots$，样本空间 $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$.

样本空间Ω有两个特殊子集，一个是Ω本身，由于它包含了试验的所有可能结果，所以在每次试验中它总是发生，称为必然事件；另一个子集是空集$\varnothing$，它不包含任何样本点，因此在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

1.1.3 事件间的关系和运算

在一个样本空间中，可以有许多随机事件，我们希望通过对简单事件的了解去掌握较复杂的事件. 为此，需要研究事件的关系和运算.

事件是一个集合，因此事件间的关系和运算应该按照集合之间的关系和运算来规定.

设试验E的样本空间为Ω, A, B, C及$A_1, A_2, \cdots$都是事件，即Ω的子集. 注意到在某次试验中事件A发生$\Leftrightarrow$该次试验的结果$\omega \in A$（这里符号"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当"），由此出发可以讨论事件间的关系和运算.

(1) 若事件A发生必有事件B发生，则称事件A包含于事件B，或事件B包含事件A，记为$A \subset B$，或$B \supset A$. 图 1.1 给出了这种包含关系的一个几何表示.

例如，在E_6中，记

$A = \{$电视机寿命不超过 10 000 h$\}$，

$B = \{$电视机寿命不超过 12 000 h$\}$，

则$A \subset B$. 若$A \subset B$且$B \subset A$，即$A = B$，则称事件A与事件B相等.

(2) 事件$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A$ 或 $\omega \in B\}$称为事件A与事件B的和事件. 显然事件$A \cup B$发生$\Leftrightarrow$事件A发生或事件B发生$\Leftrightarrow$事件A与B至少有一个发生. 有时$A \cup B$也记为$A + B$. 图 1.2 给出了这种运算的一个几何表示.

例如，在E_2中，记

$A = \{$两次都出现正面$\} = \{HH\}$，

$B = \{$两次都出现反面$\} = \{TT\}$，

则$A \cup B = \{$两次出现同一面$\} = \{HH, TT\}$.

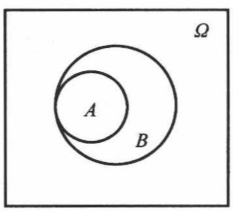

图 1.1

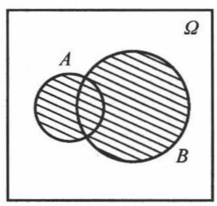

图 1.2

类似地，称$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件；称$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的和事件.

(3) 事件$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \in B\}$称为事件A与事件B的积事件，事件$A \cap B$发生$\Leftrightarrow$事件A与事件B同时发生. 积事件$A \cap B$可简记为AB. 图 1.3 给出了这种运算的一个几何表示.

一般地，称$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$为n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件；称$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$为可列个事件$A_1, A_2, \cdots,$

$A_n, \cdots$的积事件.

(4)事件$A - B = \{\omega | \omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$称为事件A与事件B的差事件,它表示事件A发生而事件B不发生,因此事件$A - B$发生$\Leftrightarrow$事件A发生而事件B不发生. 图1.4给出了这种运算的一个几何表示.

例如,在E_2中,若记$A = \{HH, TT\}$,$B = \{HH, HT\}$,则$A - B = \{TT\}$.

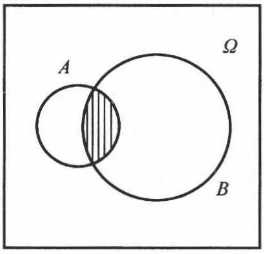

图1.3

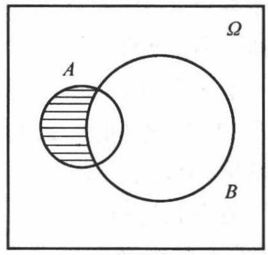

图1.4

(5)若$A \cap B = \varnothing$,则称事件A与B互不相容或互斥. 显然$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$事件$A$与事件$B$不能同时发生. 图1.5给出了这种运算的一个几何表示.

例如,对任一个随机试验E,它的基本事件都是两两互不相容的.

(6)事件$\Omega - A$称为事件A的对立事件或逆事件,记作$\overline{A}$,即$\overline{A} = \Omega - A$. 事件$\overline{A}$发生$\Leftrightarrow$事件$A$不发生. 由于$A \cap \overline{A} = \varnothing$,$A \cup \overline{A} = \Omega$,因此在每次试验中,事件$A$与$\overline{A}$有一个且仅有一个发生. 又$A$也是$\overline{A}$的对立事件,所以称事件$A$与$\overline{A}$互逆. 图1.6给出了这种运算的一个几何表示.

例如,若事件A表示"某企业今年年底结算将不亏损",$\overline{A}$表示"某企业今年年底结算将亏损".

按差事件和对立事件的定义,显然有$A - B = A\overline{B}$.

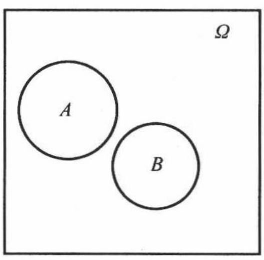

图1.5

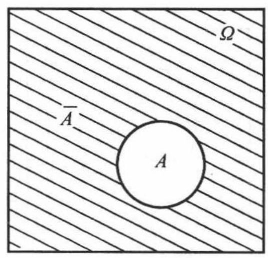

图1.6

与集合论中集合的运算一样,事件之间的运算满足下述运算规律.

(1)交换律:$A \cup B = B \cup A$,$A \cap B = B \cap A$;

(2)结合律:$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(3)分配律:$(A \cup B)C = AC \cup BC$,　$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$;

(4)德·摩根公式(对偶律):$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

可以推广到n个事件的情形,即$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k}$,$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$.

例 1.1.3 设 A,B,C 是样本空间 Ω 中的三个随机事件,试用 A,B,C 的运算表达式表示下列随机事件.

(1) A 与 B 发生但 C 不发生;

(2)事件 A,B,C 中至少有一个发生;

(3)事件 A,B,C 中至少有两个发生;

(4)事件 A,B,C 中恰好有两个发生;

(5)事件 A,B,C 中不多于一个事件发生.

解(1) $AB\overline{C}$;(2) $A\cup B\cup C$;(3) $AB\cup BC\cup AC$;

(4) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$;

(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$.

1.2 随机事件的概率

1.2.1 频率与概率

除必然事件和不可能事件外,一个事件在一次试验中可能发生,也可能不发生. 我们常常需要知道某些事件在一次试验中发生的可能性大小,揭示出这些事件的内在的统计规律,以便使我们能更好地认识客观事物. 例如,商业保险机构为获得较大利润,就必须研究个别意外事件发生的可能性大小,由此去计算保险费和赔偿费的多少.

正如一根绳子有长度,一块土地有面积,在一次试验中,虽然事件 A 发生与否具有随机性,但它发生的可能性大小是客观存在的. 在一次试验中事件 A 发生的可能性大小度量称为事件 A 的概率,记为 $P(A)$. 例如,抛一枚均匀的硬币,若记事件 A 为"出现正面 H",则凭直观就可断定在一次试验中事件 A 发生的可能性大小为 $\frac{1}{2}$,且无人怀疑它的正确性,因此 $P(A)=\frac{1}{2}$. 问题是这个数是如何得来的?怎样分析才能使之易于理解和接受?这就涉及概率的"测量"问题. 为此,先引入频率的概念.

定义 1.2.1 在相同的条件下重复进行了 n 次试验,如果事件 A 在这 n 次试验中出现了 n_A 次. 则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率,记为 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{n_A}{n}.$$

由定义可知,频率具有如下性质.

(1)非负性: $f_n(A)\geqslant 0$;

(2)规范性: $f_n(\Omega)=1$;

(3)有限可加性: 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是一组两两互不相容的事件,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}f_n(A_i).$$

显然,频率 $f_n(A)$ 的大小表示了在 n 次试验中事件 A 发生的频繁程度. 频率大,事件 A

发生就频繁，在一次试验中 A 发生的可能性就大，也就是事件 A 发生的概率大，反之亦然，因此，直观的想法是用频率来描述概率. 但这是否合理呢？先看下面的例子.

例 1.2.1 考虑“抛硬币”试验. 历史上，许多数学家都做过这一试验. 若规定均匀硬币的币值面向上为事件 A 发生，有关数据如表 1.1 所示.

表 1.1 抛硬币试验数据表

试验者	试验次数 n	出现正面的次数 n_A	频率 $f_n(A)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	5 981	0.498 4
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1.1 中不难发现：事件 A 在 n 次试验中发生的频率 $f_n(A)$ 具有随机波动性，且当 n 较小时，随机波动幅度较大；当 n 较大时，随机波动幅度较小. 最后，随着 n 的逐渐增大，$f_n(A)$ 逐渐稳定于固定值 $\frac{1}{2}$.

从上面的例子可以看出：事件 A 在 n 次试验中发生的频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间随机波动，当试验次数 n 较小时，波动的幅度较大. 因而，当 n 较小时，用 $f_n(A)$ 来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小是不恰当的. 况且，即使对于相同的 n，$f_n(A)$ 也可能不同. 但是，随着 n 的逐渐增大，$f_n(A)$ 逐渐稳定于某一固定常数. 对于每个事件 A，都有这样一个客观存在的常数与之对应. 这种“频率的稳定性”就是通常所说的“统计规律性”，它已不断地被人类的实践所证实，揭示了隐藏在随机现象中的内在规律性. 于是，用这个频率的稳定值来表示事件发生的可能性大小是恰当的.

但是，在实际中，我们不可能、也没必要对每一个事件都做大量的试验，从中得到频率的稳定值. 现在，我们从频率的稳定性和频率的性质出发，给出度量事件发生可能性大小的量——概率的定义及性质.

1.2.2 事件的概率

定义 1.2.2 设随机试验 E 的样本空间为 Ω，对于 E 的每一个事件 A，将其对应于一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列条件：

(1) 非负性，对于任意事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性，$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $i \neq j$，$A_iA_j=\varnothing$，$i,j=1,2,\cdots$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

不难看出，事件的概率的定义是在事件频率的三条性质的基础上提出的. 在第 5 章节中，我们将给出，当 $n \to \infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在某中意义下收敛到概率 $P(A)$ 的结论. 基于这一点，我们有理由用上述定义的概率 $P(A)$ 来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

由概率的定义,不难推出概率的如下性质.

性质1 $P(\varnothing)=0$.

性质2 (有限可加性)若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质3 对任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

证 由 $A\overline{A}=\varnothing$ 且 $A\cup\overline{A}=\Omega$,由性质2有

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}),$$
$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质4 设事件 A,B 满足 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),P(B)\geqslant P(A).$$

证 因为 $A\subset B$,所以 $B=A\cup(B-A)$ 且 $(B-A)A=\varnothing$,由可加性得

$$P(B)=P[A\cup(B-A)]=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A)\geqslant 0,P(B)\geqslant P(A).$$

一般情况下,对任意事件 A,B,有

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(A)-P(AB).$$

性质5 (加法公式)设 A,B 为任意两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,且 $A(B-AB)=\varnothing$,由性质2、4得

$$P(A\cup B)=P[A\cup(B-AB)]=P(A)+P(B)-P(AB).$$

n 个($n\geqslant 3$)事件的概率加法公式:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1.2.2 设 $P(A)=\frac{1}{3},P(B)=\frac{1}{2}$,分别在下列条件下求 $P(B\overline{A})$:

(1)$A\subset B$;(2)A 与 B 互斥;(3)$P(AB)=\frac{1}{8}$.

解 $P(B\overline{A})=P(B-AB)=P(B)-P(AB)$

(1)$A\subset B$,则 $P(AB)=P(A)$,因此

$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)=\frac{1}{6};$$

(2)若 A,B 互斥,则 $P(AB)=0$,因此 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}$;

(3)$P(AB)=\frac{1}{8}$,因此 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

1.3 古典概型与几何概型

1.3.1 等可能概型(古典概型)

在前面所讨论的随机试验的例子中,有一些随机试验具有如下两个特征:

(1)试验的样本空间只含有有限个元素,即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$;

(2)试验中每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=\cdots=P(\{\omega_n\}).$$

具有以上两个特点的随机试验称为等可能概型.由于它是概率论发展初期的主要研究对象,所以也称之为古典概型.

设试验E是古典概型,由于基本事件两两互不相容,因此

$$1=P(\Omega)=P(\bigcup_{i=1}^{n}\{\omega_i\})=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=nP(\{\omega_i\}),$$

从而

$$P(\{\omega_i\})=\frac{1}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

若事件A含有k个基本事件,即$A=\{\omega_{i_1}\}\cup\{\omega_{i_2}\}\cup\cdots\cup\{\omega_{i_k}\}$,这里$i_1,i_2,\cdots,i_k$是$1,2,\cdots,n$中某$k$个不同的数,则有

$$P(A)=\sum_{j=1}^{k}P(\{\omega_{i_j}\})=\frac{k}{n}=\frac{A\text{中包含的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}.\tag{1.3.1}$$

式(1.3.1)给出了等可能概型中事件A的概率计算公式.不难验证,由式(1.3.1)所确定的概率满足概率的公理化定义中所要求的三个条件.

例1.3.1 掷一颗均匀骰子,设A表示所掷结果为“四点或五点”,B表示所掷结果为“偶数点”,求$P(A)$和$P(B)$.

解 设$A_1=\{1\},A_2=\{2\},\cdots,A_6=\{6\}$分别表示所掷结果为“一点”,“两点”,…,“六点”,则样本空间$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A_1,A_2,\cdots,A_6$是所有不同的基本事件,且它们发生的概率相同,于是

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_6)=\frac{1}{6}.$$

由$A=A_4\cup A_5=\{4,5\}$,$B=A_2\cup A_4\cup A_6=\{2,4,6\}$,得

$$P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

例1.3.2 设袋中有4个白球和2个黑球,现从袋中无放回地依次摸出2个球(即第一次取一球不放回袋中,第二次再从剩余的球中取一球,此种抽取方式称为无放回抽样),试求:

(1)取到的两个球都是白球的概率;

(2)取到的两个球颜色相同的概率;

(3)取到的两个球中至少有一个是白球的概率.

解 记 $A=\{$取到的两个球都是白球$\}$;

$B=\{$取到的两个球都是黑球$\}$;

$C=\{$取到的两个球至少有一个是白球$\}$;

$D=\{$取到的两个球颜色相同$\}$.

(1)用两种方法求$P(A)$.

方法一:把4个白球和2个黑球彼此看作都可区分的,将4个白球编号为1,2,3,4;将2