浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

矩阵论

邱继征　编著

科学出版社

浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书

矩 阵 论

邱继征 编著

浙江省级重点学科应用数学建设基金资助

科 学 出 版 社

北 京

内容简介

本书介绍矩阵空间、λ矩阵与Jordan标准形、矩阵分析、矩阵微分方程、矩阵扰动分析和广义逆等矩阵论的基本内容，并讲述这些内容的基本理论和计算方法.

本书深入浅出，不要求读者具有高深的数学基础，可作为理工类本科生、研究生的矩阵论教材，也可作为相关领域科技工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

矩阵论/邱继征编著. —北京：科学出版社，2016

(浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书)

ISBN 978-7-03-049222-7

Ⅰ. ①矩… Ⅱ. ①邱… Ⅲ ①矩阵论 Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第147103号

责任编辑：石 悦 李 萍／责任校对：郭瑞芝

责任印制：张 伟／封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016年6月第一版 开本：720×1000 B5

2016年6月第一次印刷 印张：16 7/8

字数：330 000

定价：49.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“浙江省级重点学科应用数学教学改革与科学研究丛书”

编　委　会

总　　序

近年来, 关于数学的各种新观点不断出现.

有一种观点认为, 随着数学的发展, 数学已经从自然科学中分离出来, 成为独立的科学门类——数学科学.

持这种观点的学者的依据是：①从现代数学的发展情况可以看出, 数学的许多内容和方法的产生, 不再是基于研究自然界中存在的物质运动规律的需要, 而是基于数学自身的需要. 例如, $6=3+3$, $8=3+5$, $10=5+5=3+7$, 等等, 即每一个大于等于6的偶数都可以表示为两个奇素数的和, 这就是哥德巴赫猜想, 至今没有证明. 但是, 这样一个在数学中显得十分重要的著名的猜想, 其结果的对与否, 不会对数学之外的任何学科产生影响, 证明它不是自然科学的需要, 而仅仅是数学科学的需要. ②数学不仅具有应用功能, 而且具有其他学科不能比拟的教育功能. 数学的应用功能表现在：没有数学, 现代科技无从谈起；任何一种学科, 只有应用了数学, 才能成为科学学科. 数学的教育功能表现在：在中国, 语文、数学、英语被认为是初等教育中最重要的三门课程；在世界范围内, 有不学中文的学生, 有不学英语的学生, 但没有不学数学的学生.

我们同意这种观点, 希望在数学教学改革和科学研究中体现这种观点.

数学教学改革, 首先需要的是教材的改革, 而教材的改革, 涉及的只有两个方面：一是内容; 二是方法.

如何在一本数学教材中以数学科学的观点选取内容、介绍方法?

我们的认识是：无论是选取内容方面，还是介绍方法方面，都要关注数学的应用功能和教育功能的展现.

在内容的选取方面, 既不是不管数学的教育功能, 狭隘地全部以目前生产生活的实际应用为目的, 打乱系统, 什么“有用”就选什么, 什么“没用”就跳过什么; 也不是完全从数学的需要出发, 一点也不考虑所选取的内容和实际应用的联系. 本套丛书采取有实际应用背景的内容优先选取的原则. 我们的考虑是：没有迹象表明, 没有实际应用背景的内容在体现数学的教育功能时强于有实际应用背景的内容, 既然如此, 后者更有利于同时展现数学的应用功能和教育功能.

在方法的介绍方面, 既不完全采用公理化体系的做法, 让读者在接受严格数学训练的基础上自然地受到数学科学的熏陶; 也不完全摒弃数学特有的推理过程, 以急功近利的方式只讲结果, 只讲计算公式. 我们知道, 公理化体系的做法是将数学的训练目的不直接说出来, 而是藏起来, 藏在严密的过程背后, 让学生不知不觉得到严格的数学训练. 这种体系在介绍内容时, 不交代前因后果, 一上来就是莫名其妙的定义、公理, 然后一步步以极其严密的方式展开讨论. 这种做法在知识门类相对少的过去是有效的, 但在知识爆炸、课程门类不断增加、学生同时要有做学问和实际应用两

手准备的现在, 没有时间这样做. 训练要有, 但训练目的不是藏起来, 而是尽可能直接讲出来. 例如, 数学书籍中一定会用到归纳法、演绎法、反证法, 这些方法不是数学特有的, 但可以被数学最为有效地传授给学生, 这一事实恰好可以说明数学的教育功能的强大. 但是, 如果我们去问一下数学系的毕业生什么是演绎法, 恐怕很少有人能说周全, 究其原因, 是我们的教材没有明确地告诉学生演绎法的基本内容和过程. 本套丛书将致力于改变这种状况.

本套丛书注意到：根据课程和授课对象的不同, 数学的应用功能和教育功能的展现需分层次, 两种功能的展现要有机配合. 例如, 有的数学分支本来就属于应用数学, 对这样的课程, 在选取内容和介绍方法时必须首先保证应用方面的需要, 其次才考虑教育功能的融入; 有的授课对象是文科学生, 对这些学生, 在编写教材时就要充分注意他们的基础、兴趣、思维方式和希望通过数学的学习要达到的目的, 因此要首先考虑数学的教育功能, 其次才考虑应用功能的融入.

现代化的标志是数字化, 也就是要在所有的领域尽最大可能地使用计算机技术, 因此, 在数学教学中, 对数字化的配合和适应是必需的. 为了展现数学的应用功能, 在数学教学的每个环节, 都应该关注计算机技术, 包括有意考虑内容的计算机实现, 如算法问题, 内容与几个成功的数学软件的结合问题. 我们知道, 介绍如何应用数学软件的最好环境, 当为相应的数学课程. 因此, 本套丛书中的教材, 特别注意介绍与主要内容配套的软件的应用, 例如, 介绍相应的MATLAB 软件包的使用.

科学研究成果整理成学术著作, 可以总结和条理化研究问题, 这对于传播研究成果、深化研究工作是有利的, 这些著作还可以作为研究生教材使用.

本套丛书中学术著作的撰写遵循了如下的原则:

首先, 作为介绍学术成果的学术著作要有新内容、新观点, 学术系统应是明显的, 不是杂乱的、拼凑的, 特别是著作中作者的成果应有重要的分量.

其次, 本套丛书中的学术著作特别注意内容的系统性、完备性.

再次, 也是最重要的, 本套丛书中的学术著作, 和教材一样注意展现数学的应用功能和教育功能, 在必要时, 还考虑内容的计算机实现, 如算法问题, 内容与几个成功的数学软件的结合问题.

最后, 在写作细节上, 本套丛书要求作者以严格的科学态度对待自己的著作, 概念和符号应明确, 推导和介绍要细致, 避免突然出现翻遍全书都找不到介绍的概念和符号, 避免用显然、易知等词语掩盖困难的证明过程.

教学改革涉及的问题很多, 有些问题需要一步步解决, 有的还需要根据形势的变化调整解决方案. 我们仅做了初步的尝试, 加之水平有限, 本套丛书中的问题一定很多, 迫切希望读者批评指正.

邱继征

2013 年 3 月 8 日

前　言

矩阵是利用数学解决实际问题的有效工具. 当今，科技发展突飞猛进，所有科技领域都在迈向现代化，而现代化的标志是数字化，数字化意味着所涉及的问题都要通过数学模型变为数据，利用计算机进行分析运算，然后返回结果，变为方案或动作，以至得到产品. 但计算机只能处理离散问题，不能处理连续问题，所以无论什么数学模型与数据，都需进行离散化才能交给计算机，或者再直接一点说，都需把问题转化为数字矩阵或处理矩阵的方法才可被计算机使用，矩阵的重要性可见一斑. 现在，全世界最著名的计算软件之一的 Matlab 软件，其名称写全便是 MATrix LABoratory，即矩阵实验室，直言其所有的内容都是在处理矩阵，也可看出矩阵在计算领域的地位.

除了数学文化对人类文化的贡献和数学在创新理念方面的影响这些更深层次的作用，数学具有方法训练和实际应用两个直接的功能. 所以，正如不可将所有大学变为技校而全部传授技术一样，大学的数学课程也必须同时兼顾数学的两个直接的功能，而不能一切为了应用，以应用为标准，什么有用就教什么，什么“没用”就跳过什么，不然，必将使培养的学生丧失创新的意向、知识与能力. 一百多年前，美国一个物理学家说：不要老说应用，不然会退化成中国人，中国在千百年前就发明了火药，但他们不去研究火药为什么会爆炸，而是只关注应用，以致丧失了在物理甚至化学方面有建树的可能性，以致我们现在不得不称他们为野蛮人. 这话现在听来，都令人血涌.

鉴于这些想法，本书同时关注矩阵论的应用和讲述内容的过程中数学方法的传授，遵循的原则是：矩阵论的基本内容要讲，推理方法要展现，推理过程和逻辑关系要交代，计算和应用步骤要明确介绍，细节需关注，不可不好讲了就说显然、易知，对于自己不懂和牵涉太多的知识，哪怕指出出处让有兴趣的读者追寻，也不可藏和躲.

此外，可能有大量工科学生使用本书，因此需在编写时考虑工科学生学习矩阵论的目的和特点.

出于这些原因，编写本书的具体方式如下：

(1) 选材方面，选取应用性较强的内容，没有选取深难的内容，如矩阵的因子分解. 我们虽然强调同时关注训练和实际应用，但没有迹象表明，对于非前沿数学分支，应用性强的内容在方法训练方面的作用一定弱于应用性弱的内容，故做如是选取.

(2) 除了绪论中的内容，所有部分都尽可能呈现逻辑关系与详细的论证，以及结果的应用步骤，前者为培养和训练思维能力，后者为提供切实可行的应用方法.

(3) 对于推理和论证过程中出现的处理手段，给出一定数量的解释，尽量挖掘来龙去脉，以帮助提高学生的联想能力.

感谢浙江省重点学科应用数学和浙江工业大学提供资助，感谢科学出版社编辑石悦、胡海霞的大力帮助. 本书内容曾为浙江工业大学理学院、机械学院 12 届学生讲授，研究生石智慧、宋丛威、梁静、冯成祥、胡新琰、殷燕妮、汪雪芬、柴金良、康瑞芳提出过宝贵的意见，柴金良还在编辑书稿的过程中出现技术问题时提供了关键的帮助，浙江工业大学数学系朱海燕教授在任课过程中发现本书草稿中的重大错误并提出多处改进意见，在此一并感谢. 由于作者水平有限，难免有疏漏之处，迫切希望读者批评指正.

编　者

2016 年 3 月 3 日

目录

第1章 绪 论

本章介绍本书涉及的部分概念与知识. 主要内容包括: 几个著名的不等式、线性空间、赋范线性空间、内积空间、有限维赋范线性空间和矩阵的基本知识.

1.1 几个著名的不等式

不等式的重要性表现在数学的各个方面, 因此, 有专门研究不等式的数学工作者. 一些著名的不等式可以应用于不同的重要场合, 完全可以与著名的恒等式媲美.

下面介绍的几个不等式, 堪称数学中最重要的不等式, 其中一些是范数的三角不等式的直接来源, 另一些直接导致诸如 Bessel 不等式等重要不等式的产生.

记实数集为 $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$, 复数集为 $\mathbf{C}=\{c=x+\mathrm{i}y: x,y\in\mathbf{R}\}$, 其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, 整数集为 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$, 正整数集为 $\mathbf{Z}_+=\{1,2,\cdots\}$.

1. 绝对值的三角不等式

设 $a,b\in\mathbf{C}$, 则

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1.1}$$

证明 设 $a=a_1+\mathrm{i}a_2, b=b_1+\mathrm{i}b_2$, 则 $a+b=a_1+b_1+\mathrm{i}(a_2+b_2)$,

$$\begin{aligned}|a+b|^2&=(\sqrt{|a_1+b_1|^2+|a_2+b_2|^2})^2\\&=|a_1+b_1|^2+|a_2+b_2|^2\\&\leqslant|a_1|^2+|b_1|^2+|a_2|^2+|b_2|^2+2|a_1b_1|+2|a_2b_2|.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2&=(\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}+\sqrt{|b_1|^2+|b_2|^2})^2\\&=|a_1|^2+|b_1|^2+|a_2|^2+|b_2|^2+2\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\sqrt{|b_1|^2+|b_2|^2}.\end{aligned}$$

两者比较, 只要证明

$$|a_1b_1|+|a_2b_2|\leqslant\sqrt{|a_1|^2+|a_2|^2}\sqrt{|b_1|^2+|b_2|^2},$$

即

$$(|a_1b_1|+|a_2b_2|)^2\leqslant(|a_1|^2+|a_2|^2)(|b_1|^2+|b_2|^2) \tag{1.2}$$

即可.

事实上，由于

$$
\begin{aligned}
&0 \leqslant (|a_1b_2| - |a_2b_1|)^2,\\
&2|a_1b_1a_2b_2| \leqslant |a_1b_2|^2 + |a_2b_1|^2,
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
(|a_1b_1| + |a_2b_2|)^2 &= |a_1b_1|^2 + |a_2b_2|^2 + 2|a_1b_1a_2b_2|\\
&\leqslant (|a_1|^2 + |a_2|^2)(|b_1|^2 + |b_2|^2)\\
&= |a_1b_1|^2 + |a_1b_2|^2 + |a_2b_1|^2 + |a_2b_2|^2,
\end{aligned}
$$

从而 (1.2) 成立，故 (1.1) 成立. 证毕.

从一个不等式出发，可以得到无数个不等式，例如，由 (1.1) 可得 $|a+b| \leqslant k(|a|+|b|)$，其中 $k \geqslant 1$. 但发现有应用价值的重要不等式却是不容易的.

由绝对值的三角不等式，可得如下常用不等式：

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b|, \tag{1.3}$$

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|, \tag{1.4}$$

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}, \tag{1.5}$$

其中涉及的元素为复数.

一般来说，不等式的证明比发现容易，除了部分需要高超的技巧外，微积分法和反推法是常用证明方法. 例如，(1.5)“去分母”，即此不等式两边同时乘以 $(1+|a+b|)(1+|a|)(1+|b|)$ 得

$$
\begin{aligned}
&|a+b|(1+|a|)(1+|b|)\\
\leqslant\ &|a|(1+|a+b|)(1+|b|) + |b|(1+|a+b|)(1+|a|),\\
&|a+b| + |a||a+b| + |b||a+b| + |ab||a+b|\\
\leqslant\ &|a| + |b| + 2(|a||a+b| + |b||a+b| + |ab||a+b|),\\
&|a+b| \leqslant |a| + |b| + |a||a+b| + |b||a+b| + |ab||a+b|,
\end{aligned}
$$

而后者可由

$$|a+b| \leqslant |a| + |b| \leqslant |a| + |b| + |a||a+b| + |b||a+b| + |ab||a+b|$$

得到.

将上述过程反序，就得到了 (1.5) 的证明.

2. Young 不等式

设 $p>1, a\geqslant 0, b\geqslant 0$, q 与 p 互为对偶的正数 (也称共轭数)，即 $p>0, q>0$ 满足

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \tag{1.6}$$

则

$$ab\leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}. \tag{1.7}$$

Young 不等式可以用微积分的方法证明.

由 (1.6) 得

$$\begin{aligned}&pq=p+q,\quad pq-p-q+1=1,\quad (p-1)(q-1)=1,\\&p-1=\frac{1}{q-1},\quad q-1=\frac{1}{p-1}.\end{aligned}$$

故当 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 时，若 $y=x^{p-1}$，则 $x=y^{q-1}$. 因此在 xOy 平面的第一象限内，函数 $y=x^{p-1}$ 与 $x=y^{q-1}$ 的图形为同一条曲线.

不妨设 $a\geqslant b$. 对函数 $y=x^{p-1}, x\in[0,a]$，积分

$$\int_0^a x^{p-1}\mathrm{d}x=\frac{a^p}{p}$$

为以 $y=x^{p-1}$ 为曲边，以 $x=a, y=0$ 为直边的曲边三角形面积.

对函数 $x=y^{q-1}, y\in[0,b]$，积分

$$\int_0^b y^{q-1}\mathrm{d}y=\frac{b^q}{q}$$

为以 $x=y^{q-1}$ 为曲边，以 $y=b, x=0$ 为直边的曲边三角形面积.

若 $a=b$, 则两个曲边三角形恰好拼成以 $x=0, x=a, y=0, y=b=a$ 为边的正方形, 不然, 若 $a\neq b$, 两个曲边三角形拼成的图形除了包含矩形 $x=0, x=a, y=0, y=b$ 外，还多一以 $y=x^{p-1}$ 为曲边，以 $x=a, y=b$ 为直边的曲边三角形，因此，前述两个曲边三角形面积之和，必然大于等于矩形面积 ab.

Young 不等式有许多应用与推广.

3. 级数形式的 Hölder 不等式

Hölder 不等式有两种，一种为级数形式，另一种为积分形式.

先给出级数形式的 Hölder 不等式.

设 $p>1$，q 与 p 互为对偶数，即 (1.6) 成立，$a_k, b_k\in\mathbf{C}$, $k=1,2,\cdots$, 则

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.8}$$

此不等式的证明需要一些技巧.

证明　记

$$x_k=\frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}},\quad y_k=\frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

则

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_k^p=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|^p}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|^p}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p}=1,$$

同理得

$$\sum_{k=1}^{\infty}y_k^q=1.$$

由 Young 不等式得

$$x_ky_k\leqslant\frac{x_k^p}{p}+\frac{y_k^q}{q},\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k^p}{p}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k^q}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

即有

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\frac{|b_k|}{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant 1,$$

由此即得 (1.8). 证毕.

4. 有限和形式的 Hölder 不等式

若 $a_k,b_k=0,k>n$, 则得

$$\sum_{k=1}^{n}|a_kb_k|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.\tag{1.9}$$

此即有限和形式的 Hölder 不等式.

5. 级数形式的 Cauchy-Schwarz 不等式

当 $p=q=\dfrac{1}{2}$ 时，Hölder 不等式成为

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_kb_k|\right)^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|^2, \tag{1.10}$$

此不等式称为级数形式的 Cauchy-Schwarz 不等式.

6. 积分形式的 Hölder 不等式

下面介绍积分形式的 Hölder 不等式. 为此，需先介绍 p 方可积的概念.

若 $\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x<\infty$, 则称函数 f 在 E 上 p 方可积，记为 $f\in L^p(E)$.

注意：关于函数各种形式的可积问题，有较为复杂的理论，如实变函数论、测度论、调和分析等，需涉及可测集、可测函数、各种类型的可积函数、积分的极限理论等. 我们在微积分中学习的积分，称为 Riemann 积分，而实变函数论中的积分称为 Lebesgue 积分，前者的积分极限定理条件要求苛刻，而后者宽松许多，这也是引进后者的重要原因，因此，本书说到的积分，皆指 Lebesgue 积分. 需要简单地指出：对于在 Riemann 和 Lebesgue 意义下都可积的函数，两种积分值是相等的，所以，积分皆指 Lebesgue 积分的假定不会导致数值计算错误.

设 $p>1$，q 与 p 互为对偶数，即 (1.6) 成立，$f\in L^p(E),g\in L^q(E)$, 则 $fg\in L^1(E)=L(E)$ 且

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.11}$$

证明 若 $\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x=0$ 或 $\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x=0$, 则由测度论知 f 或 g 在 E 上几乎处处为 0，故 fg 也在 E 上几乎处处为 0，从而 $\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x=0$，(1.11) 两边皆为 0，成立.

若 $\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x>0$，$\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x>0$，令

$$a(x)=\frac{|f(x)|}{\left(\int_E|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}},\quad b(x)=\frac{|g(x)|}{\left(\int_E|g(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}},$$

则由 Young 不等式，有

$$
\begin{aligned}
a(x)b(x) &\leqslant \frac{\left(\dfrac{|f(x)|}{\left(\displaystyle\int_E |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}}\right)^p}{p} + \frac{\left(\dfrac{|g(x)|}{\left(\displaystyle\int_E |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^q}{q} \\
&= \frac{|f(x)|^p}{p\displaystyle\int_E |f(t)|^p \mathrm{d}t} + \frac{|g(x)|^q}{q\displaystyle\int_E |g(t)|^q \mathrm{d}t},
\end{aligned}
$$

上述不等式两边积分，由积分的单调性知

$$
\begin{aligned}
&\int_E a(x)b(x)\mathrm{d}x \\
\leqslant &\frac{1}{p\displaystyle\int_E |f(t)|^p \mathrm{d}t}\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x + \frac{1}{q\displaystyle\int_E |g(t)|^q \mathrm{d}t}\int_E |g(x)|^q \mathrm{d}x \\
= &\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,
\end{aligned}
$$

此即

$$
\int_E \frac{|f(x)|}{\left(\displaystyle\int_E |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(x)|}{\left(\displaystyle\int_E |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}}\mathrm{d}x \leqslant 1,
$$

$$
\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_E |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{q}}.
$$

其中注意

$$
\int_E h(x)\mathrm{d}x = \int_E h(t)\mathrm{d}t
$$

对 E 上任何可积函数 h 成立. 证毕.

7. **积分形式的 Cauchy-Schwarz 不等式**

当 $p = q = \dfrac{1}{2}$ 时，Hölder 不等式成为

$$
\left(\int_E |f(x)g(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_E |f(x)|^2 \mathrm{d}x \int_E |g(x)|^2 \mathrm{d}x, \tag{1.12}
$$

称为积分形式的 Cauchy-Schwarz 不等式.

可以看出，两种 Hölder 不等式从形式到证明过程都十分相像. 其实，如果了解 Stieltjes 积分，即可知积分与和式没有区别，这就是为什么在微积分中级数敛散性判别法与广义积分敛散性判别法那么相像的原因.