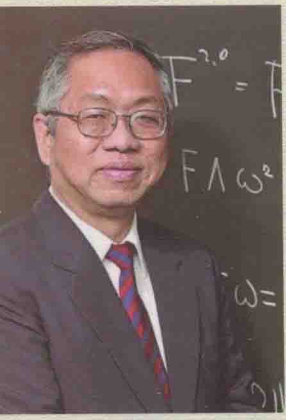

丘成桐中学数学奖推荐参考书

The Collection of
the Fourth Shing-Tung Yau High School
Mathematics Awards Papers

第四届

丘成桐中学数学奖
获奖论文集

丘成桐 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

丘成桐中学数学奖推荐参考书

The Collection of
the Fourth Shing-Tung Yau High School
Mathematics Awards Papers

第四届

丘成桐中学数学奖
获奖论文集

丘成桐 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

第四届丘成桐中学数学奖获奖论文集 / 丘成桐主编.
—杭州:浙江大学出版社,2013.12
ISBN 978-7-308-12677-9

Ⅰ.①第… Ⅱ.①丘… Ⅲ.①中学数学课—教学研究
—文集 Ⅳ.①G633.602-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 303307 号

第四届丘成桐中学数学奖获奖论文集

丘成桐 主编

责任编辑 沈国明
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版 浙江时代出版服务有限公司
印　　刷 德清县第二印刷厂
开　　本 710mm×1000mm 1/16
印　　张 16.5
字　　数 374 千
版 印 次 2013 年 12 月第 1 版 2013 年 12 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-12677-9
定　　价 40.00 元

丘成桐中学数学奖开幕辞

国之将兴，必有英豪。国之永祚，必有贤良。策划筹谋，创新除旧，存亡继绝，尊老扶幼。是故古之王者，有求贤之诏，征非常之士，以成非常之功也。

方今天下扰扰，国竞民争，以智为经，以力为纬，谋诈四起，科技是用。天命中国，和平崛起，仁道至诚，礼义是敬。唯我先祖，创作发明。造纸指南，火药印刷。奠基文明，引领世界。至于筹学九章，历法天文，实开筹学之先河。改革至今，已历二纪。青苗茁壮，太空飞翔。鸟巢水方，京师竞技。诗云：周虽旧邦，其命维新，其此之谓乎。

俊秀子弟，既有报国拳拳之心，创新立业之志。士子敢不竭力，培育后进。筹算乃科学之基，特选拔中学生有创见者，颁以奖章，以示鼓励。

——丘成桐

丘成桐中学数学奖组织构架

顾问

David C. Chang	纽约理工大学校长
潘云鹤	中国工程院常务副院长
Henry Pinkham	哥伦比亚大学文理学院院长
杨　卫	浙江大学校长
杨祖佑	加州大学圣巴巴拉分校校长
张　曦	浙江大学党委书记
Robert Zimmer	芝加哥大学校长

组织委员会

主席： 丘成桐（清华大学数学科学中心主任、浙江大学数学科学研究中心主任、中国科学院晨兴数学中心主任）

名誉主席： 陈东升（泰康人寿保险股份有限公司董事长兼 CEO）

副主席： 郑绍远（香港科技大学理学院院长）

委员：

程崇庆（南京大学副校长、研究生院院长）

洪家兴（复旦大学数学科学学院首任院长、中国科学院院士）

刘克峰（加州大学洛杉矶分校教授、浙江大学数学科学研究中心执行主任）

潘日新（加州大学河滨分校教授）

许洪伟（浙江大学数学科学研究中心副主任）

杨　乐（中国科学院数学与系统科学研究院首任院长、中国科学院院士）

朱熹平（中山大学数学与计算科学学院院长）

郑　燕（泰康人寿保险股份有限公司品牌传播部总经理）

韩　堃（泰康人寿保险股份有限公司品牌顾问）

（注：丘成桐中学数学奖及丘成桐中学应用数学科学奖组织架构成员身份或职务为各成员受聘时的身份或职务。）

评审委员会

国内委员会

刘克峰（主席）加州大学洛杉矶分校教授、浙江大学数学科学研究中心执行主任
蔡文端　加拿大多伦多大学教授
洪家兴　复旦大学数学科学学院首任院长、中国科学院院士
胡　森　中国科学技术大学教授
潘日新　加州大学河滨分校教授
季理真　美国密歇根大学教授、浙江大学数学科学研究中心光彪特聘教授
林长寿　台湾大学教授
王跃飞　中国科学院数学与系统科学研究院副院长
王仁宏　大连理工大学数学科学研究所所长
肖　杰　清华大学数学系主任
杨　乐　中国科学院晨兴数学中心副主任、中国科学院院士
张英伯　北京师范大学数学科学学院教授、中国数学会普及工作委员会主任
张镇华　台湾大学数学系主任
郑绍远　香港科技大学理学院院长
朱熹平　中山大学数学与计算科学学院院长

国际委员会

丘成桐（主席）　清华大学数学科学中心主任、浙江大学数学科学研究中心主任、中国科学院晨兴数学中心主任
Raymond Honfu Chan（陈汉夫）　香港中文大学数学系讲座教授
Shiu-Yuen Cheng（郑绍远）　香港科技大学理学院院长
Jean-Pierre Demailly　法国格勒诺布尔大学教授
David Gu（顾险峰）　纽约州立石溪大学教授
Vaughan F. R. Jones　美国范德堡大学教授
Jun Liu（刘军）　哈佛大学教授
Kefeng Liu（刘克峰）　加州大学洛杉矶分校教授、浙江大学数学中心执行主任
Lars Tyge Nielsen　美国哥伦比亚大学教授
Duong H. Phong　美国哥伦比亚大学教授
Chi-Wang Shu（舒其望）　布朗大学应用数学系主任
Xujia Wang（汪徐家）　澳大利亚国立大学教授
Dapeng Zhan　密歇根州立大学教授
Michael Zieve　密歇根大学教授

丘成桐中学应用数学科学奖组织构架

顾问

路甬祥	中国科学院院长
潘云鹤	中国工程院常务副院长
David C. Chang	纽约理工大学校长
杨祖佑	加州大学圣巴巴拉分校校长
陈繁昌	香港科技大学校长
顾秉林	清华大学校长、中国科学院院士
郭　雷	中国科学院数学与系统科学研究院院长
杨　乐	中国科学院数学与系统科学研究院首任院长、中国科学院院士
石钟慈	中国科学院院士
姚期智	清华大学教授、美国科学院院士
徐匡迪	中国工程院院长

组织委员会

主席：　丘成桐（清华大学数学科学中心主任、浙江大学数学科学研究中心主任、中国科学院晨兴数学中心主任）

名誉主席：　陈东升（泰康人寿保险股份有限公司董事长兼 CEO）

副主席：　陈繁昌（香港科技大学校长）

委员：

郭　雷（中国科学院数学与系统科学研究院院长）
李大潜（中国科学院院士、复旦大学数学系教授）
王仁宏（大连理工大学数学科学研究所所长）
袁亚湘（中国科学院教授）
许跃生（中山大学数学与计算科学学院讲座教授、千人计划学者）
白重恩（清华大学经济系系主任）
刘克峰（加州大学洛杉矶分校教授、浙江大学数学中心执行主任）
陈宜良（国立台湾大学数学系教授）
陈汉夫（香港中文大学数学系讲座教授）
郑　燕（泰康人寿保险股份有限公司品牌传播部总经理）
韩　堃（泰康人寿保险股份有限公司品牌顾问）

评审委员会

国内委员会

陈汉夫(主席)	香港中文大学数学系讲座教授
郭　雷	中国科学院数学与系统科学研究院院长
李大潜	中国科学院院士、复旦大学数学系教授
王仁宏	大连理工大学数学科学研究所所长
袁亚湘	中国科学院教授
许跃生	中山大学数学与计算科学学院讲座教授、千人计划学者
白重恩	清华大学经济系系主任
许洪伟	浙江大学数学科学研究中心副主任
陈宜良	台湾大学数学系教授
柏兆俊	加州大学戴维斯分校计算机系、数学系教授
沈佐伟	新加坡国立大学数学系杰出教授
张绍良	名古屋大学计算科学与工程系教授
林文伟	台湾"清华大学"教授
曾云波	清华大学数学科学系教授、博导
宋永忠	南京师范大学校长
周迅宇	牛津大学数理金融研究所主任

国际委员会

丘成桐(主席)	清华大学数学科学中心主任、浙江大学数学科学研究中心主任、中国科学院晨兴数学中心主任
Raymond Honfu Chan(陈汉夫)	香港中文大学数学系讲座教授
Shiu-Yuen Cheng(郑绍远)	香港科技大学理学院院长
Jean-Pierre Demailly	法国格勒诺布尔大学教授
David Gu(顾险峰)	纽约州立石溪大学教授
Vaughan F. R. Jones	美国范德堡大学教授
Jun Liu(刘军)	哈佛大学教授
Kefeng Liu(刘克峰)	加州大学洛杉矶分校教授、浙江大学数学中心执行主任
Lars Tyge Nielsen	美国哥伦比亚大学教授
Duong H. Phong	美国哥伦比亚大学教授
Chi-Wang Shu(舒其望)	布朗大学应用数学系主任
Xujia Wang(汪徐家)	澳大利亚国立大学教授
Dapeng Zhan	密歇根州立大学教授
Michael Zieve	密歇根大学教授

数学科学在当今国际科技和人才竞争力方面具有突出的重要地位，在与人类日常生活有关的科学技术中的应用也日趋广泛。我们相信，为了更好地适应未来社会的挑战，青少年应该拥有良好的数学教育。国际上很早就倡导尽可能早地培养学生的科研创新能力，并为此设奖鼓励更多的人参与进来。比如在美国，与数学有关的面向高中生科研成果的“西屋科技奖”（Siemens Westinghouse Science and Technology Competition），这个奖项不同于普通的数学竞赛，而是注重创新与实践，鼓励团队精神，极大地促进了美国高中生、大学生的科研热情，许多获奖者后来都成为著名的科学家。据统计，“西屋科技奖”（现更名为“英特尔科技奖”）得主中有5位后来成为诺贝尔科学奖获得者，27人当选为美国科学院院士。

任何科技发展都不能缺乏数学作为根基，数学在科技年代，地位日益重要。为鼓励华人数学研究和教育发展，激发全球华人青少年对数学的兴趣，并及早发掘与培养全世界的华人数学英才，国际数学大师丘成桐教授提出举办一个中学生数学比赛，希望通过专题研究，培养新一代中学生的数学素养，引发青年人探索知识的兴趣及提升他们的创新能力。

泰康人寿保险股份有限公司董事长陈东升先生对丘成桐教授的想法给予全面的赞赏和大力的支持。丘成桐教授与陈东升先生在北京、杭州多次会面商谈设立中学生数学奖的具体事宜，最终决定由双方协作配合，联合设立“丘成桐中学数学奖”。

泰康人寿保险股份有限公司多年来一直将“回馈社会，奉献爱心”作为企业发展的准则，积极组织、发起和参与了多项社会公益活动，曾荣获“搜狐2006新视角高峰论坛”颁发的“最佳社会公益奖”。

“丘成桐中学数学奖”将借鉴和采用“西屋科技奖”的组织与选拔模式，强调创新与团队精神，面向全球的华人中学生。我们将通过全国主流新闻媒体向社会广泛宣传报道，并努力将“丘成桐中学数学奖”打造成为拥有国际知名度与良好社会效应的青少年科技奖项。

2007年12月19日，“丘成桐中学数学奖”签约仪式暨新闻发布会于第四届华人数学家大会期间在杭州举行；2008年3月26日，在北京举办隆重的启动仪式。前三届颁奖仪式已分别于2008年10月、2009年12月和2010年12月在北京举行。为了提升同学对应

用数学科学的兴趣及研究能力，2010年起新加了应用数学科学奖。第四届丘成桐中学数学奖暨第二届丘成桐应用数学科学奖颁奖仪式于2011年12月在海南三亚举行。

本届全国总决赛，丘成桐中学数学奖和丘成桐应用数学科学奖面向全球的华裔中学生数学团队，设立奖项如下：

（1）各设金奖一名，每队奖励15万元；

（2）各设银奖一名，每队奖励10万元；

（3）各设铜奖约三名，每队奖励6万元；

（4）数学奖设优胜奖约五名，每队奖励3万元。

对成绩特别优秀的青少年数学团队，可授予特等奖。由评审委员会书写评语，在报考国内外著名大学时推荐优先录取获奖学生。相应奖金的30%用于颁发给获奖学生的指导教师和所在学校。另外不定期设立“保险精算师大奖”，奖励金融数学、经济学方面最优秀的研究报告，并颁发证书。

目录

第四届丘成桐中学数学奖

第二届丘成桐中学应用数学科学奖

Shock Profile for Gas Dynamics in Thermal Nonequilibrium

Wang Xie

(Sidwell Friends Upper School, America)

Tutor: Luo Tao

1 Introduction

The motion of a gas in local thermodynamic equilibrium is governed by the compressible Euler equations. In Lagrangian coordinates, the equations for one dimensional flow read (cf. [1])

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p_x = 0, \\ (e + \frac{u^2}{2})t + (pu)_x = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

where v, u, p and e are, respectively, the specific volume, velocity, pressure and internal energy of the gas. For an ideal gas

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} pv, \tag{1.2}$$

where $\gamma(\gamma > 1)$ is the adiabatic constant. During rapid changes in the flow the internal energy e may lag behind the equilibrium value corresponding to the ambient pressure and density. The translational energy adjusts quickly, but the rotational and vibrational energy may take an order of magnitude longer. If we suppose that α of the degrees of freedom adjust instantaneously but a further α_r degrees of freedom take longer to relax, we may take (cf. [2]):

$$e = \frac{\alpha}{2} pv + q, \tag{1.3}$$

where q is the energy in the lagging degrees of freedom. In equilibrium, q would have the value

$$q_{\text{equil}} = \frac{\alpha_f}{2} pv. \tag{1.4}$$

A simple overall equation to represent the relaxation is (in Lagrangian coordinates):

$$q_t = -\frac{1}{\tau}\left(q - \frac{\alpha_f}{2} pv\right), \tag{1.5}$$

where $\tau(\tau > 0)$ is the relaxation time. Therefore, in thermal nonequilibrium, we have the following system of equations to model the gas motion:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p_x = 0, \\ \left(\frac{\alpha}{2} pv + q + \frac{u^2}{2}\right)_t + (pu)_x = 0, \\ q_t = -\frac{1}{\tau}\left(q - \frac{\alpha_f}{2} pv\right). \end{cases} \tag{1.6}$$

If the relaxation time τ is taken to be so short that $q = \frac{\alpha_f}{2} pv$ is an adequate approximation to the last equation in (1.6), we have the following equilibrium theory:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + p_x = 0, \\ \left(\frac{\alpha + \alpha_f}{2} pv + \frac{u^2}{2}\right)_t + (pu)_x = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

The three characteristic speeds for (1.7) are:

$$\lambda_1 = -\sqrt{\left(1 + \frac{2}{\alpha + \alpha_f}\right) \frac{p}{v}}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{\alpha + \alpha_f}\right) \frac{p}{v}}.$$

For system (1.7), $((v_-, u_-, p_-), (v_+, u_+, p_+), \sigma)$ with two constant states (v_-, u_-, p_-) and (v_+, u_+, p_+) and speed σ is called a shock wave (cf. [1]) if the following Rankine-Hugoniot condition

$$\begin{cases} -\sigma(v_+ - v_-) = (u_+ - u_-), \\ \sigma(u_+ - u_-) = (p_+ - p_-), \\ \sigma\left[\left(\frac{\alpha + \alpha_f}{2} p_+ v_+ + \frac{u_+^2}{2}\right) - \left(\frac{\alpha + \alpha_f}{2} p_- v_- + \frac{u_-^2}{2}\right)\right] = (p_+ u_+ - p_- u_-) \end{cases} \tag{1.8}$$

hold, and some other entropy conditions hold, where v_-, v_+, p_-, p_+ are positive constants, u_- and u_+ are constants. A shock wave is called a 1-shock wave if

$$-\sqrt{(1+\frac{2}{\alpha+\alpha_f})\frac{p_-}{v_-}} > \sigma > -\sqrt{(1+\frac{2}{\alpha+\alpha_f})\frac{p_+}{v_+}}. \tag{1.9}$$

A shock wave is called a 3-shock wave if

$$\sqrt{(1+\frac{2}{\alpha+\alpha_f})\frac{p_-}{v_-}} > \sigma > \sqrt{(1+\frac{2}{\alpha+\alpha_f})\frac{p_+}{v_+}}. \tag{1.10}$$

In this paper, we consider a 3-shock wave, because a 1-shock wave can be handled by the same method. For a 3-shock wave, it follows from (1.8) and (1.10) that,

$$u_- < v_+, \quad u_- > u_+, \quad p_- > p_+. \tag{1.11}$$

A shock profile for the 3-shock wave $((v_-, u_-, p_-), (v_+, u_+, p_+), \sigma)$ is a traveling wave solution for system (1.6) of the form $(v, u, p, q)(\frac{x-\sigma t}{\tau})$ satisfying

$$(v, u, p, q)(\pm\infty) = (v_\pm, u_\pm, p_\pm, \frac{\alpha_f}{2}p_\pm v_\pm). \tag{1.12}$$

So we have

$$\begin{cases} -\sigma v' - u' = 0, \\ -\sigma u' + p' = 0, \\ -\sigma(\frac{\alpha}{2}pv + q + \frac{u^2}{2})' + (pu)' = 0, \\ -\sigma q' = -(q - \frac{\alpha_f}{2}pv), \end{cases} \tag{1.13}$$

where $' = \frac{d}{d\xi}$ and $\xi = \frac{x-\sigma t}{\tau}$.

In this paper, we are interested in the existence and properties of the shock profile. For general hyperbolic system with relaxation, the existence of the shock profile has been proved in [3] by using the center manifold method with the assumption that the shock strength is sufficiently small. In this paper, we find the sufficient and necessary condition, which is $\frac{p_-}{p_+} < 1 + \frac{2\alpha_f}{\alpha(1+\alpha+\alpha_f)}$, to ensure the existence of the shock profile. Moreover, we can calculate the shock profile solution in some explicit details. This is in sharp contrast to the abstract construction in [3]. Before we state our theorem, we introduce some notations. Let

$$\begin{cases} m = \sigma v_- + u_- = \sigma v_+ + u_+, \\ P = -\sigma u_- + p_- = -\sigma u_+ + p_+, \\ Q = -\sigma(\dfrac{\alpha+\alpha_f}{2} p_- \, v_- + \dfrac{u_-^2}{2}) + p_- \, u_- \\ \quad = -\sigma(\dfrac{\alpha+\alpha_f}{2} p_+ \, v_+ + \dfrac{u_+^2}{2}) + p_+ \, u_+, \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned} f(v) &= -\sigma^2(1+\alpha)v + (1+\frac{\alpha}{2})(\sigma^2 v_- + p_-) \\ &= -\sigma^2(1+\alpha)v + (1+\frac{\alpha}{2})(\sigma^2 v_+ + p_+). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Our theorem is the following:

Theorem 1 Suppose the two constant states (v_-, u_-, p_-), (v_+, u_+, p_+) and the speed σ satisfy the Rankine-Hugoniot conditions (1.8) and the Lax shock condition (1.10).

1) If

$$\frac{p_-}{p_+} < 1 + \frac{2\alpha_f}{\alpha(1+\alpha+\alpha_f)}, \tag{1.16}$$

then there exists a solution to the problem (1.13) and (1.12).

2) If

$$\frac{p_-}{p_+} \geqslant 1 + \frac{2\alpha_f}{\alpha(1+\alpha+\alpha_f)}, \tag{1.17}$$

the problem (1.13) and (1.12) does not admit a smooth solution.

3) In case 1), i. e., if (1.16) holds, the solution of the problem (1.13) and (1.12) satisfying $v(0) = v_0$ for some constant v_0 satisfying $v_- < v_0 < v_+$ is giving by

$$\begin{aligned} 2f(v_+)(\ln(v_+ - v) - \ln(v_+ - v_0)) - 2f(v_-)(\ln(v - v_-) - \ln(v_0 - v_-)) \\ = -\sigma\xi(1+\alpha+\alpha_f)(v_+ - v_-), \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$u(\xi) = m - \sigma v(\xi), \quad p(\xi) = m\sigma + P - \sigma^2 v(\xi) \tag{1.19}$$

for $-\infty < \xi < +\infty$. For this solution, we have

$$v'(\xi) > 0, \quad u'(\xi) < 0, \quad p'(\xi) < 0 \tag{1.20}$$

for $-\infty < \xi < +\infty$, and

$$C_1 \exp\Big(-\frac{1+\alpha+\alpha_f}{2f(v_+)}\sigma(v_+ - v_-)\xi\Big) \leqslant v_+ - v(\xi),$$

$$v'(\xi) \leqslant C_2 \exp\Big(-\frac{1+\alpha+\alpha_f}{2f(v_+)}\sigma(v_+ - v_-)\xi\Big) \tag{1.21}$$

for $\xi>0$,

$$C_3\exp\left(\frac{1+\alpha+\alpha_f}{2f(v_-)}\sigma(v_+-v_-)\xi\right)\leqslant v(\xi)-v_-,$$

$$v'(\xi)\leqslant C_4\exp\left(\frac{1+\alpha+\alpha_f}{2f(v_-)}\sigma(v_+-v_-)\xi\right) \tag{1.22}$$

for $\xi<0$, where $C_i(i=1,2,3,4)$ are some positive constants. For $u(\xi)$ and $p(\xi)$, we have the similar estimates.

2 Proof of Theorem 1

In this section, we give a proof of the Theorem 1.

We integrate (1.13) to get

$$\begin{cases}\sigma v+u=m,\\ -\sigma u+p=P,\\ -\sigma(\frac{\alpha}{2}pv+q+\frac{u^2}{2})+(pu)=Q,\end{cases} \tag{2.1}$$

where m, P and Q are given by (1.14). By the third equation of (2.1), we have

$$q=-\left(\frac{\alpha}{2}pv+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{pu-Q}{\sigma}, \tag{2.2}$$

Substituting (2.2) into the fourth equation of (1.13), using (2.1) and (2.2), we get

$$f(v)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\alpha+\alpha_f}{2}pv+\frac{u^2}{2}-\frac{pu-Q}{\sigma}\right), \tag{2.3}$$

where $f(v)$ is given by (1.15). So

$$f(v_-)=v_-\left(-\frac{\alpha}{2}\sigma^2+(1+\frac{\alpha}{2})\frac{p_-}{v_-}\right). \tag{2.4}$$

In view of (1.10), we have

$$-\frac{\alpha}{2}\sigma^2+(1+\frac{\alpha}{2})\frac{p_-}{v_-}>-\frac{\alpha}{2}(1+\frac{2}{\alpha+\alpha_f})\frac{p_-}{v_-}+(1+\frac{\alpha}{2})\frac{p_-}{v_-}$$

$$=(1-\frac{\alpha}{\alpha+\alpha_f})\frac{p_-}{v_-}>0. \tag{2.5}$$

Therefore

$$f(v_-)>0.$$