全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

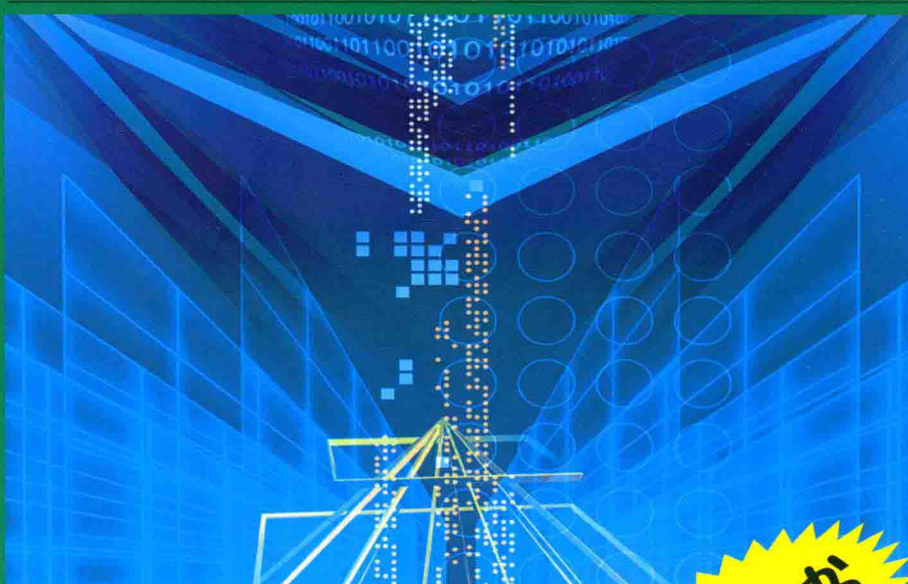
Б.П.吉米多维奇

高等数学习题
精选精解

（第2版）

主审 刘建亚 吴 臻
主编 张天德 蒋晓芸

GAODENGSHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE



畅销书

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

全国理科高等数学研究会推荐
高等数学同步辅导及考研复习用书

Б.П.

高等数学习题
精选精解

（第2版）

主　审　刘建亚　吴　臻
主　编　张天德　蒋晓芸
副主编　张德瑜　孙钦福

GAODENGSHUXUE XITI JINGXUAN JINGJIE

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

吉米多维奇高等数学习题精选精解/张天德,蒋晓芸主编.
—济南:山东科学技术出版社,2007(2015.重印)
(高等数学同步训练及考研辅导用书)
ISBN 978-7-5331-4779-2

Ⅰ.吉... Ⅱ.①张... ②蒋... Ⅲ.高等数学—高等学校
—教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 134932 号

Б.П.吉米多维奇
高等数学习题精选精解
(第二版)

主审 刘建亚 吴 臻
主编 张天德 蒋晓芸

主管单位:山东出版传媒股份有限公司
出 版 者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)82098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
发 行 者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路 16 号
邮编:250002 电话:(0531)82098071
印 刷 者:山东临沂新华印刷物流集团有限责任公司
地址:山东临沂高新技术产业开发区新华路
邮编:276017 电话:(0539)2925659

开本:720mm×1020mm 1/16
印张:31.25
版次:2010 年 10 月第 2 版 2015 年 12 月第 16 次印刷

ISBN 978-7-5331-4779-2
定价:39.80 元

出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇是前苏联有影响的教育家和数学家。他主编的《吉米多维奇数学分析习题集》(含 4462 道习题)和《工科用数学分析中的问题和练习》(含 3193 道习题),内容丰富,覆盖面广泛,针对性强,在我国有较大的影响,书中的许多习题,都广泛地被我国多种高等数学教材所采用,有些题目甚至出现在全国考研等试题中。

但是由于该书题量较大,部分习题难度大,全部用来练习耗时较多,为了让读者在一定的时间内达到较好的学习效果,提高学习效率,我们对原书进行了精选,选出了部分难度适中、有代表性且属于高等数学范畴的习题,做出了科学、规范的解答,有些还做了点评,指出了解决此类题目的思路和方法。有的题目给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

除此之外,作者还结合自己多年对考研试题的研究和多年辅导考研数学的经验,精心选择了少量近年国内研究生入学考试的典型试题,更好的体现了本书的编写宗旨。

本书共分十二章,每章又分若干节,在章节设置上和同济大学六版高等数学教材基本一致,涉及的内容涵盖了高等数学的全部主题。在本书中每章除最后一节外每节包括两大部分内容:

知识要点:简要对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行了系统梳理。

基本题型:对每节常见的基本题型进行了归纳总结,便于读者理解和掌握基本知识,有利于提高读者的解题能力和数学思维水平。

每章最后一节是综合提高题型,这一节的题目综合性较强,难度较大,有相当一部分是考研真题,通过本节的学习,可以提高读者的应变能力、思维能力和分析问题、解决问题的能力,把握重点、了解考研动向、开拓视野。

出版说明

CHUBANSHUOMING

本书由山东大学张天德教授、蒋晓芸教授主编。山东大学刘建亚教授、吴臻教授对全书作了仔细的校审，并对部分习题提出了更为精妙的解题思路。该书可以作为在读大学生同步学习的优秀辅导书，也可以作为广大教师的教学参考书，还可以为毕业生考研复习和众多成人学员自学提供富有成效的帮助。读者使用本书时，宜先独立求解，然后再与本书作比较，这样一定会获益匪浅，掌握较多的有用知识。

书中不当之处，恳请指正。

编　者

2007 年 7 月

再版前言

ZAIBANQIANYAN

2007 年我们编写了高等数学同步辅导及考研复习用书——Б. П. 吉米多维奇《高等数学习题精选精解》。此书出版后，得到了广大读者的喜爱，短短两年之内就重印了六次。为满足读者需要并适应考试要求，我们决定在第一版的基础上进行修订。修订中，我们保留了第一版的体系和风格，把原有的题目进行了部分调整和更换，并注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸收了国内外相关教材及各类考试中的一些优秀题目。

本次修订工作仍由山东大学张天德教授、蒋晓芸教授完成。山东大学刘建亚教授、吴臻教授对修改稿作了仔细的校审，并对修改框架提出具体建议。兄弟院校的同行，对此次修订也提出了不少宝贵的意见，我们在修订时都作了认真考虑。本次修订得到了泰山学堂的大力支持。泰山学堂师生对修订后的书稿进行了反复演算和校对，使本书内容更加完善。在此还要特别感谢清华大学胡金德教授、北京大学尤承业教授和北京航空航天大学徐兵教授。

限于编者水平，新版中存在的不足，欢迎广大专家、同行和读者批评指正。

编　者

2010 年 4 月

目 录

MULU

目 录

MULU

目 录
MULU

目录 MULU

第一章 极限与连续

§1. 函 数

1. 函数的概念 设有两个变量 x 与 y，如果变量 x 在其变化范围 D 内任取一个确定的数值时，变量 y 按照一定的规则 f 总有唯一确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域，f 表示由 x 确定 y 的对应规则.

2. 函数的主要性质

(1)有界性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在一个正常数 M，使得对于 x 在 D 上的任意取值，均有 $|f(x)|<M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界，否则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

(2)单调性 设函数 $f(x)$ 在某区间 D 上有定义，如果对于 D 上任意两点 x_1, x_2，且 $x_1<x_2$，均有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称函数 $f(x)$ 在 D 上单调增加（或单调减少）. 单调增加与单调减少函数统称为单调函数.

(3)奇偶性 设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 上有定义，如果对 D 上任意点 x，均有 $f(-x)=f(x)$（或 $f(-x)=-f(x)$），则称函数 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

(4)周期性 设函数 $f(x)$ 在集合 D 上有定义，如果存在正常数 T，使得对于 D 上任意 x，均有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，使上式成立的最小正数为周期函数的周期.

3. 基本初等函数与初等函数 常数函数 $y=c$（c 为常数），幂函数 $y=x^\alpha$（$\alpha\in R$），指数函数 $y=a^x$（$a\neq1, a>0$），对数函数 $y=\log_a x$（$a\neq1, a>0$），三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算或有限次复合，并由一个式子表示的函数称为初等函数.

基 本 题 型

求一元函数的定义域

【1】函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\arcsin\dfrac{x-1}{5}$ 的定义域为________.

解 要使函数有意义，变量 x 必须同时满足

$$\begin{cases}25-x^2>0\\ \left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant1\end{cases},\quad 即\quad \begin{cases}25-x^2>0\\ -1\leqslant\dfrac{x-1}{5}\leqslant1\end{cases}.$$

解得 $-4\leqslant x<5$，因此定义域为 $[-4,5)$.

故应填 $[-4,5)$.

【2】函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$ 的定义域为________.

(A)$x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq0$ (B)$x\in\mathbf{R}$,但 $1+\frac{1}{x}\neq0$

(C)$x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq0,-1,-\frac{1}{2}$ (D)$x\in\mathbf{R}$,但 $x\neq0,-1$

解 由 $x\neq0,1+\frac{1}{x}\neq0,1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\neq0$,得 $x\neq0,-1,-\frac{1}{2}$.

故应选(C).

【3】已知 $f(x)=\sin x,f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)$的定义域为________.

解 由 $\sin\varphi(x)=1-x^2$,所以 $\varphi(x)=\arcsin(1-x^2)$

从而 $-1\leqslant1-x^2\leqslant1$,所以 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

故应填 $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

【4】已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant0$,则 $\varphi(x)=$________,定义域为________.

解 因为 $f(x)=e^{x^2}$,所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$,而 $f[\varphi(x)]=1-x$,因此 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$.
对上式两端取对数,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.
由 $\ln(1-x)\geqslant0$,有 $1-x\geqslant1$,即 $x\leqslant0$.

故应填 $\sqrt{\ln(1-x)}$,$(-\infty,0]$.

【5】已知函数 $f(\log_a x)=\sqrt{x}$,则 $f(x)=$________,其定义域为________,其中 $a\neq1$,且 $a>0$.

解 令 $\log_a x=t$,则 $x=a^t$. 函数 $f(\log_a x)=\sqrt{x}$可化为 $f(t)=a^{\frac{t}{2}}$,从而 $f(x)=a^{\frac{x}{2}}$.
定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

故应填 $a^{\frac{x}{2}}$,$(-\infty,+\infty)$.

【6】设 $f(x)=\tan x,f[g(x)]=x^2-2$,且 $|g(x)|\leqslant\frac{\pi}{4}$,则 $g(x)$的定义域为________.

解 $f[g(x)]=\tan g(x)=x^2-2$,所以 $g(x)=\arctan(x^2-2)$.

因为 $|g(x)|\leqslant\frac{\pi}{4}$,所以 $-1\leqslant x^2-2\leqslant1$,因此 $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant-1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$.

故应填 $[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}]$.

求初等函数的表达式

【7】已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}$,求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2}{x^4+1}=\cfrac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\cfrac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$.

所以 $f(x)=\frac{1}{x^2-2}$,$x\neq\pm\sqrt{2}$.

【8】设 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$,求 $f(x)$.

解 令 $\frac{x+1}{x-1}=t$,则 $x=\frac{t+1}{t-1}$,

于是 $f(t)=3f\left(\frac{t+1}{t-1}\right)-\frac{2t+2}{t-1}=3[3f(t)-2t]-\frac{2t+2}{t-1}$,

整理得 $8f(t)=6t+2\frac{t+1}{t-1}$,

所以 $f(x)=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}\frac{x+1}{x-1}, x\neq 1$.

【9】设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, f_1(x)=f[f(x)], f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots,$

$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)](n=1,2,\cdots)$. 则 $f_n(x)=$________.

解 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$f_1(x)=f[f(x)]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_2(x)=f[f_1(x)]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

一般地,可用数学归纳法证明

$$f_n(x)=f[f_{n-1}(x)]=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

故应填 $\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}$.

【10】设 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$,求 $a_1+a_2+\cdots+a_7$.

解 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8=(2x-1)^8$,则

$f(0)=a_0=1, f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_8=1$.

比较两边 x^8 的系数 $a_8=2^8$.

故 $a_1+a_2+\cdots+a_7=1-a_0-a_8=-256$.

【11】设 $f(x)$满足 $f^2(\ln x)-2xf(\ln x)+x^2\ln x=0$,且 $f(0)=0$,求 $f(x)$.

解 令 $t=\ln x$,即 $x=e^t$,则有 $f^2(t)-2e^tf(t)+te^{2t}=0$,

由此可解得 $f(t)=e^t\pm\sqrt{e^{2t}-te^{2t}}=e^t(1\pm\sqrt{1-t})$.

因为 $f(0)=0$,由上式可得 $f(t)=e^t(1-\sqrt{1-t}), t\leqslant 1$.

即所求的函数为 $f(x)=e^x(1-\sqrt{1-x}), x\leqslant 1$.

求分段函数的表达式

【12】设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$,则 $f(-x)=$________.

(A) $f(-x)=\begin{cases}-e^{-x}, & x\leqslant 0\\ -\cos x, & x>0\end{cases}$ (B) $f(-x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-\cos x, & x<0\\ e^{-x}, & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $f(-x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ e^{x}, & x\geqslant 0\end{cases}$

解 当 $-x\leqslant 0$ 时, $f(-x)=e^{-(-x)}=e^x$;当 $-x>0$ 时, $f(-x)=\cos(-x)=\cos x$.

所以 $f(-x)=\begin{cases}\cos x, & x<0\\ e^x, & x\geqslant 0\end{cases}$

故应选(D)

【13】设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$，则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于

(A) 0　(B) 1　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

解　由 $f[f(x)]=1$ 得 $f\{f[f(x)]\}=1$.

故应选(B).

【14】设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0\\ x+2, & x>0\end{cases}$，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $g[f(x)]=$________

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　(D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

解　$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2+x, & x\geqslant 0\\ x^2+2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$.

故应选(D).

判断函数的奇偶性

【15】下列函数中非奇非偶的函数是________.

(A) $f(x)=3^x-3^{-x}$　(B) $f(x)=x(1-x)$

(C) $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$　(D) $f(x)=x^2\cos x$

解　易验证(A)为奇函数，(B)为非奇非偶函数，(C)为奇函数，(D)为偶函数.

故应选(B).

【16】设 $f(x)$ 为奇函数，判断下列函数的奇偶性：

(1) $xf(x)$　(2) $(x^2+1)f(x)$　(3) $|f(x)|$

(4) $-f(-x)$　(5) $f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$

解　(1)设 $F(x)=xf(x)$，则 $F(-x)=(-x)f(-x)=xf(x)=F(x)$，故 $xf(x)$ 为偶函数.

同理可得：(2) $(x^2+1)f(x)$ 为奇函数；　(3) $|f(x)|$ 为偶函数；

(4) $-f(-x)$ 为奇函数；　(5) $f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$ 为偶函数.

【17】判定函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

分析　判定一个函数的奇偶性，关键是确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系. 这样的问题通常分两步解决. 第一步是求出 $f(-x)$，第二步是确定 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

解　$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}$$

$$=\ln\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x).$$

所以函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

【18】设 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，且它们可以构成复合函数

$$f[f(x)],g[f(x)],f[g(x)],g[g(x)],$$

则其中为奇函数的是________.

(A) $f[f(x)]$　(B) $g[f(x)]$　(C) $f[g(x)]$　(D) $g[g(x)]$

解 由已知条件知 $f(-x)=-f(x)$，$g(-x)=g(x)$. 设 $F(x)=f[f(x)]$，则

$$F(-x)=f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)].$$

所以 $f[f(x)]$ 为奇函数.

故应选(A).

讨论函数的单调性

【19】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)(x\neq y)$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$，证明 $F(x)=f(x)+x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

证 任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_2>x_1$，

有 $\quad |f(x_2)-f(x_1)|<|x_2-x_1|=x_2-x_1$，

而 $\quad f(x_1)-f(x_2)\leqslant|f(x_2)-f(x_1)|<x_2-x_1$，

因而 $\quad f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$，

所以 $\quad F(x_1)<F(x_2)$，

即 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加.

【20】设 $f(x),g(x),h(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的单调增加函数，且 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，证明 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

证 因为 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单增，所以对任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$x_2>x_1$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，$g(x_1)\leqslant g(x_2)$，$h(x_1)\leqslant h(x_2)$.

又对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，所以

$$f[f(x)]\leqslant f[g(x)]\leqslant g[g(x)],$$

$$g[g(x)]\leqslant g[h(x)]\leqslant h[h(x)],$$

即 $f[f(x)]\leqslant g[g(x)]\leqslant h[h(x)]$.

一元函数周期性的讨论

【21】设 $[x]$ 是表示不超过 x 的最大整数，则 $y=x-[x]$ 是________.

(A)无界函数　(B)周期为 1 的周期函数　(C)单调函数　(D)偶函数

解 $y=x-[x]$ 的图象如图 21 所示.

故应选(B).

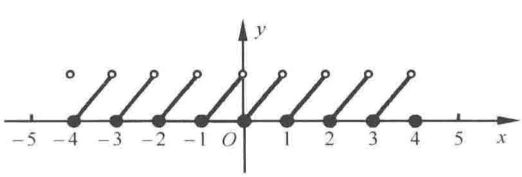


图 21

【22】设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $c\neq0$，使 $f(x+c)=-f(x)$. 证明 $f(x)$ 是周期函数.

证 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+c)=-f(x)$，所以

$$f(x+2c)=f[(x+c)+c]=-f(x+c)=f(x),$$

故 $f(x)$ 为周期函数.

求反函数

【23】函数 $y=\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$ 的反函数为________.

解 令 $t=\sqrt{1-x}$，则 $y=\dfrac{1+t}{1-t}$，所以 $t=\dfrac{y-1}{y+1}$，即 $\sqrt{1-x}=\dfrac{y-1}{y+1}$，从而

$$x=1-\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^2=\frac{4y}{(y+1)^2},$$

因此反函数为 $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$.

故应填 $y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$，$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

讨论一元函数的值域

【24】函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 的值域是________.

(A) $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ (B) $[0,1]$ (C) $[-1,0]$ (D) $[-1,1]$

解 因为 $|f(x)|=\left|\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{1+x^2}<\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$，所以 $-\dfrac{1}{2}<f(x)<\dfrac{1}{2}$.

故应选(A).

【25】函数 $y=\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是________.

(A) $[-1,1]$ (B) $\left[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (C) $[0,1]$ (D) $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

解 因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$，所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$，

因此 $-\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\dfrac{\pi}{4}$，从而 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\dfrac{\pi x}{2(1+x^2)}\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故应选(B).

【26】求 $y=f(x)=\begin{cases}3-x^3, & x<-2\\ 5-x, & -2\leqslant x\leqslant 2\\ 1-(x-2)^2, & x>2\end{cases}$ 的值域，并求它的反函数.

解 当 $x<-2$ 时，$y=3-x^3$，$x=\sqrt[3]{3-y}$，且 $y>3+8=11$；

当 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 时，$y=5-x$，$x=5-y$，且 $3\leqslant y\leqslant 7$；

当 $x>2$ 时，$y=1-(x-2)^2$，$x=2+\sqrt{1-y}$，且 $y<1$；

所以 $y=f(x)$ 的值域为 $(-\infty,1)\cup[3,7]\cup(11,+\infty)$.

$y=f(x)$ 的反函数为 $y=\begin{cases}2+\sqrt{1-x}, & x<1\\ 5-x, & 3\leqslant x\leqslant 7\\ \sqrt[3]{3-x}, & x>11\end{cases}$

§2. 数列的极限

1. 数列 一个定义在正整数集合上的函数 $a_n=f(n)$(称为整标函数),当自变量 n 按正整数 1,2,3,…依次增大的顺序取值时,函数按相应的顺序排成一串数:

$$f(1),f(2),f(3),\cdots,f(n),\cdots$$

称为一个无穷数列,简称数列.数列中的每一个数称为数列的项,$f(n)$称为数列的一般项或通项.

2. 数列极限的定义

(1)设$\{a_n\}$是一数列,如果存在常数 a,当 n 无限增大时,a_n 无限接近(或趋近)于 a,则称数列$\{a_n\}$收敛,a 称为数列$\{a_n\}$的极限,或称数列$\{a_n\}$收敛于 a,记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,或 $n\to\infty,a_n\to a$.当 $n\to\infty$时,若不存在这样的常数 a,则称数列$\{a_n\}$发散或不收敛,也可以说极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

(2)设$\{a_n\}$为一个数列,a 为一个常数.若对任意给定的 $\varepsilon>0$,都存在一个正整数 N,使得 $n>N$ 的一切 a_n 都满足不等式$|a_n-a|<\varepsilon$,则称 a 为数列$\{a_n\}$当 $n\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

3. 数列极限的性质

唯一性:收敛数列的极限是唯一的.

即若数列$\{a_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$,则 $a=b$.

有界性:假设数列$\{a_n\}$收敛,则数列$\{a_n\}$必有界,即存在常数 $M>0$,使得$|a_n|<M$(任意 $n\in N$).这个性质中的 M 显然不是唯一的,重要的是它的存在性.

保号性:假设数列$\{a_n\}$收敛,其极限为 a.

(1)若有正整数 N,使得当 $n>N$ 时 $a_n>0$(或<0),则 $a\geqslant 0$(或$\leqslant 0$).

(2)若 $a>0$(或<0),则有正整数 N,使得当 $n>N$ 时,$a_n>0$(或<0).

基 本 题 型

有关数列极限存在性的判定

【27】“对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列$\{a_n\}$收敛于 a 的________.

(A)充分条件但非必要条件　　(B)必要条件但非充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分条件又非必要条件

解 本题应选(C).

【28】 设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有________.

(A)$a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B)$b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C)极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D)极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

解 取 $a_n=\dfrac{2}{n}$,$b_n=1$,$c_n=\dfrac{n}{2}$,$(n=1,2,\cdots)$,则选项(A)、(B)、(C)均可排除.

对于选项(D),由$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$知$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_nc_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{c_n}=0$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n=\infty$.