GAODENGYUANXIAO TONGJIXUE JINGPINJIAOCAI

高等院校统计学精品教材

统计决策与贝叶斯分析

主　编 / 张　静

副主编 / 司颖华

王春宁

郭精军

中国统计出版社

China Statistics Press

GAODENGYUANXIAO TONGJIXUE JINGPINJIAOCAI

高等院校统计学精品

统计决策与贝叶斯分析

主　编 / 张　静
副主编 / 司颖华
王春宁
郭精军

中国统计出版社
China Statistics Press

图书在版编目(CIP)数据

统计决策及贝叶斯分析 / 张静等编著. —— 北京 ：
中国统计出版社，2016.6
ISBN 978－7－5037－7701－1
Ⅰ.①统… Ⅱ.①张… Ⅲ.①统计决策理论—贝叶斯决策 Ⅳ.①C8 ②O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 280104 号

统计决策及贝叶斯分析

作　　者/张　静　司颖华　王春宁　郭精军
责任编辑/徐　颖
封面设计/李雪燕
出版发行/中国统计出版社
通信地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号　邮政编号/1000
电　　话/邮购(010)63376909　书店(010)68783171
网　　址/http://www.zgtjcbs.cor
印　　刷/河北天普润印刷厂
经　　销/新华书店
开　　本/787×1092mm　1/16
字　　数/410 千字
印　　张/17.75
印　　数/1—1500 册
版　　别/2016 年 6 月第 1 版
版　　次/2016 年 6 月第 1 次印刷
定　　价/36.00 元

前言

随着瓦尔德(Wald,A.1902—1950)在战后提出统计决策(或判决)理论,如今统计决策理论已成了数理统计基础结构中的一个组成部分.它与贝叶斯统计并无逻辑上的包含或承前启后性质的关系.二者的联系,一方面在于贝叶斯决策是统计决策中的一个重要部分,另一方面在于贝叶斯方法在整个统计决策论中是一个重要工具.因此,贝叶斯统计与决策论的关系不管是在概念上还是数学上都非常密切,"以至于只学其中的一个而不学另一个,会觉得很不自然."(J.O.Berger,1985)本书试图从决策论的角度入手,对这两个主题进行讨论.

贝叶斯统计起源于英国学者 T.Bayes 于 1763 年(在他去世两年)发表的一篇论文.在此论文中他提出著名的贝叶斯公式和一种归纳推理方法.后世的学者把它发展为一种关于统计推断的系统的理论和方法,统称为贝叶斯统计.20 世纪 60 年代以来,在 Savage,L.J.、Jeffreys,H.、Good,I.J.、Lindley,D.V.、Berger,J.O.等贝叶斯学者的努力下,贝叶斯统计无论在观点、方法、理论及应用上都得到了不断的发展和完善,内容也愈来愈丰富.时至今日贝叶斯统计已成为统计学中一个不可缺少的部分,每个学习统计学的人,都应当对这个学派的观点和方法有所了解.

贝叶斯学派的观点在统计学界引起了热烈的争论,本书在介绍贝叶斯统计的基本内容时,对这些争论也将逐步涉及.

统计学家 Wald,A.提出的统计决策(或判决)理论通过引进"行动"的概念,以及因行动而承担后果——通过一个被称为损失函数的数量去表达,把统计学的任务由单纯的推断范围,推广到以追求更大的经济利益为目标的决策领域,从而使得统计学具有更大的应用意义.

作为一本介绍原理及应用的教材,本书主要对贝叶斯统计和

决策论的基本论点、原理及其应用进行了讨论，在以贝叶斯决策为中心线的同时分别对贝叶斯统计推断及非贝叶斯决策作了较为详细介绍.另外，考虑到目前贝叶斯方面教材中，介绍软件使用的书籍非常稀缺，本书在最后一章加入了 WinBUGS 软件的介绍.

本书适用于全国高等学校统计专业本科三、四年级以上学生及相关研究人员学习，相当于一学期的内容.学习本书的内容只需要概率统计基本知识就够了.

本书内容的具体安排是，先介绍决策论的基本概念(第一、二章)，然后讨论了贝叶斯统计推断的内容，并在此基础上详细介绍了贝叶斯决策的方法(第三、四章)，接下来对一般的统计决策的方法(主要是经典决策方法)进行了介绍(第五章)，同时作为应用，简单讨论了贝叶斯计量经济模型(第六章)，关于贝叶斯软件 WinBUGS 的使用我们放在了理论内容叙述之后作了详细介绍(第七章).标题前加“*”的章节表示选学内容.

本书由兰州财经大学统计学院教师张静主编，负责全书的框架设计、大纲编写和书稿审定。参加编写的人员有兰州财经大学统计学院的张静、王春宁、司颖华、郭精军.具体分工如下：第一章、第四章、第五章的第三节、第四节、第五节及附录由张静编写；第二、三章由王春宁编写；第五章由郭精军编写；第六、七章由司颖华编写.

在本书的编写过程中，兰州财经大学统计学院庞智强教授、王永瑜教授、郭海明教授给予了大力支持，统计学院所有教师均对本书的内容提出了许多宝贵的修改意见.同时，编者参考和引用了国内外专家学者的有关著作，也参考了一些网络资源提供的内容，恕不一一指出，在此向有关作者表示衷心感谢!

由于编者学识水平及教学经验有限，书中不妥或错漏之处在所难免，恳请专家及读者给予批评指正.

编　者

2016 年 2 月

目　录

第 1 章　导论

在一个不确定的环境中，管理者所面临的最基本和最重要的任务就是进行决策.例如，当产品的未来需求不确定的时候，厂长必须决定投资于新设备需要多少资金；当客户对不同营销策略的反映不确定的时候，营销者必须从众多不同营销策略中制定适合新产品的决策；投资者在面临不确定的经济与政治环境时，必须决定是否进行一项新的投资冒险.

统计决策论就是运用统计知识来认识和处理决策问题中的不确定性，从而做出决策.广义的统计决策论包括经典决策论(频率派的)和贝叶斯决策论.统计决策论和贝叶斯分析在很多方面是有着密切的联系的，如 O.Berger 所说："一是它们都有要利用非实验信息源的共同目标；另一方面是深层次理论把它们联结在了一起."

本节将给出统计决策论中各种决策的基本概念、基本理论和基本方法.

§1.1　基本概念

1.1.1　决策问题

决策就是对一件事要作决定.决策所要解决的问题是多种多样的，因而决策过程、思维方式、运用技术也各不相同.下面给出几个决策的例子.

【例 1.1.1】 某农作物有两个品种：产量高但抗旱能力弱的品种 a_1 和抗旱能力强但产量低的品种 a_2，农民应该播散哪个品种可使每亩平均收益最大呢？在这里一方是人，人是有理智的，他手中有二张牌：a_1 和 a_2. 人手中的牌今后称为**行动**.另一方是自然界，它手中的牌是明年的雨量 θ，可能有很多张牌，为简单起见，以明年 600mm 雨量为界来区分雨量充足 θ_1 和雨量不充足 θ_2，这样自然界也有二张牌：θ_1 和 θ_2. 由于自然界是无理智的，它的牌今后称为**状态**或**参数**.在这样的格局里，能做决策的仅仅是人，并且人根据以往的经验可以写出各种状态下每亩**收益**(单位：元)：

	a_1	a_2
θ_1	1000	200
θ_2	-200	400

即采取行动 a_1，若 θ_1 发生则每亩地有 1000 元的收益，若 θ_2 发生每亩地亏损 200 元；采取行动 a_2 的话，若 θ_1 发生每亩地有 200 元的收益，若 θ_2 发生每亩地有 400 元的收益.农民可依据这个收益矩阵及未来降雨量的信息来决定播散哪种品种的种子.

【例 1.1.2】 一位投资者有一笔资金要投资.有如下几个投资方向供他选择：

a_1:购买股票,根据市场情况,可净赚 5000 元,但也可能亏损 10000 元.

a_2:存入银行,不管市场情况如何总可以净赚 1000 元.

这位投资者在与金融市场博弈.未来金融市场也有二种情况:看涨(θ_1)与看跌(θ_2).根据上述情况,可写出投资者的收益矩阵:

	a_1	a_2
θ_1	5000	1000
θ_2	−10000	1000

投资者将依据此收益矩阵决定他的资金投向.

决策问题的这种提法,使统计与**博弈论**发生了联系,实际上,我们把这种人与自然界(或社会)的博弈问题称为**决策问题**.大自然作为博弈的一方,她掌握了 θ 的秘密;人类为另一方,他力求所采取的行动能获得尽可能大的利益(损失是利益的反面,因此,也可以用"**损失函数**"代替"**收益函数**",决策可由"使利益最大"改为"使损失最小").不同之处在于:大自然不是一个自觉的行动者,不能说大自然的目标是使统计学家的损失尽可能大.

【例 1.1.3】 某商店每日从工厂进货一批,计 N 件.商店从该批产品中抽取 n 件检验,根据这 n 件产品中的废品数 X,决定是否接受该批产品.若接受(行动 a_1),则每件废品商店损失 10 元.若不接受(行动 a_2),则该商店当日无货出售,每件损失利润 2 元,若已知废品率 θ,则该批中有废品 $N\theta$ 件,商店接受这些废品造成损失 $10N\theta$. 若不接受,则放弃了该批中的 $N(1-\theta)$ 件合格品,损失利润 $2N(1-\theta)$. 由此得到本问题的损失函数为

$$L(\theta,a)=\begin{cases}10N\theta, & a=a_1\\ 2N(1-\theta), & a=a_2\end{cases}$$

该决策问题的行动为 $\mathscr{A}=\{a_1,a_2\}$,状态为 $\Theta=\{0\leqslant\theta\leqslant 1\}$ 状态是无数个.又假设检验为非破坏性的,$n/N\approx 0$,因而可以认为 $X\sim b(n,\theta)$. 参数 $0\leqslant\theta\leqslant 1$,且根据以往的经验和有关资料认为该工厂产品的废品率 θ 发生的概率不会超过 0.1. 因而可以给一个 0 到 0.1 上的均匀分布 $U(0,0.1)$ 为 θ 的**先验分布 $\pi(\theta)$** (先验分布和后验分布的概念在 1.1.3 中具体给出),这种将 θ 先验分布和**后验分布**参与到决策中的问题称为**贝叶斯决策**.本例还涉及的**决策函数**也将在 1.1.3 中给出.

【例 1.1.4】 某制药厂试制成一种新的止痛剂.为了决定此新药是否投放市场,投放多少,价格如何等问题,需要了解此种新的止痛剂在止痛剂市场中占有率 θ 是多少? 在这个经营决策问题中是对占有率 θ 进行估计,故行动和状态都为 0 到 1 上的区间,即 $\mathscr{A}=[0,1]$,$\Theta=[0,1]$. 过高估计和过低估计都会给经营者带来损失,但认为过高估计比过低估计的损失高一倍.即损失为

$$L(\theta,a)=\begin{cases}\theta-a, & a\leqslant\theta\leqslant 1\\ 2(a-\theta), & 0\leqslant\theta<a\end{cases}$$

1.1.2 决策的三要素

从上述例子可以看出,构成一个决策问题必有如下三个基本要素.

一、状态集 $\Theta=\{\theta\}$

其中每个元素 θ 表示自然界(或社会)可能出现的一种状态,所有可能状态的全体组成**状态集**.

状态集 Θ 可以只含有限个状态,也可以含有无穷个状态.

在例 1.1.1 中,状态集是由两个状态组成,$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$,其中 θ_1 和 θ_2 分别表示雨水充足和雨水不充足.在例 1.1.2 中,状态集也是由两个状态组成,$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$,其中 θ_1 和 θ_2 分别表示股票市场的行情是看涨还是看跌.而在例 1.1.3 和例 1.1.4 中,状态集由 0 到 1 间无数个实数组成,$\Theta=\{0\leqslant\theta\leqslant 1\}$.

在实际中常会遇到这样的决策问题,其自然界(或社会)所处的状态可用一个实数表示,这样的状态又称为**状态参数**,简称**参数**.其状态集 Θ 常由一些实数组成,这样的状态集又称为**参数空间**.常见的参数空间是一个区间 (a,b),这里 a,b 可以是两个实数.但也可以是 $a=-\infty$, $b=+\infty$..

二、行动集 $\mathscr{A}=\{a\}$

其中每个元素 a 表示人对自然界(或社会)可能采取的一个行动,所有此种行动的全部就是**行动集**.

在例 1.1.1 中,农民可以采取两个行动,一个是播种产量高但抗旱能力弱的种子(a_1),一个是播种抗旱能力强但产量低的种子(a_2),所以农民的行动集是由两个行动组成,$\mathscr{A}=\{a_1,a_2\}$.类似的,在例 1.1.2 中,投资者的行动集也是由两个行动组成.在例 1.1.3 中行动集是由接受(a_1)和不接受(a_2)组成,即 $\mathscr{A}=\{a_1,a_2\}$.在例 1.1.4 中行动是由无数个实数组成,即 $\mathscr{A}=[0,1]$.

一般行动集至少含有两个行动,供人们决策之用.假如行动集中只有一个行动,那人们就不需要选择.假如有两个行动 a_1 和 a_2,无论对自然界(或社会)的哪一个状态出现,a_1 总比 a_2 收益高,那么 a_2 就没有存在的必要,故要把这种行动从行动集中除去,使留在行动集中的行动总有"可取之处".

三、**收益函数** $Q(\theta,a)$ **或损失函数** $L(\theta,a)$

其中 θ 可以是状态集 Θ 中任一个状态,a 可以是行动集 $\mathscr{A}$ 中任一个行动,函数值 $Q(\theta_i,a_j)=Q_{ij}$(或 $L(\theta_i,a_j)=L_{ij}$)表示当自然界(或社会)处于状态 θ_i,而人们选取行动 a_j 时所得到(经济上)的收益(或损失)大小.

收益函数(或损失函数)与决策密切相关.在许多实际问题中,收益的计算可能不如上述例子中那么简单.事实上,怎样去确定收益函数,使之与实际情况符合,在应用上是一件很重要且困难的事,需要做必要的调查研究工作.

评价决策者所取行动优劣的收益函数,其值可正可负,正值表示盈利,负值表示亏损,收益函数的单位常用货币单位,但有时也用其他容易比较好坏的单位,如产量、销售量等.它是把决策与经济效益联系在一起的桥梁.但此种桥梁不仅限于收益函数,实际中还可以用损失函数、成本函数、支付函数等代替.有关损失函数更详细的内容我们将在第二章中给出.

当状态集和行动集都仅含有限个元素时,如 $\Theta=\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n\}$,$\mathscr{A}=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$,收益函数也只取 nm 个值,这 nm 个值可以有规律地排成一个矩阵.

$$
\begin{array}{c@{}c@{}l}
 & \begin{matrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{matrix} & \\
Q= & \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1m} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nm} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{matrix}
\end{array}
$$

这个矩阵称为收益矩阵，它是行动与状态有限时的收益函数的一种特殊形式.

故状态集 $\Theta=\{\theta\}$、行动集 $\mathscr{A}=\{a\}$、收益函数 $Q(\theta,a)$ 是构造一个决策问题必不可少的三个要素.

但仅从这三个要素很难找到一个较理想的决策方法.这里的关键是缺少对自然界 θ（或社会）的更深入的了解.

如例 1.1.1 某农作物有两个品种：产量高但抗旱能力弱的品种 a_1 和抗旱能力强但产量低的品种 a_2，农民应该播散哪个品种可使每亩平均收益最大呢？影响这一决定的主要因素是明年的雨量 θ，θ 通常是未知的.又如：一个医药公司要决定是否将一种新的止痛药投放市场.影响这一决定的有许多因素，其中有两个是这样的：一个是在服此药的人中将证明此药有效的人所占的比例（θ_1）；另一个是在市场占领中此药会占的比例（θ_2）.虽然用具有代表性的实验可以得到有关它们的统计信息，但 θ_1 和 θ_2 通常是未知的.这个问题就是决策论的问题之一，它的最终目的是决定：是否将此药投放市场；投放多少；价格如何等.

1.1.3 两种信息

由于自然界 θ（或社会）未来是不确定的，导致了决策的风险性.统计决策论是运用统计知识来认识和处理决策问题中的这些不确定性，从而做出决策.为此人们想方设法从自然界或社会中挖掘各种有用的信息，以获得对状态集 $\Theta=\{\theta\}$ 更多的认识，从而提高人们的决策水平.为对未知量 θ 做出正确判断，常用的信息有以下几种：

一、抽样信息

抽样信息即总体信息和样本信息.在实际问题中，为对状态 θ 有更多了解，常常把 θ 放到有关的环境去观察、或去试验或去抽样，使之为某一可观察随机变量 X（或试验数据）概率分布 $p(x\mid\theta)$ 中的参数，并从获得的样本中去了解当今状态 θ 的最新信息.设观察随机变量 X 的密度函数为 $p(x\mid\theta)$，假如对 X 作 n 次观察或 n 次实验，所得样本 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可看作是从分布 $p(x\mid\theta)$ 随机抽取得一个样本.这时的样本联合密度函数（即似然函数）

$$p(\boldsymbol{x}\mid\theta)=\prod_{i}^{n}p(x_i\mid\theta)$$

概括了抽样信息中一切有关 θ 的信息.

例如，在决定某一产品的生产规模时，过去一段时间内该产品的销售记录是依据之一，而这种记录是受到随机性影响的.即样本 X 有规律分布 $p(\boldsymbol{x}\mid\theta)$，其依赖于某个参数 θ，θ 取值于参数空间 Θ.一旦参数 θ 确定了，就能明确应该采取的行动；又如，在例 1.1.3 中商店从该批产品中抽取 n 件检验，根据这 n 件产品中的废品数 X，决定是否接受该批

产品.假设检验为非破坏性的，$n/N \approx 0$，因而可以认为 $X \sim b(n,\theta)$，此分布包含了 θ 所有试验信息；而在例 1.1.4 中，为慎重起见，在正式生产之前，厂长决定小规模试制一批新的止痛剂投放到一个地区.并从经销商处得知，在 n 个买止痛剂的顾客中有 X 人买了新止痛剂.这时 $X \sim b(n,\theta)$. 在进行统计决策(即经典决策)时只使用抽样信息.

二、先验信息

前面我们说过，为消除决策的不确定性，需挖掘 θ 的各种有用的信息以便得到 θ 更准确的值，除了要用到前面所说的**抽样信息**，还常常用到**先验信息**.先验信息是在实验或抽样前就有的关于 θ 信息但并非来自统计调查，是人们在过去对自然界(或社会)各种状态发生可能性的认识.先验信息在日常生活和工作中也经常可见，不少人在自觉地或不自觉地使用它.L.J.Savage(1961)提出了一个令人信服的例子，说明先验信息有时是很重要的.例中有三个实验：

(1)一位常饮牛奶加茶的妇女声称，她能区别出是牛奶还是茶先被倒进杯子里的.对她进行了 10 次这样的实验，结果她都说对了.

(2)一位音乐专家说，他可以由海顿或莫扎特的一页乐谱看出作者是海顿还是莫扎特.做了 10 次实验，每次他都正确.

(3)一个喝醉了的朋友说，他可以预知投掷一个质地均匀的硬币哪一面朝上，在 10 次检验他的实验中，他每次都正确.

在以上三种情况中，未知量 θ 皆为回答正确的概率.在对他们做经典的显著性检验中，原假设 H_0 为 $\theta = 0.5$(即他们是猜的).以上三种情况皆以 2^{-10} 的(单侧)显著水平拒绝原假设.由此看来，以上实验说明他们具有他们所宣称的能力的证据是很充分的.

对情况 2，我们没有理由怀疑这个结论(这结果与我们的先验信念完全一致).而在情况 3 中，我们的先验看法是，他的预知是不可能的(除非他有特异功能)，这使我们忽略实验结果，把他的成功值看作他一次次侥幸走运.对情况 1 就很难说清楚了，不同的人对那位妇女所声称具有的能力有不同的先验信念，从而就会得出不同的结论.在以上三种从统计上看完全相同的情况中，很清楚，先验信息是不能被忽略的.把先验信息加入到推断中，就称为**贝叶斯推断**，决策中加入先验信息称为**贝叶斯决策**.统称为**贝叶斯分析**.

贝叶斯学派的最基本的观点是：任一个未知量 θ 都可以看作一个随机变量，应用一个概率分布去描述对 θ 的未知状况.这个概率分布是在抽样前就有的关于 θ 的先验信息的概率陈述.这个概率分布被称为**先验分布**.因为任一未知量都有不确定性，而在表述不确定性程度时，概率和概率分布是最好的语言.

【例 1.1.5】 某地区煤的储存量 θ 在几百年内不会有多大变化，可看作是一个常量，但对人们来说，它是未知的、不确定的量.有位专家研究了有关资料，结合他的经验认为：该地区煤的储存量 θ“大概有 5 亿吨左右”.若把“左右”理解为 4 到 6 亿吨之内，把“大概”理解为 80%的把握，还有 20%的可能性在此区间之外(见图 1.1.1).这无形中就是用一个概率分布(这一分布的确定是用主观概率)去描述未知量 θ，而具有概率分布的量当然是随机变量.

这里有二个问题需要进一步讨论.第一，按图 1.1.1 所示的概率分布我们可谈论未知量 θ 位于某个区间的概率.比如，θ 位于 4 到 6 亿吨的概率为 0.8，即

$$P(4 \leqslant \theta \leqslant 6) = 0.80$$

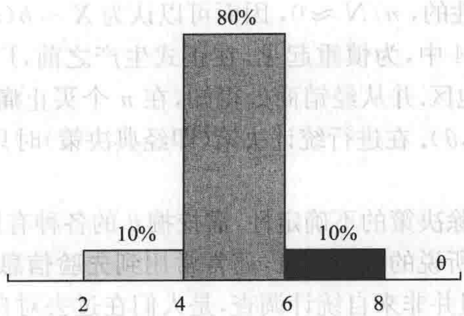

图 1.1.1 某地区煤储存量的先验分布

可这个概率陈述在经典统计中是不允许的，因为经典统计认为θ是常量，它要么在4到6之间(概率为1)，要么在这个区间之外(概率为零)，不应有0.8的概率.可在实际中类似的说法经常可以听到.如："某逃犯的年龄大约35岁左右""明日降水概率为0.85""某学生能考上大学的概率为0.95""这场足球赛甲队能胜的概率为0.6".这样的概率陈述能为大多数人理解、接受和采用.这种合理陈述的基础就是把未知量看作是随机变量.

第二，图1.1.1中的概率0.8不是在大量重复实验中获得的，而是专家根据经验和知识的积累对该事件发生的可能性所给出的信念，这样给出的概率在贝叶斯统计中是允许的，并称为**主观概率**.

【例1.1.6】 在例1.1.4中假如厂长对新止痛剂在市场占有率θ无任何先验信息，故采用(0,1)上的均匀分布作为θ的先验分布.即$\pi(\theta)\sim U(0,1)$，这种加入了先验信息的决策问题称为贝叶斯决策.

【例1.1.7】 一个投资者必须决定是否购买颇具风险的ZZZ债券.如买，到期兑现可能净赚500美元，但也可能失败而损失掉所投资的1000美元.如果投资者把钱投到一个"安全的"项目中去，经同样的时间，他将稳赚300美元.投资者估计债券失败的概率为0.1.

这里，$\mathscr{A}=\{a_1,a_2\}$，其中a_1表示买债券，a_2表示不买.$\Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$，其中$\theta_1$表示"没失败"的原始状态，$\theta_2$为"失败"的状态.故收益函数如下(单位：美元)：

	a_1	a_2
θ_1	500	300
θ_2	-1000	300

先验信息可写为$\pi(\theta_1)=0.9$，$\pi(\theta_2)=0.1$。

此例中没有有关的统计实验得出的样本信息，这样的问题被称为无数据问题.对上述信息的使用情况，形成不同的决策问题.

(1)仅使用先验信息的决策问题称为**无数据(或无样本信息)的决策问题**.

(2)仅使用抽样信息的决策问题称为**统计决策问题**.

(3)先验信息和抽样信息都用的决策问题称为**贝叶斯决策问题**.

在很多书中又把(1)、(3)统称为贝叶斯决策.即只要用到先验信息的决策问题就称为贝叶斯决策.

1.1.4 贝叶斯公式

在许多决策问题中，为方便决策，常常需给状态集一个先验概率分布.而先验分布毕竟是抽样前人们对 θ 的认识，若仅仅使用先验分布进行决策，会冒很大风险.为使决策者做出更加合理的决策，需对状态集的概率分布做进一步调整，方法就是通过抽样或实验获得样本信息，然后结合 θ 的先验信息，并利用贝叶斯公式得到 θ 的后验分布.然后依据后验分布进行决策.

一、贝叶斯公式

贝叶斯公式的事件形式在初等概率中都有叙述，这里给出随机变量密度函数形式的贝叶斯公式.

(1)依赖于参数 θ 的密度函数在经典统计中记为 $p(x;\theta)$ 或 $p_\theta(x)$，它表示在参数空间 $\Theta=\{\theta\}$ 中不同的 θ 对应不同的分布.可在贝叶斯统计中记为 $p(x\mid\theta)$，它表示在随机变量 θ 给定某个值时，总体 X 的条件分布.

(2)根据参数 θ 的先验信息确定先验分布 $\pi(\theta)$.

(3)从贝叶斯观点看，样本 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$的产生要分二步：首先设想从先验分布 $\pi(\theta)$ 产生一个样本 θ'，第二步从总体分布 $p(x\mid\theta')$ 产生一个样本 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，此时样本 $\boldsymbol{x}$ 发生的概率是与如下联合密度函数成正比：

$$p(\boldsymbol{x}\mid\theta')=\prod_{i=1}^{n}p(x_i\mid\theta') \tag{1.1.1}$$

(4)样本 $\boldsymbol{x}$ 和参数 θ 的联合分布为

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=p(\boldsymbol{x}\mid\theta)\pi(\theta) \tag{1.1.2}$$

把三种可用的信息都综合进去了.

(5)我们的任务是对未知参数 θ 作出统计推断.没有样本信息时，人们只能根据先验分布对 θ 作出推断.在有了样本观测值 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$后，应依据 $h(\boldsymbol{x},\theta)$对 θ 作出推断.为此需把 $h(\boldsymbol{x},\theta)$作如下分解：

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})m(\boldsymbol{x}) \tag{1.1.3}$$

其中 $m(\boldsymbol{x})$是 $\boldsymbol{x}$ 的边缘密度函数

$$m(\boldsymbol{x})=\int_\Theta h(\boldsymbol{x},\theta)d\theta=\int_\Theta p(\boldsymbol{x}\mid\theta)\pi(\theta)d\theta \tag{1.1.4}$$

它与 θ 无关，或者说，$m(\boldsymbol{x})$ 中不含 θ 的任何信息.因此能用来对 θ 作出推断的仅是条件分布 $\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})$，它的计算公式为

$$\begin{aligned}\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})&=h(\boldsymbol{x},\theta)/m(\boldsymbol{x})\\&=p(\boldsymbol{x}\mid\theta)\pi(\theta)\Big/\int_\Theta p(\boldsymbol{x}\mid\theta)\pi(\theta)d\theta\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

这就是贝叶斯公式的密度函数形式.这个在样本 $\boldsymbol{x}$ 给定下，θ 的条件分布被称为θ 的后验分布.它是集中了总体、样本和先验等三种信息中有关θ 的一切信息，而又排除一切与 θ 无关的信息之后所得的结果.故基于后验分布 $\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})$对 θ 进行的统计推断是更为有效

合理的.

(6)在 θ 是离散随机变量时,先验分布可用先验分布列 $\pi(\theta_i)(i=1,2,\cdots)$表示,此时后验分布也是离散形式.

$$\pi(\theta_i \mid \boldsymbol{x})=p(\boldsymbol{x} \mid \theta_i)\pi(\theta_i)/\sum_j p(\boldsymbol{x} \mid \theta_j)\pi(\theta_j), \quad i=1,2,\cdots \tag{1.1.7}$$

假如总体 X 也是离散的,只要把后验分布公式中的 $p(\boldsymbol{x}|\theta)$看作为概率函数 $p(X=\boldsymbol{x} \mid \theta)$即可.

二、后验分布

先验分布 $\pi(\theta)$ 是反映人们在抽样前对 θ 的认识,后验分布 $\pi(\theta \mid \boldsymbol{x})$是反映人们在抽样后对 θ 的认识.之间的差异是由于样本 $\boldsymbol{x}$ 出现后人们对 θ 认识的一种调整.

【例 1.1.8】 设事件 A 的概率为θ,即$\pi(A)=\theta$,为估计θ 作n 次独立观察,其中事件 A 出现次数为 X,显然 X 服从二项分布 $b(n,\theta)$,即

$$p(X=x \mid \theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, \quad x=0,1,\cdots,n$$

此为似然函数.假如在实验前我们对事件 A 没什么了解,故对其发生的概率 θ 也说不出是大是小.此时,贝叶斯建议用(0,1)上的均匀分布 $U(0,1)$ 作为 θ 的先验分布.因为它在(0,1)上每一点都是机会均等,没有偏爱.贝叶斯的这个建议被后人称为贝叶斯假设.这时 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=\begin{cases}1, & 0<\theta<1\\ 0, & \text{其他场合}\end{cases}$$

为了综合抽样信息和先验信息,可利用贝叶斯公式,为此先计算样本 X 与参数θ 的联合分布:

$$h(x,\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x} \quad (x=0,1\cdots,n;0<\theta<1)$$

计算 x 的边缘分布

$$\begin{aligned}m(x)&=\int_0^1 h(x,\theta)d\theta=\binom{n}{x}\int_0^1\theta^x(1-\theta)^{n-x}d\theta\\&=\binom{n}{x}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}{\Gamma(n+2)}=\frac{1}{n+1}, \quad x=0,1,\cdots,n\end{aligned}$$

可得 θ 的后验分布:

$$\pi(\theta \mid x)=\frac{h(x,\theta)}{m(x)}=\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)}\theta^{(x+1)-1}(1-\theta)^{(n-x+1)-1}, \quad 0<\theta<1$$

这个分布就是参数为 $x+1$ 和 $n-x+1$ 的贝塔分布 $\mathrm{Be}(x+1,n-x+1)$.

【例 1.1.9】 设 $x_1,\cdots,x_n$ 来自正态分布$N(\theta,\sigma^2)$的一个样本观察值.其中σ^2已知,正态均值 θ 的先验分布为正态分布$\pi(\theta)\sim N(\mu,\tau^2)$.则此样本的似然函数为

$$p(\boldsymbol{x}|\theta)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\sum_{i=1}^{n}(x_{i}-\theta)^{2}\right\},\quad -\infty<x_{1},\cdots,x_{n}<+\infty$$

而 $$\pi(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\exp\left\{-\frac{(\theta-\mu)^{2}}{2\tau^{2}}\right\},\quad -\infty<\theta<+\infty$$

在 μ 与 σ^2 已知的情况下，由此可以写出样本 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 与参数 θ 的联合密度函数：

$$h(\boldsymbol{x},\theta)=k_{1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{n\theta^{2}-2n\theta\bar{x}+\sum_{i=1}^{n}x_{i}^{2}}{\sigma^{2}}+\frac{\theta^{2}-2\mu\theta+\mu^{2}}{\tau^{2}}\right]\right\}$$

其中，$k_1=(2\pi)^{-(n+1)/2}\tau^{-1}\sigma^{-n}$，$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$. 若再记

$$\sigma_0^2=\frac{\sigma^2}{n},\quad A=\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{\tau^2},\quad B=\frac{\bar{x}}{\sigma_0^2}+\frac{\mu}{\tau^2},\quad C=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{\mu^2}{\tau^2}$$

则有

$$\begin{aligned}h(\boldsymbol{x},\theta)&=k_{1}\exp\left\{-\frac{1}{2}[A\theta^{2}-2B\theta+C]\right\}\\&=k_{2}\exp\left\{-\frac{(\theta-B/A)^{2}}{2/A}\right\}\end{aligned}$$

其中，$k_2=k_1\exp\{-\frac{1}{2}(C-B^2/A)\}$. 由此容易算得样本 $\boldsymbol{x}$ 的边缘分布：

$$m(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}h(\boldsymbol{x},\theta)\mathrm{d}\theta=k_{2}\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{\frac{1}{2}}$$

上面两式相除，即得 θ 的后验分布：

$$\pi(\theta\mid\boldsymbol{x})=\left(\frac{2\pi}{A}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{(\theta-B/A)^{2}}{2/A}\right\}$$

后验分布是正态分布.其均值为

$$\mu_{1}=B/A=\frac{\sigma_{0}^{-2}}{\sigma_{0}^{-2}+\tau^{-2}}\bar{x}+\frac{\tau^{-2}}{\sigma_{0}^{-2}+\tau^{-2}}\mu$$

方差为 $$\tau_{1}^{2}=A^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{\sigma_{0}^{2}}+\frac{1}{\tau^{2}}}$$

§1.2 期望损失、决策函数及风险函数

正如前面所说，在做决策中包含有不确定因素，因而实际上所承受的损失 $L(\theta,a)$（在做决策时）总是不能确切知道的.面对这种不确定性，一个自然的方法是考虑决策的“期望”损失，然后，选一个对这个期望损失来说是“最优的”决策.本节介绍几种期望损失

的标准类型.

1.2.1 贝叶斯期望损失

一、先验期望损失

期望损失应包含不确定性的量 θ，因为它正是在做决策时所未知的量.我们已经提到过，可以把 θ 看作具有一个概率分布的随机变量，那么可以对此分布求期望.

定义 1.2.1 在做决策时，若 $\pi(\theta)$ 为 θ 的先验概率分布，则行动 a 的**先验期望损失**为

$$\rho(\pi,a)=E^{\pi}L(\theta,a)=\begin{cases}\sum\limits_i L(\theta_i,a)\pi(\theta_i), & \theta \text{ 为离散型}\\ \int_{\Theta} L(\theta,a)\pi(\theta)d\theta, & \theta \text{ 为连续型}\end{cases} \tag{1.2.1}$$

【例 1.2.1】(例 1.1.4 续) 假如过去类似的新药介绍到市场的情形给 θ 提供了大量的先验信息.比如说，过去类似新药市场占有率为 1/10 到 1/5，而且在 1/10 到 1/5 之间的任何值是等可能的.那么，这个先验信息可被模型化为 θ 的先验密度为 $U(0.1,0.2)$，即

$$\pi(\theta)=10I_{(0.1,0.2)}(\theta)$$

则

$$\begin{aligned}\rho(\pi,a)&=\int_0^1 L(\theta,a)\pi(\theta)d\theta=\int_0^a 2(a-\theta)10I_{(0.1,0.2)}(\theta)d\theta+\int_a^1(\theta-a)10I_{(0.1,0.2)}(\theta)d\theta\\ &=\begin{cases}0.15-a, & \text{当 } a\leqslant 0.1\\ 15a^2-4a+0.3, & \text{当 } 0.1\leqslant a\leqslant 0.2\\ 2a-0.3, & \text{当 } a\geqslant 0.2\end{cases}\end{aligned}$$

【例 1.2.2】(例 1.1.7 续) 假如将该决策收益函数换算为如下损失函数(单位:美元)：

	a_1	a_2
θ_1	0	200
θ_2	1300	0

则行动 a_1 和行动 a_2 的期望损失如下：

$$\begin{aligned}\rho(\pi,a_1)&=E^{\pi}L(\theta,a_1)=L(\theta_1,a_1)\pi(\theta_1)+L(\theta_2,a_1)\pi(\theta_2)\\ &=0\times 0.9+1300\times 0.1=130 \text{ 美元}\\ \rho(\pi,a_2)&=E^{\pi}L(\theta,a_2)=L(\theta_1,a_2)\pi(\theta_1)+L(\theta_2,a_2)\pi(\theta_2)\\ &=200\times 0.9+0\times 0.1=180 \text{ 美元}\end{aligned}$$

注:损失不是负的收益，也不是亏损.简单的说损失是指:“该赚而没有赚到的钱”.在由收益函数转化成损失函数时，通常是在状态 θ 中找出最大收益 $\max\limits_{a\in\mathscr{A}}Q(\theta,a)$（最大收益对应的行动是无损失的)，此时人们采取行动 a 所引起的损失为

$$L(\theta,a)=\max_{a\in\mathscr{A}}Q(\theta,a)-Q(\theta,a)$$