“十三五”普通高等教育本科规划教材

微积分学习指导

于艳华　王　涛　主　编
孙彩云　杨　戍　葛世刚　魏　静　副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

"十三五"普通高等教育本科规划教材

微积分学习指导

主　编　于艳华　王　涛
副主编　孙彩云　杨　戍　葛世刚　魏　静
编　写　仓定帮　张守成　隋丽丽　于　健
　　　　李庆庆　杨文光
主　审　魏丽侠

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为“十三五”普通高等教育本科规划教材。本书根据教育部关于经济管理类“微积分”课程的教学基本要求和经济管理类学生考研对该课程的要求编写而成。全书共分11章，内容包括：一元函数微积分及其在经济中的应用，多元函数微积分及其在经济中的应用，微分方程与差分方程及其在经济中的应用，空间解析几何和无穷级数。附录为近三年全国硕士研究生入学考试数学试题及其全解。

本书可作为高等院校经济管理类各专业学生学习“微积分”课程的学习指导书，也可作为考研复习的指导用书，对教师和科研工作者也具有参考价值。

图书在版编目（CIP）数据

微积分学习指导/于艳华，王涛主编. —北京：中国电力出版社，2016.8

“十三五”普通高等教育本科规划教材

ISBN 978-7-5123-9715-6

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①于… ②王… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第205156号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）

北京天宇星印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2016年8月第一版 2016年8月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 16.75印张 410千字

定价 **34.00**元

前　言

“微积分”是经济管理类学生的一门重要基础课。它不仅是后继数学课程的基础，更是专业课程和将来从事专业工作的基础。为使经济管理类大学一年级的学生能更好地理解微积分的基本概念，掌握其基本原理，学会其基本解题方法，提高应试能力和分析问题、解决问题的能力。我们根据教育部关于经济管理类微积分课程教学的基本要求，认真总结了多年的教学经验，编写了本书。

编写本书的指导思想是，既注重基本技能的训练，又注重与硕士研究生入学统一考试要求相衔接，力求做到融学习指导和考研辅导为一体。

本书共分 11 章，各章包括知识结构图、疑难问题解答、典型例题分析、自测题及答案。知识结构图将本章知识有机联系起来，组成网络结构，便于学生从总体上更加系统地掌握本章的知识体系和核心内容。疑难问题解答对学习中不易理解的概念和解题中常见的错误进行剖析，指导学生理解基本概念。典型例题分析是本书的重点，编者广泛查阅资料，精选出了具有代表性、典型性的例题进行解析。在解题过程中，有“分析”：帮助读者尽快找到解题思路和方法；有方法“注释”：帮助读者找到解决问题的关键、技巧和规律。通过典型例题分析，可加深读者对基本概念的理解，熟悉对重要定理和方法的运用。自测题分两部分：自测题 A 以基本题为主，主要测试学生对本章基本知识、基本方法的掌握程度；自测题 B 以达到或接近考研水平的题目为主，以此检测学习效果，提高应试水平。在本书最后还附有近三年全国硕士研究生入学统一考试数学（三）真题解答，使那些将来准备或正在准备考研的读者能够了解考研命题趋势。

本书由华北科技学院于艳华、王涛主编。第 1 章、第 2 章由魏静编写，第 3 章、第 5 章、第 8 章由于艳华编写，第 4 章由杨戍编写，第 6 章、第 7 章由孙彩云编写，第 9 章、第 10 章由王涛编写，第 11 章由葛世刚编写，仓定帮、张守成、隋丽丽、于健、杨文光、李庆庆参加了附录 A 的编写。本书由魏丽侠教授主审。

本书参考了多本同类书籍，在此向这些书籍的编著者表示感谢。限于编者水平及编写时间，书中难免有疏漏与不足之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者
2016 年 7 月

目　录

第1章 函 数

1.1 知 识 结 构 图

- 函数
  - 集合
    - 集合的概念
    - 集合的运算
    - 区间与邻域
  - 映射与函数
    - 函数的类型：复合函数、反函数、隐函数、基本初等函数
    - 常用的函数
      - 需求函数
      - 供给函数、生产函数
      - 成本、收益函数
      - 利润函数
      - 戈珀兹（Gompertz）曲线
    - 函数的性质
      - 奇偶性
      - 单调性
      - 周期性
      - 有界性

1.2 疑 难 问 题 解 答

问题 1.1 若两个函数的对应法则相同，则这两个函数为同一个函数吗？

答 不是. 由函数的定义可以知道，函数有两个关键特征：①x 取值允许的范围，即函数的定义域；②对应法则，即函数的依赖关系. 就是说函数的概念有两个基本要素：定义域和对应法则. 只有当两个函数的定义域与对应法则完全相同时，才能认为它们是同一个函数. 所以，两个函数的对应法则相同，并不意味着这两个函数是同一个函数.

问题 1.2 确定函数的定义域，一般有什么方法？

答 第一，对用数学式表示的函数，其定义域未明确指定，即使数学表达式有意义的自变量的取值范围，它称为**自然定义域**. 求自然定义域时，要注意使函数有意义的限制条件. 例如：

（1）偶次根式表达的函数，其根号下的值非负.

（2）分式函数，其分母的值不等于零.

（3）对数函数的真数值必须大于零；底数大于 0，不等于 1.

（4）有限多个函数的加、减、乘运算得到的函数，其定义域是这些函数定义域的交集.

（5）函数的定义域就是其反函数的值域，反之亦然.

（6）奇函数与偶函数的定义域是关于原点对称的.

（7）周期函数的定义域是 **R** 中的无界数集.

（8）分段函数的定义域是各个分段式子给出的 x 的变化范围的并集.

第二，对几何、物理等实际问题中的函数，它的定义域由问题的实际意义来确定. 例如，距地面高 H 的自由落体运动 $h(t)=\frac{1}{2}gt^2$ 中，t 的变化范围 $\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$ 为函数定义域.

问题 1.3 分段函数是初等函数吗?

答 一般不是初等函数. 初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合所得到的，并能用一个式子表示的函数. 而分段函数在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子表示. 所以，一般分段函数不是初等函数.

但是，有些分段函数亦可用一个式子表达，是基本初等函数经有限次四则运算及复合步骤得到的. 例如，$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 是分段函数，但是 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$ 又是初等函数.

问题 1.4 任何周期函数必定有最小正周期吗?

答 不对. 注意周期函数的定义为：若存在 $T>0$，使得对于任意的 x，都有 $f(T+x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数. 若在周期 T 的所有取值中存在一个大于零的最小正数 T_0，则称 T_0 为最小正周期. 通常所说周期函数的周期是指其最小正周期.

考虑
$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q}\\ 1, & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$$
对于任意给定的正数 $T\in\mathbf{Q}$，都有 $f(T+x)=f(x)$，因此 $f(x)$ 为周期函数，任何正有理数都是该函数的周期，但是 $f(x)$ 不存在最小正周期. 这表明周期函数不一定有最小正周期.

问题 1.5 两个周期函数的和函数是否一定是周期函数?

答 不一定. 我们有下面的结论：设 $f(x)$，$g(x)$ 是两个周期为 T_1，T_2 的周期函数，则仅当 T_1/T_2 是有理数时，即存在正整数 m，n，使 $T_1/T_2=m/n$，从而 T_1，T_2 的最小公倍数 $nT_1=mT_2$ 就是 $f(x)+g(x)$ 的周期；又当 T_1/T_2 是无理数时，$f(x)+g(x)$ 不是周期函数.

问题 1.6 设函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(x)$ 在任何闭区间上有界，则 $f(x)$ 必定为 $\mathbf{R}$ 上的有界函数吗?

答 不一定. 例如，函数 $y=x$ 在任何闭区间上有界，但是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上无界.

问题 1.7 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 互为反函数，则 $f(g(x))=x$ 是否正确?

答 正确. 此性质在处理问题时很有用. 例如，2001 年全国硕士研究生入学考试数学（二）试题：

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$. 且其反函数为 $g(x)$. 若 $\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t = x^2\mathrm{e}^x$，求 $f(x)$.

此题在求解运算中反函数的上述性质是求解的重要环节.

等式两边对 x 求导，可得 $g(f(x))f'(x)=2xe^x+x^2e^x$，即 $xf'(x)=2xe^x+x^2e^x$，从而即可简单求答.

问题 1.8 基本初等函数经过四则运算或复合所成的函数都为初等函数吗？

答 不一定. 当进行有限次四则运算或复合时，其结果一定是初等函数；当进行无限次四则运算或复合时，其结果不一定是初等函数. 例如，$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$是初等函数；但是 $f(x)=1+x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n+\cdots$不是初等函数.

1.3 典型例题分析

一、集合

【例 1.1】 下述命题是否正确？不正确的话，请改正.

(1) $x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 并且 $x\notin B$； (2) $x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 或者 $x\notin B$.

解 (1) 不正确. $x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或者 $x\notin B$.

(2) 不正确. $x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A$ 并且 $x\notin B$.

【例 1.2】 已知 $A=\left\{0,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots\right\}$，$B=\left\{1,\ \dfrac{1}{2},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n},\ \cdots\right\}$，求：$A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$B-A$.

解 $A\cup B=A$，$A\cap B=B$，$A-B=\{0\}$，$B-A=\varnothing$.

【例 1.3】 已知：$\{(x,\ y)\mid x+y-2=0$ 且 $x-2y+4=0\}\subset\{(x,\ y)\mid y=3x+b\}$. 求 b.

解 因为 $\{(x,\ y)\mid x+y-2=0$ 且 $x-2y+4=0\}=\{(0,\ 2)\}$，所以 $(0,\ 2)\in\{(x,\ y)\mid y=3x+b\}$，解得 $b=2$.

【例 1.4】 已知 α，β 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个不相等的实根，集合 $A=\{\alpha,\ \beta\}$，$B=\{2,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$，$A\cap C=A$，$A\cap B=\varnothing$，求 p，q 的值.

解 由 $A\cap C=A$ 知$A\subseteq C$. 又 $A=\{\alpha,\ \beta\}$，故 $\alpha\in C$，$\beta\in C$. 而 $A\cap B=\varnothing$，故 $\alpha\notin B$，$\beta\notin B$. 显然，既属于 C 又不属于 B 的元素只有 1 和 3. 不妨设 $\alpha=1$，$\beta=3$。对于方程 $x^2+px+q=0$ 的两根 α，β 应用韦达定理，可得 $p=-4$，$q=3$.

二、映射与函数

【例 1.5】 设 $S=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$，$T=\{a,\ b,\ c\}$，问有多少种可能的映射 f：$S\mapsto T$？其中哪些是双射？

解 有 $3^3=27$ 种可能的映射，其中有 $3!=6$ 种是双射，它们是

$$f:\begin{cases}\alpha\mapsto a\\ \beta\mapsto b,\\ \gamma\mapsto c\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto a\\ \beta\mapsto c,\\ \gamma\mapsto b\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b\\ \beta\mapsto c,\\ \gamma\mapsto a\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b\\ \beta\mapsto a,\\ \gamma\mapsto c\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c\\ \beta\mapsto a,\\ \gamma\mapsto b\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c\\ \beta\mapsto b.\\ \gamma\mapsto a\end{cases}$$

【例 1.6】 将下列函数 f 和 g 构成复合函数，并指出其定义域与值域.

(1) $y=f(u)=\arcsin u$，$u=g(x)=e^x$；(2) $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

解 (1) $y=\arcsin e^x$，定义域：$(-\infty, 0]$，值域：$\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$；

(2) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$，定义域：$(-\infty, -1)\cup[1, +\infty)$，值域：$[0, 1)\cup(1, +\infty)$.

【例 1.7】 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的.

(1) $y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$； (2) $y=\frac{1}{3}\log_a^3(x^2-1)$； (3) $y=e^{\left(\sin\frac{1}{x}\right)^2}$.

解 (1) 由 $y=\arcsin u$，$u=\frac{1}{\sqrt{v}}$，$v=x^2+1$ 复合而成.

(2) 由 $y=\frac{1}{3}u^3$，$u=\log_a v$，$v=x^2-1$ 复合而成.

(3) 由 $y=e^u$，$u=t^2$，$t=\sin v$，$v=\frac{1}{x}$复合而成.

【例 1.8】 下列函数 f 和 g 是否等同?

(1) $f(x)=\log_a(x^2)$与 $g(x)=2\log_a x$； (2) $f(x)=-\frac{x^2}{x}$与 $g(x)=-x$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^2}$与 $g(x)=|x|$； (4) $f(x)=x^2+1$ 与 $g(t)=t^2+1$.

解 (1)、(2) 不等，因为定义域不同；(3)、(4) 等同，因为定义域和对应法则相同.

【例 1.9】 (1) 设 $f(x+3)=2x^3-3x^2+5x-1$，求 $f(x)$；(2) 设 $f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3x-1}{3x+1}$，求 $f(x)$.

解 (1) 令 $x+3=t$，则 $x=t-3$，代入等式，得到

$$f(t)=2(t-3)^3-3(t-3)^2+5(t-3)-1=2t^3-21t^2+77t-97,$$

故 $f(x)=2x^3-21x^2+77x-97$.

(2) 令$\frac{x}{x-1}=t$，则 $x=\frac{t}{t-1}$，代入等式，得到

$$f(t)=\frac{\frac{3t}{t-1}-1}{\frac{3t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1},$$

所以 $f(x)=\frac{2x+1}{4x-1}$.

【例 1.10】 证明：定义于 $(-\infty, +\infty)$ 上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

证明 显然$\frac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数，$\frac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数，而

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

【例 1.11】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$，求 $f(x+a)+f(x-a)(a>0)$ 的定义域.

解 由题意知，要使 $f(x+a)+f(x-a)$有意义，只要

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}.$$

由于 $a=\max\{-a, a\}$，$1-a=\min\{1-a, 1+a\}$，所以，当 $a<1-a$ 时，$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a, 1-a]$；当 $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$时，其定义域为$\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$；当 $a>1-a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$时，其定义域为$\varnothing$.

【例 1.12】 下列哪些函数是初等函数？哪些不是？

(1) $y=2^{-x^2}$；(2) $y=\sqrt{x}+\lg(\sin x)$；(3) $y=[x]$；(4) $y=\begin{cases}0, & x\geqslant 0\\1, & x<0\end{cases}$.

解 (1) 是；(2) 是；(3) 不是；(4) 不是.

三、函数关系的建立

【例 1.13】 某企业生产一批产品，其固定成本为 2000 元，每生产一件产品的成本为 60 元，这种产品的需求函数为 $Q=1000-10P$（Q 为需求量，P 为价格），求成本函数、收入函数和利润函数.

解 成本函数 $C(Q)=2000+60Q$（元），从需求函数可得价格函数为 $P=100-0.1Q$，则收入函数为 $R(Q)=PQ=100Q-0.1Q^2$（元），利润函数为 $L(Q)=R(Q)-C(Q)=40Q-0.1Q^2-2000$（元）.

【例 1.14】 为加强公民的节水意识，某城市制定了以下用水收费标准：每户每月用水未超过 7m^3 时，每立方米收费 1.0 元并加收 0.2 元的城市污水处理费，超过 7m^3 的部分每立方米收费 1.5 元并加收 0.4 元的城市污水处理费，设某户每月用水量为 $x\text{m}^3$，应交水费为 y 元.

(1) 分别写出用水未超过 7m^3 和多于 7m^3 时，y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 如果某单位共有用户 50 户，某月共交水费 514.6 元，且每户的用水量均未超过 10m^3，则这个月用水未超过 7m^3 的用户最多可能有多少户？

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 7$ 时，$y=(1.0+0.2)x=1.2x$；

当 $x>7$ 时，$y=(1.5+0.4)(x-7)+1.2\times 7=1.9x-4.9$.

(2) 当 $x=7$ 时，需付水费：$7\times 1.2=8.4$（元）；当 $x=10$ 时，需付水费：$7\times 1.2+1.9(10-7)=14.1$（元）.

设这个月用水未超过 7m^3 的用户最多可能有 a 户，则 $8.4a+14.1(50-a)>514.6$，化简，得 $5.7a<190.4$，解得 $a<33\dfrac{23}{57}$. 故该单位这个月用水未超过 7m^3 的用户最多可能有 33 户.

四、函数的基本性态

【例 1.15】 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0\\1+x, & x>0\end{cases}$的奇偶性.

解 由于 $f(x)=1+|x|$，所以该函数是偶函数.

【例 1.16】 设 $f(x)$ 为定义在 $(-L,L)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,L)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-L,0)$ 内也单调增加.

证明 设 x_1，x_2 为满足 $-L<x_1\leqslant x_2<0$ 的两个实数，则 $L>-x_1\geqslant -x_2>0$，因 $f(x)$ 在 $(0,L)$ 内单调增加，故 $f(-x_2)\leqslant f(-x_1)$，又因 $f(x)$ 是 $(-L,L)$ 内的奇函数，从而 $-f(x_2)\leqslant -f(x_1)$，即 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，因此 $f(x)$ 在 $(-L,0)$ 内也单调增加.

【例 1.17】 设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数. $f(1)=a$，且对于任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.

(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 与 $f(5)$； (2) 问 a 取何值时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

解 (1) 在 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 中，令 $x=-1$，则 $f(1)-f(-1)=f(2)$，而 $f(x)$ 为奇函数，故

$$f(2)=f(1)-f(-1)=f(1)-[-f(1)]=2f(1)=2a;$$

又在 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 中，令 $x=1$，则 $f(3)-f(1)=f(2)$，故

$$f(3)=f(1)+f(2)=a+2a=3a;$$

再在 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 中，令 $x=3$，则 $f(5)-f(3)=f(2)$，故 $f(5)=f(3)+f(2)=5a$.

(2) 令 $f(2)=0$，则 $2a=0$，即 $a=0$，此时 $f(x+2)-f(x)=f(2)$ 对任意 x 都成立. 故当 $a=0$ 时，$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

1.4 自测题及答案

自测题 A

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是（ ）.

A. $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$　　B. $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$

C. $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$　　D. $(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$

2. 下列函数中，有界的是（ ）.

A. $y=\arctan x$　　B. $y=\tan x$　　C. $y=\dfrac{1}{x}$　　D. $y=2^x$

3. 若 $\varphi(t)=t^3+1$，则 $\varphi(t^3+1)$ 等于（ ）.

A. t^3+1　　B. t^6+1　　C. t^6+2　　D. $t^9+3t^6+3t^3+2$

4. 函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ 是（ ）.

A. 偶函数　　B. 奇函数

C. 非奇非偶函数　　D. 既是奇函数又是偶函数

5. 函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 是周期函数，它的最小正周期是（ ）.

A. 2π　　B. π　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{4}$

6. 设 $f(x)=x+1$，则 $f(f(x)+1)$等于（　　）.

A. x　　B. $x+1$　　C. $x+2$　　D. $x+3$

7. 若函数 $f(e^x)=x+1$，则 $f(x)$等于（　　）.

A. e^x+1　　B. $x+1$　　C. $\ln(x+1)$　　D. $\ln x+1$

8. 若函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=x+1$，则函数 $f(g(x))$ 的定义域是（　　）.

A. $x>0$　　B. $x\geqslant 0$　　C. $x\geqslant 1$　　D. $x>-1$

9. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，则函数 $f(\ln x+1)$ 的定义域是（　　）.

A. $(0,1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(e^{-1},1)$　　D. (e^{-1},e)

10. 函数 $f(x)=|x-1|$是（　　）.

A. 偶函数　　B. 有界函数　　C. 单调函数　　D. 连续函数

二、填空题

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,4]$，则函数 $g(x)=f(x+1)+f(x-1)$ 的定义域为________.

2. 设 $f(x)=e^x$，$f(g(x))=1-x^2$，则 $g(x)=$________.

3. 函数 $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$的定义域为________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^3+4x+1, & x\geqslant 1\\ x+2, & x<1\end{cases}$，则 $f(x+4)=$________.

5. 函数 $y=2\sin\dfrac{2}{3}x+\tan\dfrac{x}{2}$ 的周期是________.

6. 把函数 $y=\ln^2\arcsin x^3$ 分解为简单函数________.

7. 函数 $y=\sqrt{x}-1$ $(x\geqslant 1)$ 的反函数是________.

8. 函数 $y=e^{x+1}$的反函数是________.

9. 设 $f(x)=e^{(x-a)^2}$，$\varphi(x)=a+\cos x$，则 $f(\varphi(x))=$________.

10. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$的定义域是________，值域是________.

三、解答题

1. 设 a，b 为给定实数. 试用不等式符号（不用绝对值符号）表示下列不等式的解：

(1) $|x-a|<|x-b|$；　　(2) $|x-a|<x-b$；　　(3) $|x^2-a|<b$.

2. 在什么条件下，函数 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$的反函数就是它本身？

3. 证明下列函数在指定区间上的单调性：

(1) $y=3x-1$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格递增；(2) $y=\sin x$ 在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$严格递增.

4. 证明：$\tan x$ 在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$上无界，而在$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$内任一闭区间 $[a,b]$ 上有界.

5. 讨论狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$的有界性、单调性与周期性.

6. 设 f，g 都是初等函数，$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$，$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，$x\in D$.

试问 $M(x)$，$m(x)$ 是否为初等函数?

7. 设 f 为定义在 $\mathbf{R}$ 上以 h 为周期的函数，a 为实数. 证明：若 f 在 $[a, a+h]$ 上有界，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界.

8. 收音机每台售价为 90 元，成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购，决定凡是订购量超过 100 台以上的，每多订购 1 台，售价就降低 1 分，但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数；

(2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数；

(3) 某一商行订购了 1000 台，厂方可获利润多少?

自测题 A 答案

一、选择题

1. D.　2. A.　3. D.　4. B.　5. C.　6. D.　7. D.　8. D.　9. C.　10. D.

二、填空题

1. $[1, 3]$.　2. $\ln|1-x^2|$.　3. $x\leqslant 3$，$x\neq 0$.　4. $\begin{cases} x^3+12x^2+16x+81; & x\geqslant -3 \\ x+6; & x<-3 \end{cases}$.

5. 6π.　6. $u=x^3$，$v=\arcsin u$，$k=\ln v$，$h=k^2$.　7. $y=(x+1)^2$，$x\geqslant 0$.

8. $y=\ln x-1$.　9. $y=e^{\cos^2 x}$.　10. $\mathbf{R}$；$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

三、解答题

1. (1) 当 $a>b$ 时，不等式的解为 $x>\frac{a+b}{2}$；当 $a<b$ 时，不等式的解为 $x<\frac{a+b}{2}$；当 $a=b$ 时，不等式的解为$\varnothing$.

(2) 当 $a>b$ 时，不等式的解为 $x>\frac{a+b}{2}$；当 $a\leqslant b$ 时，不等式的解为$\varnothing$.

(3) 当 $b\leqslant 0$ 时，原不等式的解为$\varnothing$；当 $b>0$ 时，原不等式等价于 $a-b<x^2<a+b$. 因此有

1) 当 $a+b\leqslant 0$ 时，不等式的解为$\varnothing$；

2) 当 $a+b>0$ 时，有

① 若 $a\geqslant b$，则解为$\sqrt{a-b}<x<\sqrt{a+b}$或$-\sqrt{a+b}<x<-\sqrt{a-b}$；

② 若 $a<b$，则解为$|x|<\sqrt{a+b}$，即$-\sqrt{a+b}<x<\sqrt{a+b}$.

2. 首先 $bc\neq ad$，由 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$解得 $x=\frac{b-dy}{cy-a}$，交换 x 与 y 得 $y=\frac{b-dx}{cx-a}$，当 $c\neq 0$ 时，原函数的定义域为 $x\neq -\frac{d}{c}$，反函数的定义域为 $x\neq \frac{a}{c}$. 因此，要使两函数相同，必须 $a=-d$，这时原函数为$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{b-dx}{cx-a}$，即为反函数. 另外，当 $b=c=0$ 且 $a=d\neq 0$ 时亦满足. 故当"$bc\neq ad$ 且 $a=-d$"或"$b=c=0$ 且 $a=d\neq 0$"时，该函数的反函数就是其本身.

3. 提示：用定义证明.

4. 证略.

5.（1）$M=1>0$，$\forall x\in(-\infty,\ \infty)$，使$|f(x)\leqslant 1|$，所以 $f(x)$ 是有界函数.

（2）由于对任意有理数 x_1 与无理数 x_2，都有 $D(x_1)>D(x_2)$. 所以 $D(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不具有单调性.

（3）任取有理数 $r>0$，若 x 是有理数，则 $D(x)=1$，$x+r$ 仍为有理数，故有 $D(x+r)=1$；若 x 是无理数，则 $D(x)=0$，$x+r$ 仍为无理数，故有 $D(x+r)=0$. 所以 $D(x)$ 是以任意正有理数为周期的周期函数，但无最小周期.

6. 略.

7. 略.

8.（1）$p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 91-0.01x, & 100<x<1600.\\ 75, & x\geqslant 1600\end{cases}$

（2）$P=(p-60)x=\begin{cases}30x & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 31x-0.01x^2, & 100<x<1600.\\ 15x, & x\geqslant 1600\end{cases}$

（3）$P=31\times 1000-0.01\times 1000^2=21000$（元）.

自 测 题 B

一、选择题

1. 点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$ 邻域是区间（　　）.

A. $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$　　B. $(x_0-\delta,\ x_0+\delta]$

C. $[x_0-\delta,\ x_0+\delta)$　　D. $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$

2. 函数 $y=\dfrac{1}{\lg(x-1)}$的定义域是（　　）.

A. $(1,\ +\infty)$　　B. $(0,\ 1)\cup(1,\ +\infty)$

C. $(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$　　D. $(1,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$

3. 函数 $y=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域是（　　）.

A. $(0,\ 1)$　　B. $(0,\ 1)\cup(1,\ 4)$

C. $(0,\ 4)$　　D. $(0,\ 1)\cup(1,\ 4]$

4. 若 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$，则 $f(x)$ 等于（　　）.

A. $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$　　B. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$　　C. $(1+x)^2$　　D. $(1-x)^2$

5. $f(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<1\\ 0, & |x|\geqslant 1\end{cases}$，则 $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$等于（　　）.

A. 0　　B. 1　　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

1. 已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=$ __________，其定义域为__________.

2. 绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 的定义域是__________，值域是__________.

3. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加，则 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内单调__________.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geqslant 0\\ -e^x, & x<0\end{cases}$，$\varphi(x)=\ln x$，则 $f(\varphi(x))=$____________________，$\varphi(f(x))=$____________________.

5. 已知函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且在区间 $[0, 2)$ 内 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 在区间 $[4, 6)$ 内的表达式为 $f(x)=$__________.

6. 设 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2$，则 $f(x)=$__________.

7. 设函数 $f(x)=1+\ln x$，$g(x)=\sqrt{x}+1$，则 $f(g(x))=$__________.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & -2<x<0\\ 1+x^2, & 0\leqslant x<2\end{cases}$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$__________.

三、解答题

1. 求下面不等式的解.

(1) $x(x^2-1)>0$；(2) $|x-1|<|x-3|$；(3) $\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}<\sqrt{3x-2}$.

2. 已知函数 $y=f(x)$ 的图像，试述下列各函数图像的特点.

(1) $y=-f(x)$； (2) $y=f(-x)$； (3) $y=-f(-x)$； (4) $y=|f(x)|$；

(5) $y=\operatorname{sgn} f(x)$； (6) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]$； (7) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]$.

3. 用区间表示下列不等式的解.

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$； (2) $\left|x+\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 6$；

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)\geqslant 0$，$a$，$b$，$c$ 为常数且 $a<b<c$；

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0\\ 2^x, & x>0\end{cases}$. 求：

(1) $f(-3)$，$f(0)$，$f(1)$； (2) $f(\Delta x)-f(0)$，$f(-\Delta x)-f(0)$，$\Delta x>0$.

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，求 $f(2+x)$，$f(2x)$，$f(x^2)$，$f(f(x))$，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

6. 下列复合函数是由哪些初等函数复合而成?

(1) $y=(1+x)^{20}$；(2) $y=(\arcsin x^2)^2$；(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$；(4) $y=2^{\sin^2 x}$.

7. 求下列函数的周期.

(1) $f(x)=\cos^2 x$；(2) $f(x)=2\tan(3x)$；(3) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{x}{3}$.

8. 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$，求 $f(x)$.

9. 证明对任何 $x\in\mathbf{R}$，有：(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$；(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 1$.

10. 设 a，b，c 为三个任意的实数，证明 $\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|$，并说明此不

等式的几何意义.

11. 设 $x>0$，$b>0$ 且 $x\neq b$，证明$\dfrac{a+x}{b+x}$介于 1 与$\dfrac{a}{b}$之间.

12. 证明：$f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数.

13. 设 a，$b\in\mathbf{R}$，证明：(1) $\max\{a, b\}=\dfrac{1}{2}(a+b+|a-b|)$；(2) $\min\{a, b\}=\dfrac{1}{2}(a+b-|a-b|)$.

自测题B答案

一、选择题

1. D.　2. D.　3. D.　4. C.　5. C.

二、填空题

1. $\arcsin(1-x^2)$；$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.　2. $\mathbf{R}$；$\{x|x\geqslant 0\}$.　3. 增加.

4. $\begin{cases}-(\ln x)^2, & x\geqslant 1\\ -x, & 0<x<1\end{cases}$；不能.　5. $(x-4)^2$.　6. $\dfrac{1}{3}(x^2+2x-1)$.

7. $1+\ln(\sqrt{x}+1)$.　8. $1+\dfrac{\pi^2}{4}$.

三、解答题

1. (1) $A\cup B$；(2) $(-\infty, 2)$；(3) $\varnothing$.

2. (1) $y=-f(x)$ 和 $y=f(x)$ 的图像关于 x 轴对称；

(2) $y=f(-x)$ 和 $y=f(x)$ 的图像关于 y 轴对称；

(3) $y=-f(-x)$ 和 $y=f(x)$ 的图像关于原点对称；

(4) $y=|f(x)|=\begin{cases}f(x), & x\in D_1=\{x|f(x)\geqslant 0\}\\ -f(x), & x\in D_2=\{x|f(x)<0\}\end{cases}$；

(5) $y=\operatorname{sgn}f(x)=\begin{cases}1, & x\in D_1=\{x|f(x)>0\}\\ 0, & x\in D_2=\{x|f(x)=0\}\\ -1, & x\in D_3=\{x|f(x)<0\}\end{cases}$；

(6) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|+f(x)]=\begin{cases}f(x), & x\in D_1=\{x|f(x)\geqslant 0\}\\ 0, & x\in D_2=\{x|f(x)<0\}\end{cases}$；

(7) $y=\dfrac{1}{2}[|f(x)|-f(x)]=\begin{cases}0, & x\in D_1=\{x|f(x)\geqslant 0\}\\ -f(x), & x\in D_2=\{x|f(x)<0\}\end{cases}$.

3. (1) $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$；(2) $[-3-2\sqrt{2}, -3+2\sqrt{2}]\cup[3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}]$；

(3) $(a, b)\cup(c, +\infty)$.

4. (1) $f(-3)=2+(-3)=-1$，$f(0)=2+0=2$，$f(1)=2^1=2$；

(2) 因为 $\Delta x>0$，所以有 $f(\Delta x)-f(0)=2^{\Delta x}-(2+0)=2^{\Delta x}-2$，$f(-\Delta x)-f(0)=-\Delta x$.

5. $f(2+x)=\dfrac{1}{3+x}$；$f(2x)=\dfrac{1}{1+2x}$；$f(x^2)=\dfrac{1}{1+x^2}$；$f(f(x))=\dfrac{x+1}{x+2}$；