

现代物理基础丛书

76

# 数学物理方程及其 近似方法

(第二版)

程建春 著



科学出版社

现代物理基础丛书 76

# 数学物理方程及其 近似方法 (第二版)

程建春 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书系统论述了数学物理方程及其近似方法, 主要内容包括: 数学物理方程的基本问题、本征值问题和分离变量法的基本原理、Green 函数方法、变分近似方法、积分方程及其近似方法、微扰方法和渐近展开、数学物理方程的逆问题, 以及非线性数学物理方程。

本书不仅可作为本科生和研究生学习数学物理方程课程的参考书, 对从事相关领域科学研究的工作者也有一定的帮助。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程及其近似方法/程建春著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2016.  
(现代物理基础丛书; 76)

ISBN 978-7-03-049144-2

I. ①数… II. ①程… III. ①数学物理方程 IV. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 143705 号

---

责任编辑: 刘凤娟 / 责任校对: 蒋 萍  
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 耕者设计

**科学出版社** 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2016 年 6 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2016 年 6 月第一次印刷 印张: 58 1/4

字数: 1 151 000

定价: 199.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

## 《现代物理基础丛书》编委会

主 编 杨国桢

副主编 阎守胜 聂玉昕

编 委 (按姓氏笔画排序)

王 牧 王鼎盛 朱邦芬 刘寄星

杜东生 邹振隆 宋菲君 张元仲

张守著 张海澜 张焕乔 张维岩

侯建国 侯晓远 夏建白 黄 涛

解思深

## 第二版前言

本书第一版出版于十年前,实际上成稿于三十前作者给研究生开设的数学物理方程课程,现在看来修改是必须的.作者在第二版中对第一版的内容作了全面的修改与补充,主要增加的内容有下述几个方面.

1. 提高与物理学内容的结合度,增加了许多处理声学、电磁学以及量子力学方面的例子和章节,以丰满所述内容,例如电磁场计算中的矩量法,量子力学中的近似方法,声学中的声辐射和声散射,等等;

2. 增加了有限元和边界元数值计算的基本原理方面的论述.实际上,基于变分法的有限元近似和基于积分方程的边界元近似,在第四、五章中讲述也是顺理成章的.这两部分内容的增加也使本书名副其实.

3. 增加了非 Hermite 对称算子理论部分,这一部分内容在声学和电磁场理论中是非常实用的.事实上,在引进波的衰减和边界阻抗后,声学和电磁场中遇到的实际问题都必须面对非 Hermite 对称的波动算子.

4. 扩展了部分内容,如第五章介绍了分数导数、分数 Laplace 算子以及分数 Fourier 变换,而且这一部分内容丰富了 Fourier 变换,本征值理论,以及 Hermite 多项式应用.故作者认为增加这一部分是非常必要的.

5. 全面改写了第七章中关于抛物型方程逆问题、椭圆型方程逆问题和波动方程逆问题的内容,使之更有深度.但必须说明的是,作者在这方面的科研工作较少,而这方面的内容又较新,错误是难免的.

作者对第二版的定位是,本书不仅仅作为教学参考书,而且通过阅读本书,能够对读者的科研工作提供一定的帮助.

# 第一版前言

本书是为研究生学习数学物理方程而编写的。研究生在本科阶段已学过这方面的课程。为了避免重复并且达到提高目的,本书选择内容较深,讲述方法立足点较高。特别是引进了若干泛函方面的理论(例如,第二章中 Hilbert 空间概念),并且尽可能给出严格的数学证明(例如第四章详细证明了本征函数系完备性定理)。当然,直观的物理描述方法还是占主导地位。

本书分八章,各章的内容大致如下。第一章讲述数学物理方程的基本问题,介绍几个典型定解问题的求解方法。重点讨论定解问题的适定性(主要是唯一性和稳定性);第二章讲述分离变数法基本原理。首先引进 Hilbert 空间概念(特别是平方可积函数空间  $L^2[a, b]$ )。因为正交函数展开是分离变数法的关键,故第二章对一定函数类按完备的正交归一系展开问题进行了详细的讨论。本章讨论的另一个十分重要的问题是本征值问题,特别是 Sturm-Liouville 型本征值问题;第三章介绍求解定解问题的一个重要方法,即 Green 函数理论。本章特别强调的一个问题是如何利用 Green 函数把微分方程化成积分方程;第四章介绍一种十分有用的近似方法,即变分近似方法,它在工程或物理问题中应用广泛;第五章是关于积分方程的基本理论,因微分方程可通过 Green 函数转化成积分方程,而对积分方程的讨论往往比较简单(例如讨论解的存在性)。此外,积分方程在实际问题中也经常出现;第六章讨论微扰理论,主要介绍正则微扰(参数变形法和多尺度展开)、奇异微扰及边界层理论方面的基本概念。实际问题能严格求解的很少,因此微扰理论具有实用意义。这方面的理论相当丰富,本章仅仅介绍一些基本思想;第七章介绍目前科学与工程热点课题,即数学物理方程的逆问题。介绍逆问题的基本概念和主要方法;最后,第八章介绍若干典型的非线性数学物理方程,特别是这些非线性方程存在的“孤立波”解。

整个课程大致需要 120 学时左右。总的来说,量比较大。但因研究生自学能力强,本书的数学推导详细,适合于自学。选择适当的章节,在 80 学时(或 60 学时)内完成教与学的任务是不成问题的。

本书的出版得到国家杰出青年科学基金和南京大学“985”工程的资助。

## 英汉人名对照表

Airy 艾里	Helmholtz 亥姆霍兹
Bäcklund 贝克隆	Herglotz 赫格洛茨
Banach 巴拿赫	Hermite 厄米
Bessel 贝塞尔	Hilbert 希尔伯特
Born 玻恩	Hirota 广田
Brillourin 布里渊	Hopf 霍普夫
Burgers 伯格	Jacobi 雅可比
Cauchy 柯西	Kantorovich 康托洛维奇
Chebyshev 切比雪夫	Kirchhoff 基尔霍夫
Cherenkov 切伦科夫	Klein 克莱因
Cole 科尔	Kortweg 考特维克
Courant 柯朗	Kramer 克雷默
d'Alembert 达朗贝尔	de Vries 德弗里
Dirac 狄拉克	Lagrange 拉格朗日
Duhamel 杜阿美尔	Laguerre 拉盖尔
Euler 欧拉	Laplace 拉普拉斯
Fisher 费舍儿	Lax 拉克斯
Fourier 傅里叶	Legendre 勒让德
Fredholm 弗雷德霍姆	Liouville 刘维尔
Galerkin 伽辽金	Lippman 李普曼
Gauss 高斯	Mach 马赫
Gelfand 盖尔范德	Neumann 诺依曼
Gordon 戈登	Newton 牛顿
Goursat 古沙特	Parseval 帕塞瓦尔
Gram 格拉姆	Poisson 泊松
Green 格林	Rayleigh 瑞利
Hamilton 哈密顿	Riesz 里斯
Hammerstein 哈默斯坦	Ritz 里茨
Hankel 汉克尔	Rutherford 卢瑟福
Hausdorff 豪斯多夫	Rytov 雷托夫
Heaviside 赫维赛德	Schmidt 施密特
	Schrödinger 薛定谔

Schwartz 施瓦兹  
Schwinger 施温格  
Stefan 斯特藩  
Stirling 斯特林  
Sturm 斯图姆  
Taylor 泰勒

Tikhonov 吉洪诺夫  
Urysohn 乌里申  
Volterra 沃尔特拉  
Weierstrass 魏尔斯特拉斯  
Wentzel 文策尔  
Wronski 朗斯基



# 目 录

第 1 章 数学物理方程的基本问题	1
1.1 数学物理方程的分类及一般性问题	1
1.1.1 基本概念: 古典解、广义解和叠加原理	1
1.1.2 两个自变量二阶线性方程的分类和化简	9
1.1.3 多个自变量线性方程的分类和标准型	16
1.1.4 数学物理方程的一般性问题	19
1.2 波动方程与定解问题的适定性	21
1.2.1 波动方程的 Cauchy 问题	21
1.2.2 非齐次波动方程和推迟势	28
1.2.3 能量不等式和 Cauchy 问题的适定性	30
1.2.4 混合问题解的唯一性和稳定性	33
1.2.5 一般双曲型方程的能量积分	40
1.3 Laplace 方程与 Helmholtz 方程	43
1.3.1 二个自变量的 Laplace 方程和 Hilbert 变换	44
1.3.2 调和函数的基本性质	50
1.3.3 边值问题的适定性	53
1.3.4 Helmholtz 方程与辐射问题	55
1.3.5 一般椭圆型方程的积分估计	59
1.4 热传导方程与 Schrödinger 方程	62
1.4.1 热传导方程的 Cauchy 问题	62
1.4.2 一维热传导方程的混合问题	68
1.4.3 色散型 Schrödinger 方程	70
1.4.4 极值原理和混合问题的适定性	74
1.4.5 一般抛物型方程的能量积分估计	78
1.4.6 三类典型方程定解问题提法比较	80
习题一	83
第 2 章 本征值问题和分离变量法	86
2.1 Hilbert 空间及完备的正交函数集	86
2.1.1 Hilbert 空间和平方可积函数空间	86
2.1.2 完备的正交归一函数集	91

2.1.3	有限区间上的完备系: Legendre 和 Chebyshev 多项式	98
2.1.4	单位球面上的完备系: 球谐函数	104
2.2	微分算子的本征值问题	109
2.2.1	Hermite 对称算子及本征值问题	109
2.2.2	有限个离散谱或混合谱	119
2.2.3	非 Hermite 对称算子: 常微分算子	124
2.2.4	非 Hermite 对称算子: 偏微分算子	127
2.3	Sturm-Liouville 系统和多项式系统	133
2.3.1	Sturm-Liouville 系统	133
2.3.2	Bessel 算子和 Bessel 方程	140
2.3.3	Legendre 算子和 Legendre 方程	143
2.3.4	S-L 多项式系统和 Laguerre 多项式	149
2.3.5	Hermite 多项式	157
2.4	有界区域定解问题的分离变量法	161
2.4.1	波动方程的齐次混合问题	161
2.4.2	热传导和色散型方程的齐次混合问题	166
2.4.3	椭圆型方程的边值问题	171
2.4.4	非齐次问题的本征函数展开	174
2.4.5	非 Hermite 对称算子	180
2.5	正交曲线坐标系中的分离变量	183
2.5.1	球坐标系中的 Laplace 算子	183
2.5.2	圆锥形区域	190
2.5.3	量子力学中的氢原子	193
2.5.4	圆柱坐标系中的 Laplace 算子	197
2.5.5	柱函数: Bessel 函数的几种不同形式	205
2.6	无穷区域的分离变量法	212
2.6.1	无限大区域: 波动方程的 Cauchy 问题	212
2.6.2	半无限大区域: Laplace 方程的边值问题	215
2.6.3	径向无限区域、Hankel 变换和平面波导	221
2.6.4	轴向无限区域和等截面波导	229
2.6.5	波动方程的非衍射解	235
	习题二	240
<b>第 3 章</b>	<b>Green 函数方法</b>	<b>243</b>
3.1	广义函数及 Dirac Delta 函数	243
3.1.1	广义函数概念和运算法则	243

3.1.2	广义函数的导数	250
3.1.3	广义函数的 Fourier 变换	254
3.1.4	弱收敛、弱解和 Dirac Delta 函数序列	257
3.1.5	曲线坐标中的 Dirac Delta 函数	265
3.2	二阶常微分方程的 Green 函数	268
3.2.1	Cauchy 问题的 Green 函数	268
3.2.2	S-L 型方程的边值问题	273
3.2.3	广义 Green 函数	282
3.2.4	非 Hermite 对称算子的边值问题	288
3.3	高维边值问题的 Green 函数	292
3.3.1	非齐次问题的积分公式	292
3.3.2	Helmholtz 方程的 Green 函数	297
3.3.3	无界空间的 Green 函数和基本解	301
3.3.4	镜像法求边值问题的 Green 函数	308
3.3.5	曲线坐标中的基本解	313
3.3.6	运动介质中的基本解	318
3.4	混合问题的含时 Green 函数	323
3.4.1	热导方程的 Green 函数	323
3.4.2	波动方程的 Green 函数	329
3.4.3	Cauchy 问题的基本解	335
3.4.4	运动电荷产生的场	338
3.4.5	径向无限大区域的含时 Green 函数	342
3.5	广义 Green 公式及非齐次问题的积分解	344
3.5.1	广义 Green 公式	344
3.5.2	三维椭圆型方程的 Green 函数	346
3.5.3	抛物型方程的 Green 函数	351
3.5.4	双曲型方程的 Green 函数	358
3.5.5	抛物近似的波动方程	362
	习题三	365
第 4 章	变分近似方法	368
4.1	变分问题和古典法	368
4.1.1	泛函和泛函极值的基本概念	368
4.1.2	多个变量的变分问题	374
4.1.3	变端点问题, 自然边界条件和内部边界条件	381
4.1.4	泛函的条件极值问题	385

4.1.5	Hamilton 原理与最小位能原理	390
4.2	变分法在边值问题中的应用	393
4.2.1	边值问题与变分问题的等价: 正算子	393
4.2.2	变分解的存在性: 正定算子	399
4.2.3	Ritz 近似方法	403
4.2.4	Galerkin 法和非齐次边界问题	409
4.2.5	基于 Galerkin 法的时域问题	414
4.3	变分法在本征值问题中的应用	415
4.3.1	本征值问题与变分问题的等价	415
4.3.2	完备性定理的证明	421
4.3.3	极值定理、本征值与区域的关系	423
4.3.4	Ritz 法和 Galerkin 法	427
4.4	有限元近似方法	432
4.4.1	一维边值问题的有限元法	432
4.4.2	二维边值问题的有限元法	437
4.4.3	基于 Galerkin 法的时域有限元近似	444
4.4.4	本征值问题的有限元近似	445
4.5	变分的其他近似方法	447
4.5.1	Kantorovich 法	447
4.5.2	最速下降法与有界正定算子	451
4.5.3	共轭梯度法	455
4.5.4	矩量法和本征值问题	458
	习题四	463
<b>第 5 章</b>	<b>积分方程及其近似方法</b>	<b>465</b>
5.1	积分方程的形成及分类	465
5.1.1	Volterra 积分方程的形成	465
5.1.2	Fredholm 积分方程的形成	470
5.1.3	积分-微分方程的形成	479
5.1.4	非线性积分方程的形成	483
5.1.5	Abel 方程及第一类积分方程的不适定性讨论	486
5.2	第二类 Fredholm 积分方程的近似方法	489
5.2.1	第二类 Fredholm 方程的迭代法	490
5.2.2	Banach 空间中第二类 Fredholm 方程的迭代技术	493
5.2.3	可分核方程和有限秩核近似	501
5.2.4	矩量法和 Galerkin 近似	512

5.2.5	Nyström 方法	515
5.2.6	非线性积分方程的迭代法	518
5.3	平方可积函数空间中的积分方程	520
5.3.1	Hermite 对称的平方可积核	520
5.3.2	第二类 Fredholm 积分方程及微扰论	527
5.3.3	平方可积 Hermite 对称核的极值性质	531
5.3.4	本征值问题的有限秩近似	533
5.3.5	一般平方可积核	535
5.4	Fourier 变换及其他积分变换	538
5.4.1	Fourier 变换及逆变换	538
5.4.2	分数导数和分数 Laplace 算子	543
5.4.3	分数阶 Fourier 变换	547
5.4.4	Laplace 变换和 Hankel 变换	552
5.4.5	Hilbert 变换及逆变换	557
5.5	边界元近似方法	559
5.5.1	Kirchhoff 边界积分公式	559
5.5.2	位势问题的边界元近似	564
5.5.3	Helmholtz 方程的外边值问题	567
5.5.4	时域边界元近似	571
	习题五	578
<b>第 6 章</b>	<b>微扰方法和渐近展开</b>	<b>581</b>
6.1	本征值问题的微扰和含时微扰	581
6.1.1	算子本身的微扰: 非简并态	581
6.1.2	算子本身的微扰: 简并态	584
6.1.3	边界条件的微扰	591
6.1.4	区域微扰	603
6.1.5	Schrödinger 方程的含时微扰	607
6.2	正则微扰和多尺度展开	610
6.2.1	一致有效展开	610
6.2.2	非一致有效展开和参数变形法	615
6.2.3	参数变形法应用于非线性振动和波动	618
6.2.4	多尺度展开法	622
6.2.5	均质化近似方法	627
6.3	奇异微扰及边界层理论	637
6.3.1	边界层理论的基本思想	637

6.3.2	二阶线性方程的边值问题	642
6.3.3	非线性微扰引起的边界层	648
6.3.4	初值问题的边界层	652
6.3.5	高维边值问题的边界层	658
6.4	WKB 近似方法	667
6.4.1	WKB 近似和 Liouville-Green 变换	667
6.4.2	具有转折点的本征值问题和 Airy 函数	675
6.4.3	非均匀波导中的波	682
6.4.4	层状介质中高频波的传播和激发	687
6.5	射线近似 (几何光学) 方法	696
6.5.1	程函方程和输运方程	697
6.5.2	射线管的能量守恒	703
6.5.3	焦散线附近的波场	705
6.5.4	平面层状介质中的射线	706
	习题六	710
<b>第 7 章</b>	<b>数学物理方程的逆问题</b>	<b>713</b>
7.1	正则化方法和迭代技术	713
7.1.1	逆问题的适定性和分类	713
7.1.2	正则化方法和 Tikhonov 正则化	724
7.1.3	第一类 Fredholm 积分方程的正则化方法	731
7.1.4	脉冲谱迭代技术	733
7.1.5	最佳摄动量迭代技术	735
7.2	抛物型方程的逆问题	738
7.2.1	一维逆问题和 Hausdorff 矩逆问题	738
7.2.2	抛物型方程逆问题的脉冲谱迭代技术	746
7.2.3	抛物型方程逆问题的最佳摄动量法	754
7.2.4	光热测量中热导系数的反演	758
7.2.5	环境污染控制的逆源问题	763
7.3	椭圆型方程的逆问题	765
7.3.1	Cauchy 问题的积分方程法	765
7.3.2	Cauchy 问题的基本解法	769
7.3.3	Cauchy 问题的边界元法	773
7.3.4	椭圆型方程的系数逆问题	776
7.3.5	椭圆方程的逆源问题	784
7.4	波动方程的逆问题	786

7.4.1	系数逆问题的迭代法	786
7.4.2	散射体的散射和 Kirchhoff 近似	793
7.4.3	散射体形状的逆散射	801
7.4.4	非均匀介质的散射, Born 近似和 Rytov 近似	807
7.4.5	介质参数的逆散射	813
7.5	本征值逆问题	817
7.5.1	本征值的渐近特征	817
7.5.2	本征值逆问题的唯一性	822
7.5.3	热导方程系数逆问题的唯一性	826
7.5.4	数值方法	829
7.5.5	高维本征值逆问题	833
	习题七	835
<b>第 8 章</b>	<b>非线性数学物理方程</b>	<b>837</b>
8.1	典型非线性方程及其行波解	837
8.1.1	Burgers 方程及冲击波	837
8.1.2	KdV 方程及孤立波	842
8.1.3	非线性 Klein-Gordon 方程	846
8.1.4	非线性 Schrödinger 方程	851
8.1.5	KdV-Burgers 方程	854
8.2	Hopf-Cole 变换和 Hirota 方法	859
8.2.1	Burgers 方程的 Hopf-Cole 变换	860
8.2.2	KdV 方程的广义 Hopf-Cole 变换	865
8.2.3	KdV-Burgers 方程的广义 Hopf-Cole 变换	869
8.2.4	Hirota 方法	870
8.3	逆散射方法和 Lax 理论	874
8.3.1	一维 Schrödinger 方程的逆散射问题	874
8.3.2	解 KdV 方程初值问题的基本思想	883
8.3.3	KdV 方程初值问题的孤立子解	886
8.3.4	Lax 理论	892
8.4	Bäcklund 变换和非线性迭加	895
8.4.1	Bäcklund 变换的基本思想	895
8.4.2	Sine-Gordon 方程的自 Bäcklund 变换	896
8.4.3	KdV 方程的自 Bäcklund 变换	900
8.4.4	非线性迭加公式	903
	习题八	906
	参考文献	908

# 第 1 章 数学物理方程的基本问题

数学物理方程是源于物理及工程问题的微分方程 (包括常微分方程和偏微分方程). 典型的数学物理方程包括波动方程、输运方程及位势方程 (Laplace 方程). 它们分别描述三类不同的物理现象: 波动 (声波和电磁波)、输运 (热传导和扩散) 和状态平衡 (静电场分布、平衡温度场分布和不可压流体流动的速度势等). 从方程本身来看, 它们又是三类方程, 即双曲型、抛物型和椭圆型方程的最简单例子.

除偏微分方程外, 另一类十分重要的数学物理方程为积分方程, 即方程中含有未知函数  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  积分的方程. 典型的积分方程有第一、第二类 Fredholm 和 Volterra 方程, 我们将在第五章专门讨论之.

本章讨论三类典型数学物理方程的若干基本问题, 主要内容有: 1.1 节讨论数学物理方程的分类并引出定解问题及定解问题适定性的概念, 以后各节分别讨论波动方程、Laplace 方程以及热传导方程的各种定解问题, 重点是解的唯一性和稳定性.

## 1.1 数学物理方程的分类及一般性问题

本节首先简单介绍有关偏微分方程及其解的若干基本概念, 然后讨论二阶线性偏微分方程的分类以及标准形式. 最后在 1.1.6 小节中讨论数学物理方程的一般性问题, 即定解问题以及定解问题适定性概念.

### 1.1.1 基本概念: 古典解、广义解和叠加原理

含有未知函数  $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$  及偏导数的方程称为偏微分方程, 如果方程中出现的偏导数最高阶为  $m$  则称方程为  $m$  阶偏微分方程. 进一步, 如果方程关于  $u$  及  $u$  的各阶偏导数都是线性的, 则称方程为  $m$  阶线性偏微分方程.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$Lu = f \quad (1.1.1a)$$

其中算子  $L$  定义

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \quad (1.1.1b)$$



其中  $a_{ij}, b_i, c$  和  $f$  都是变量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (包括空间和时间变量) 的函数. 当  $f = 0$  时, 称方程 (1.1.1a) 为齐次方程, 否则称为非齐次方程; 如果所有的系数  $a_{ij}, b_i, c$  与变量  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  无关, 则称方程为常系数线性偏微分方程, 它的一个重要性质是平移不变性, 即如果作坐标 (时间或者空间变量) 平移变换

$$(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, \dots, x_n + a_n) \quad (1.1.1c)$$

其中  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  为平移常矢量, 则方程 (1.1.1a) 和 (1.1.1b) 的形式不变. 物理上, 这一性质反映了时空的均匀性.

显然, 可以写出无数偏微分方程, 但并不是每个方程都有它的实际应用. 因此, 我们主要讨论物理和工程中出现的方程, 这样的方程称为数学物理方程. 典型的数学物理偏微分方程有三类: 波动方程、输运方程以及位势方程, 它们分别具有形式

(1) 波动方程

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.2a)$$

(2) 输运 (或热传导) 方程

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t) \quad (1.1.2b)$$

(3) 位势方程

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = h(\mathbf{r}) \quad (1.1.2c)$$

其中  $\nabla^2$  为 Laplace 算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.1.2d)$$

$\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  表示空间变量 ( $n = 1, 2, 3$  分别对应一、二和三维情况),  $t$  表示时间变量, 注意: 在经典物理中, 由于时间变量  $t$  的特殊性, 方程 (1.1.2a) 和 (1.1.2b) 中把时间变量  $t$  单独表示出来, 以区别于空间变量  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $a$  为常量.  $u$  表示某个物理场的时间-空间分布, 例如, 波动方程 (1.1.2a) 中,  $u(\mathbf{r}, t)$  可以表示声场中声压的时间-空间分布; 输运方程 (1.1.2b) 中,  $u(\mathbf{r}, t)$  可以表示温度场中温度的时间-空间分布; 位势方程 (1.1.2c) 中,  $u(\mathbf{r})$  表示稳态温度场中温度的空间分布, 或者静电场中电势的空间分布, 等等. 显然, 以上三个方程是二阶线性偏微分方程 (1.1.1a) 的特例. 注意: 当  $h(\mathbf{r}) = 0$  时, 称方程 (1.1.2c) 为 Laplace 方程, 否则称为 Poisson 方程.

关于 Laplace 算子的讨论.

(1) Laplace 算子的物理内涵 从方程 (1.1.2a)–(1.1.2c) 可以看出, 尽管波动方程、输运方程和位势方程描述完全不同的物理过程, 但它们都包含 Laplace 算子,