现代物理基础丛书 76

数学物理方程及其近似方法（第二版）

程建春 著

科学出版社

现代物理基础丛书　76

数学物理方程及其近似方法

(第二版)

程建春　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统论述了数学物理方程及其近似方法，主要内容包括：数学物理方程的基本问题、本征值问题和分离变量法的基本原理、Green 函数方法、变分近似方法、积分方程及其近似方法、微扰方法和渐近展开、数学物理方程的逆问题，以及非线性数学物理方程.

本书不仅可作为本科生和研究生学习数学物理方程课程的参考书，对从事相关领域科学研究的工作者也有一定的帮助.

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程及其近似方法/程建春著. —2 版. —北京：科学出版社，2016.
(现代物理基础丛书；76)
ISBN 978-7-03-049144-2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①程… Ⅲ. ①数学物理方程 Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 143705 号

责任编辑：刘凤娟 / 责任校对：蒋 萍
责任印制：张 伟 / 封面设计：耕者设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2016 年 6 月第一次印刷 印张：58 1/4
字数：1 151 000

定价：199.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版前言

本书第一版出版于十年前, 实际上成稿于三十前作者给研究生开设的数学物理方程课程, 现在看来修改是必须的. 作者在第二版中对第一版的内容作了全面的修改与补充, 主要增加的内容有下述几个方面.

1. 提高与物理学内容的结合度, 增加了许多处理声学、电磁学以及量子力学方面的例子和章节, 以丰满所述内容, 例如电磁场计算中的矩量法, 量子力学中的近似方法, 声学中的声辐射和声散射, 等等;

2. 增加了有限元和边界元数值计算的基本原理方面的论述. 实际上, 基于变分法的有限元近似和基于积分方程的边界元近似, 在第四、五章中讲述也是顺理成章的. 这两部分内容的增加也使本书更名副其实.

3. 增加了非 Hermite 对称算子理论部分, 这一部分内容在声学和电磁场理论中是非常实用的. 事实上, 在引进波的衰减和边界阻抗后, 声学和电磁场中遇到的实际问题都必须面对非 Hermite 对称的波动算子.

4. 扩展了部分内容, 如第五章介绍了分数导数、分数 Laplace 算子以及分数 Fourier 变换, 而且这一部分内容丰富了 Fourier 变换, 本征值理论, 以及 Hermite 多项式应用. 故作者认为增加这一部分是非常必要的.

5. 全面改写了第七章中关于抛物型方程逆问题、椭圆型方程逆问题和波动方程逆问题的内容, 使之更有深度. 但必须说明的是, 作者在这方面的科研工作较少, 而这方面的内容又较新, 错误是难免的.

作者对第二版的定位是, 本书不仅仅作为教学参考书, 而且通过阅读本书, 能够对读者的科研工作提供一定的帮助.

第一版前言

本书是为研究生学习数学物理方程而编写的. 研究生在本科阶段已学过这方面的课程. 为了避免重复并且达到提高目的, 本书选择内容较深, 讲述方法立足点较高. 特别是引进了若干泛函方面的理论 (例如, 第二章中 Hilbert 空间概念), 并且尽可能给出严格的数学证明 (例如第四章详细证明了本征函数系完备性定理). 当然, 直观的物理描述方法还是占主导地位.

本书分八章, 各章的内容大致如下. 第一章讲述数学物理方程的基本问题, 介绍几个典型定解问题的求解方法. 重点讨论定解问题的适定性 (主要是唯一性和稳定性); 第二章讲述分离变数法基本原理. 首先引进 Hilbert 空间概念 (特别是平方可积函数空间 $L^2[a,b]$). 因为正交函数展开是分离变数法的关键，故第二章对一定函数类按完备的正交归一系展开问题进行了详细的讨论. 本章讨论的另一个十分重要的问题是本征值问题, 特别是 Sturm–Liouville 型本征值问题; 第三章介绍求解定解问题的一个重要方法, 即 Green 函数理论. 本章特别强调的一个问题是如何利用 Green 函数把微分方程化成积分方程; 第四章介绍一种十分有用的近似方法, 即变分近似方法, 它在工程或物理问题中应用广泛; 第五章是关于积分方程的的基本理论, 因微分方程可通过 Green 函数转化成积分方程, 而对积分方程的讨论往往比较简单 (例如讨论解的存在性). 此外, 积分方程在实际问题中也经常出现; 第六章讨论微扰理论, 主要介绍正则微扰 (参数变形法和多尺度展开)、奇异微扰及边界层理论方面的基本概念. 实际问题能严格求解的很少, 因此微扰理论具有实用意义. 这方面的理论相当丰富, 本章仅仅介绍一些基本思想; 第七章介绍目前科学与工程的热点课题，即数学物理方程的逆问题. 介绍逆问题的基本概念和主要方法; 最后, 第八章介绍若干典型的非线性数学物理方程, 特别是这些非线性方程存在的 “孤立波” 解.

整个课程大致需要 120 学时左右. 总的来说, 量比较大. 但因研究生自学能力强, 本书的数学推导详细, 适合于自学. 选择适当的章节, 在 80 学时 (或 60 学时) 内完成教与学的任务是不成问题的.

本书的出版得到国家杰出青年科学基金和南京大学 “985” 工程的资助.

英汉人名对照表

Airy 艾里
Bäcklund 贝克隆
Banach 巴拿赫
Bessel 贝塞尔
Born 玻恩
Brillourin 布里渊
Burgers 伯格斯
Cauchy 柯西
Chebyshev 切比雪夫
Cherenkov 切伦科夫
Cole 科尔
Courant 柯朗
d'Alembert 达朗贝尔
Dirac 狄拉克
Duhamel 杜阿美尔
Euler 欧拉
Fisher 费舍儿
Fourier 傅里叶
Fredholm 弗雷德霍姆
Galerkin 伽辽金
Gauss 高斯
Gelfand 盖尔范德
Gordon 戈登
Goursat 古沙特
Gram 格拉姆
Green 格林
Hamilton 哈密顿
Hammerstein 哈默斯坦
Hankel 汉克尔
Hausdorff 豪斯多夫
Heaviside 赫维赛德
Helmholtz 亥姆霍兹
Herglotz 赫格洛茨
Hermite 厄米
Hilbert 希尔伯特
Hirota 广田
Hopf 霍普夫
Jacobi 雅可比
Kantorovich 康托洛维奇
Kirchhoff 基尔霍夫
Klein 克莱因
Kortweg 考特维克
Kramer 克雷默
de Vries 德弗里
Lagrange 拉格朗日
Laguerre 拉盖尔
Laplace 拉普拉斯
Lax 拉克斯
Legendre 勒让德
Liouville 刘维尔
Lippman 李普曼
Mach 马赫
Neumann 诺依曼
Newton 牛顿
Parseval 帕塞瓦尔
Poisson 泊松
Rayleigh 瑞利
Riesz 里斯
Ritz 里茨
Rutherford 卢瑟福
Rytov 雷托夫
Schmidt 施密特
Schrödinger 薛定谔

Schwartz 施瓦兹
Schwinger 施温格
Stefan 斯特藩
Stirling 斯特林
Sturm 斯图姆
Taylor 泰勒
Tikhonov 吉洪诺夫
Urysohn 乌里申
Volterra 沃尔特拉
Weierstrass 魏尔斯特拉斯
Wentzel 文策尔
Wronski 朗斯基

目 录

第 1 章 数学物理方程的基本问题

数学物理方程是源于物理及工程问题的微分方程 (包括常微分方程和偏微分方程). 典型的数学物理方程包括波动方程、输运方程及位势方程 (Laplace 方程). 它们分别描述三类不同的物理现象: 波动 (声波和电磁波)、输运 (热传导和扩散) 和状态平衡 (静电场分布、平衡温度场分布和不可压流体流动的速度势等). 从方程本身来看, 它们又是三类方程, 即双曲型、抛物型和椭圆型方程的最简单例子.

除偏微分方程外, 另一类十分重要的数学物理方程为**积分方程**, 即方程中含有未知函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 积分的方程. 典型的积分方程有第一、第二类 Fredholm 和 Volterra 方程, 我们将在第五章专门讨论之.

本章讨论三类典型数学物理方程的若干基本问题, 主要内容有: 1.1 节讨论数学物理方程的分类并引出定解问题及定解问题适定性的概念, 以后各节分别讨论波动方程、Laplace 方程以及热传导方程的各种定解问题, 重点是解的唯一性和稳定性.

1.1 数学物理方程的分类及一般性问题

本节首先简单介绍有关偏微分方程及其解的若干基本概念, 然后讨论二阶线性偏微分方程的分类以及标准形式. 最后在 1.1.6 小节中讨论数学物理方程的一般性问题, 即定解问题以及定解问题适定性概念.

1.1.1 基本概念: 古典解、广义解和叠加原理

含有未知函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 及偏导数的方程称为**偏微分方程**, 如果方程中出现的偏导数最高阶为 m 则称方程为 **m阶偏微分方程**. 进一步, 如果方程关于 u 及 u 的各阶偏导数都是线性的, 则称方程为 **m阶线性偏微分方程**.

二阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\boldsymbol{L}u = \boldsymbol{f} \tag{1.1.1a}$$

其中算子 $\boldsymbol{L}$ 定义

$$\boldsymbol{L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{1.1.1b}$$

其中 a_{ij}, b_i, c 和 f 都是变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$(包括空间和时间变量) 的函数. 当 $f = 0$ 时, 称方程 (1.1.1a) 为**齐次方程**, 否则称为**非齐次方程**; 如果所有的系数 a_{ij}, b_i, c 与变量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 无关, 则称方程为**常系数线性偏微分方程**,它的一个重要性质是平移不变性, 即如果作坐标 (时间或者空间变量) 平移变换

$$(x_1', x_2', \cdots, x_n') = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, \cdots, x_n + a_n) \tag{1.1.1c}$$

其中 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为平移常矢量, 则方程 (1.1.1a) 和 (1.1.1b) 的形式不变. 物理上, 这一性质反映了时空的均匀性.

显然, 可以写出无数偏微分方程, 但并不是每个方程都有它的实际应用. 因此, 我们主要讨论物理和工程中出现的方程, 这样的方程称为**数学物理方程.**典型的数学物理偏微分方程有三类: 波动方程、输运方程以及位势方程, 它们分别具有形式

(1) 波动方程

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) = f(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.2a}$$

(2) 输运 (或热传导) 方程

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 u(\boldsymbol{r}, t) = g(\boldsymbol{r}, t) \tag{1.1.2b}$$

(3) 位势方程

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r}) = h(\boldsymbol{r}) \tag{1.1.2c}$$

其中 ∇^2 为 Laplace 算子

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \tag{1.1.2d}$$

$\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 表示空间变量 ($n = 1, 2, 3$ 分别对应一、二和三维情况), t 表示时间变量, 注意: 在经典物理中, 由于时间变量 t 的特殊性, 方程 (1.1.2a) 和 (1.1.2b) 中把时间变量 t 单独表示出来, 以区别于空间变量 $\boldsymbol{r} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, a 为常量. u 表示某个物理场的时间-空间分布, 例如, 波动方程 (1.1.2a) 中, $u(\boldsymbol{r}, t)$ 可以表示声场中声压的时间-空间分布; 输运方程 (1.1.2b) 中, $u(\boldsymbol{r}, t)$ 可以表示温度场中温度的时间-空间分布; 位势方程 (1.1.2c) 中, $u(\boldsymbol{r})$ 表示稳态温度场中温度的空间分布, 或者静电场中电势的空间分布, 等等. 显然, 以上三个方程是二阶线性偏微分方程 (1.1.1a) 的特例. 注意: 当 $h(\boldsymbol{r}) = 0$ 时, 称方程 (1.1.2c) 为 Laplace 方程, 否则称为 Poisson 方程.

关于 Laplace 算子的讨论.

(1) **Laplace 算子的物理内涵**　从方程 (1.1.2a)–(1.1.2c) 可以看出, 尽管波动方程、输运方程和位势方程描述完全不同的物理过程, 但它们都包含 Laplace 算子,