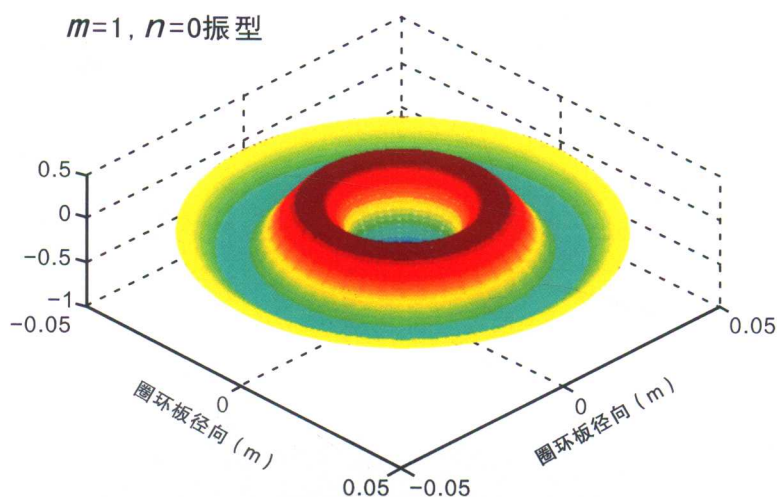


国家自然科学基金资助项目

电阻应变片 六维力传感器 动态耦合特性研究

许德章 著



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

国家自然科学基金资助

电阻应变片六维力传感器 动态耦合特性研究

许德章 著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书获国家自然科学基金“电阻应变片式六维力传感器动态耦合特性研究”项目(51175001)的资助。

本书以电阻应变片六维力传感器为对象,采取弹性体结构分解的方法,运用弹性力学理论,系统地研究了六维力传感器的静力学和动力学特性,获得了静力学和动力学特性的解析解,从理论上揭示了六维力传感器维间静态和动态耦合关系。鉴于谐波激励法测试多维力传感器动态特性的独特优势,书中系统地阐述了谐波电磁发生器的技术原理和工程实现方法。

本书可供从事力学量测量及机器人力感知研究应用的技术人员和研究生参考。

图书在版编目(CIP)数据

电阻应变片六维力传感器动态耦合特性研究/许德章著. —西安:西安电子科技大学出版社, 2015.11

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3859 - 1

I. ①电… II. ①许… III. ①力传感器—耦合—研究 IV. ①TH823

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 222014 号

策划编辑 高樱

责任编辑 马武装

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 虎彩印艺股份有限公司

版 次 2015年11月第1版 2015年11月第1次印刷

开 本 780毫米×960毫米 1/16 印张 9

字 数 166千字

定 价 21.00元

ISBN 978 - 7 - 5606 - 3859 - 1/TH

XDUP 4151001 - 1

*** 如有印装问题可调换 ***

前 言

电阻应变片式多维力传感器，尤其是六维力传感器以其在精度、可靠性和技术成熟性等方面的独特优势，在工程领域获得广泛应用。电阻应变片式多维力传感器的弹性体通常采用组合梁结构，维间耦合输出无法避免，特别是动态耦合特征在理论、测试方法和测试手段等方面都需要系统研究。

在国家自然科学基金“电阻应变片式六维力传感器动态耦合特性研究”项目(51175001)的资助和课题负责人许德章的带领下，由卫然、汪志红、张菀、谢黎峰、朱文超、董跃龙等研究生组成的课题组，在六维力传感器动力学特性、动态耦合特征、动态特性测试方法、动态特性测试手段等方面，做了大量理论和实验研究，取得了预期研究成果。为了系统地展示和有效利用课题组取得的研究成果，由许德章统稿综合了卫然、汪志红、张菀、谢黎峰、董跃龙等同学硕士学位论文主要研究成果，完成了本书。

本书共 8 章，分为电阻应变片六维力传感器力学特性研究，以及动力学特性测试方法和手段研究两部分，内容包括电阻应变片六维力传感器的结构、静力学特性、自由振动分析、受迫振动分析、动态耦合分析、标定实验概述，电磁力激振器建模和参数计算，谐波电磁激振式多维力传感器实验台组成和工作原理。其中，前 5 章综合了卫然、汪志红、谢黎峰和董跃龙同学硕士学位论文的研究成果，后 3 章综合了张菀同学硕士学位论文的研究成果。

向为本书做出实质性贡献的卫然、汪志红、张菀、谢黎峰、朱文超、董跃龙等同学表示衷心感谢！在课题研究过程中，得到了中国科学院合肥智能机械研究所葛运建研究员的悉心指导和汪步运博士的帮助，在此一并表示感谢！

由于作者水平和研究深度有限，不足之处恳请读者和专家批评指正。

作者
于安徽工程大学
2015 年 6 月

主要符号

1. 坐标

- (1) 直角坐标 x, y, z
- (2) 圆柱坐标 ρ, φ, z
- (3) 极坐标 ρ, φ
- (4) 球坐标 r, θ, φ

2. 体力分量

$\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$ (直角坐标), $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi, \bar{f}_z$ (圆柱坐标), $\bar{f}_\rho, \bar{f}_\varphi$ (极坐标)

3. 位移分量

u, v, w (直角坐标), u_ρ, v_φ, w (圆柱坐标), u_ρ, v_φ (极坐标)

4. 边界约束分量

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ (直角坐标)

5. 方向余弦

l, m, n (直角坐标)

6. 应力分量

正应力 σ , 剪应力 τ , 全应力 ρ , 斜面应力分量 p_x, p_y, p_z (直角坐标), σ_N, τ_N , 体积应力 Θ

7. 应变分量

线应变 ϵ , 切应变 γ , 体应变 θ

8. 势能和功

- (1) 应变势能 V_e
- (2) 外力势能 V
- (3) 总势能 E_p
- (4) 功 W
- (5) 动能 E_k
- (6) 应变余能 V_c

9. 应力函数

应力函数 ϕ

10. 模量

弹性模量 E , 切变模量 G , 体积模量 K , 泊松比 μ

11. 材料质量

质量 m , 密度 ρ , 重力加速度 g

12. 薄板弯曲刚度

$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}$, 其中 h 为薄板厚度

目 录

第 1 章	电阻应变片六维力传感器的结构	1
第 2 章	电阻应变片六维力传感器静力学特性	4
2.1	概述	4
2.2	双 E 型膜弹性体结构特点	5
2.3	单一方向载荷作用下, 双 E 型膜弹性体静力学特性分析	5
2.3.1	M_x 单独作用下弹性体静力分析	6
2.3.2	F_x 单独作用下传感器静力分析	10
2.3.3	M_x/M_y 单独作用下传感器静力分析	15
2.3.4	F_x/F_y 单独作用下传感器静力分析	22
2.4	小结	28
第 3 章	电阻应变片六维力传感器自由振动分析	29
3.1	引言	29
3.2	薄板横向自由振动	29
3.3	薄矩形板自由振动	31
3.3.1	瑞利-里兹法(Rayleigh-Ritz Method)	31
3.3.2	薄矩形板自由振动	32
3.4	圆环薄板自由振动	36
3.4.1	贝塞尔函数	36
3.4.2	极坐标下薄板自由振动	39
3.5	上 E 型膜自由振动	41
3.6	下 E 型膜自由振动	46
3.7	小结	50
第 4 章	电阻应变片六维力传感器受迫振动分析	51
4.1	薄板受迫振动	51
4.2	薄矩形板受迫振动	52
4.3	上 E 型膜受迫振动	56
4.3.1	圆薄板受迫振动	56
4.3.2	上 E 型膜受迫振动	57
4.4	下 E 型膜受迫振动	61
4.5	小结	65

第 5 章 电阻应变片六维力传感器动态耦合分析	67
5.1 六维力传感器布片与组桥	67
5.1.1 六维力传感器电阻应变片布置	67
5.1.2 六维力传感器电阻应变片的组桥	68
5.2 M_z 方向动载荷作用下动态输出的分析与处理	70
5.2.1 M_z 主方向动态输出	71
5.2.2 在 M_z 作用下其余五个分方向动态耦合输出	73
5.3 F_z 方向动载荷作用下动态输出的分析与处理	74
5.3.1 F_z 主方向动态输出研究	75
5.3.2 在 F_z 作用下其余五个分方向动态耦合输出	76
5.4 M_x/M_y 方向动载荷作用下动态输出的分析与处理	81
5.4.1 M_y 主方向动态输出研究	81
5.4.2 在 M_x 和 M_y 作用下其余五个分方向动态耦合输出	83
5.5 F_x/F_y 方向动载荷作用下动态输出的分析与处理	87
5.5.1 F_y 主方向动态输出研究	88
5.5.2 在 F_x 作用下其余五个分方向动态耦合输出	89
5.6 小结	97
第 6 章 电阻应变片多维力传感器标定实验概述	98
6.1 冲击响应法	98
6.2 阶跃响应法	99
6.3 频率响应法	99
第 7 章 电磁力激振器建模和参数计算	101
7.1 电磁力激振器磁路建模	101
7.1.1 磁路方程	101
7.1.2 电路方程	102
7.2 电磁力激振器基本参数的确定	103
7.3 电磁力激振器磁路特性仿真计算	105
7.3.1 有限元模型建立	105
7.3.2 仿真结果分析	106
7.3.3 电磁力外特性的仿真研究	107
第 8 章 谐波电磁激振式多维力传感器实验台组成和工作原理	109
8.1 技术方案	109
8.1.1 功能需求	109
8.1.2 电磁激励器的原理	109
8.1.3 加载方式	110
8.2 系统组成和工作原理	112
8.2.1 系统组成	112

8.2.2	工作原理	113
8.3	电磁激振器的机械结构	114
8.4	电磁激振器的控制	115
8.4.1	控制系统工作过程	115
8.4.2	功率放大电路设计	117
8.4.3	电流环控制电路设计	118
8.4.4	电流环控制电路整定	119
8.4.5	正弦激励力控制特性测试	121
参考文献		123

第 1 章 电阻应变片六维力传感器的结构

六维力传感器能够感知三维空间中的全部力信息，即实现对三维正交力 $[F_x F_y F_z]^T$ 和三维正交力矩 $[M_x M_y M_z]^T$ 的同时测量，在机器人、风洞测试和火箭发动机推力测试等领域得到广泛应用^[1-2]。六维力传感器通常采用复合梁结构的弹性体，在外力作用下弹性体产生受力变形，借助贴在弹性体上的电阻应变片感知弹性体受力状态。六维力传感器根据其基本结构可分为竖梁式、平面横梁式、复合梁式、Stewart 结构式、圆筒式和其他结构等。

1976 年美国的 DRAPER 研究所研制的 Waston 六维力传感器是最早的竖梁结构多维力传感器^[3]，如图 1-1 所示。该传感器采用三层结构，分别为顶层圆环、底层圆环和中间的竖梁。工作时，顶层和底层圆环分别与机械臂和机械手连接。当机械手受力时，引起竖梁形变，贴在竖梁上的电阻应变片将力信号转化成电信号，再经过电桥转换产生相应的输出。该传感器结构简单，测量横向力效果较好，但灵敏度不高，且各维力之间存在较为严重的耦合。

20 世纪 70 年代，美国斯坦福大学人工智能研究所最早研制出平面横梁式多维力传感器。该型传感器采用最多的是平面十字梁结构，如图 1-2 所示。该型传感器的弹性体为 Maltess 十字梁结构，它由横向排列成十字架形的四根棱柱应变梁、中心块以及外轮缘构成。当传感器受力时，相应方向的十字梁产生形变，相对两侧的应变片组成检测电桥，输出检测信号。该型传感器对称性好，结构合理，但存在径向效应和标定矩阵为近似解的不足^[4]。

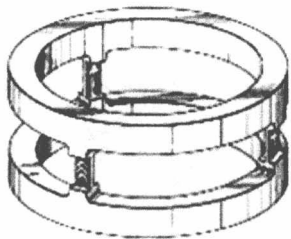


图 1-1 Waston 式传感器

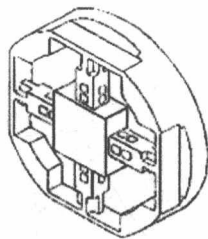


图 1-2 十字梁式传感器

复合梁结构的六维力传感器输出的六个力信号可直接由应变桥测量或根据结构参数通过简单计算求得。其原理是在力学分析的基础上，设计出自解耦结构的传感器，典型代表是美国 SIR 公司于 1973 年设计的积木式结构，如图 1-3 所示。该型传感器维间不存在耦合，但是复杂的弹性体组合结构使加工精度和装配精度对其影响很大，滞后和累积误差也较大^[5]。

Stewart 型多维力传感器是一种典型的并联机构多维力传感器,如图 1-4 所示。该型传感器弹性体结构由上下两个圆形平台与六根弹性梁构成,电阻应变片贴于连接圆形平台与弹性梁的球形铰链处。该型传感器的优点是负载能力相对较高,但存在弹性体组合形式所带来的组合形变、滑动位移等缺点^[6]。

圆筒结构的多维力传感器主要用于测量切削力,因此可以承受较大的载荷,但是结构复杂,加工困难,刚度较低,如图 1-5 所示^[7]。

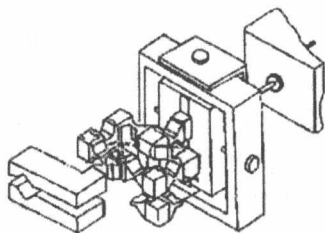


图 1-3 积木式传感器

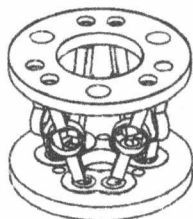


图 1-4 Stewart 型传感器

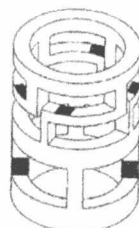


图 1-5 圆筒型传感器

本书以中科院合肥智能所研制的双 E 型六维力传感器为研究对象,其实物照片见图 1-6,弹性体结构见图 1-7。该传感器由底座 1、下 E 型膜 2、中心支柱 3、上 E 型膜 4、中间传力环 5、薄矩形板 6 及上传力环 7 组成。其中,传感器底座 1 与下转接板刚性连接;中心支柱 3 连接上下两 E 型膜;中间传力环 5 连接上 E 型膜 4 和四片薄矩形板 6;薄矩形板 6 则连接在中间传力环 5 与上传力环 7 之间;上传力环 7 与上转接板连接,外界载荷即施加在它上面。上 E 型膜用于检测切向力矩 M_x 和 M_y ;下 E 型膜用于检测法向力 F_z 和切向力 F_x 、 F_y ;薄矩形板用于检测法向力矩 M_z 。双 E 型六维力传感器弹性体结构参数见表 1-1,材料采用硬铝合金(LY12),其性能参数如表 1-2 所示。

依据双 E 型六维力传感器弹性体结构,可以将其分解为三个子梁,下面分别研究它们的静力学和动力学特性。

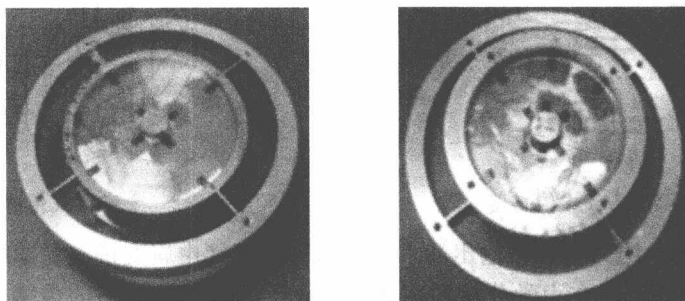


图 1-6 双 E 型六维力传感器实物照片

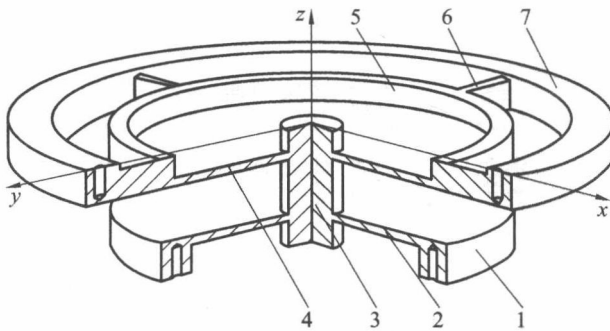


图 1-7 双 E 型六维力传感器弹性体结构简图

表 1-1 双 E 型六维力传感器弹性体结构参数

mm

	外径	内径	长度	宽度	厚度
上 E 型膜	100	15	—	—	2
下 E 型膜	100	15	—	—	2
薄矩形板	—	—	20	8	1.5
整体	150	—	—	—	35

表 1-2 材料 LY12 性能参数

弹性模量/GPa	剪切弹性模量/GPa	泊松比/ μ	密度/(kg/m^3)
72	27	0.33	2.78×10^3

第 2 章 电阻应变片六维力传感器 静力学特性

2.1 概 述

根据机器人工作环境,六维力传感器受力可分为静态力和动态力两种工作状态。当作用于六维力传感器上的力不随时间变化或变化非常缓慢时,可认为传感器工作于静态力状态,反之则认定传感器工作于动态力状态。因六维力传感器是借助组合梁变形来探测外界作用力的,因此深入研究六维力传感器弹性体在静态力和动态力作用下的力学特性,对于弹性体结构优化,提高传感器性能具有重要理论意义和工程应用价值。

针对多维力传感器静态性能,国内外学者做了比较深入的探讨和研究,取得了很多有价值的研究成果。1989年日本 T. Yoshikawa 教授等人设计出一种由相互垂直的两根竖梁和四根横梁组成的组合梁式多维力传感器,运用材料力学梁的弯曲变形理论,详细推导了传感器在单方向力或单方向力矩,以及力和力矩共同作用下,传感器弹性体的应力及应变表达式^[8]。1998年,韩国标准与科学研究所和汉阳大学研制出一种组合型传感器,其上半部分测量 F_z 、 M_x 、 M_y ,下半部分测量 F_x 、 F_y 、 M_z ,并运用材料力学相关理论,详细分析了在受到空间各维力作用的情形下,弹性体受力和应力关系^[9]。2001年台湾大叶大学 Sheng A. Liu 等人设计出一种 T 形梁结构六维力传感器,运用有限元法确定其最优尺寸,借助 ANSYS 软件计算出传感器应变片粘贴位置,从而求解传感器静态标定矩阵 C ^[10]。2003年合肥工业大学干方建针对十字梁六维力传感器,运用材料力学梁的弯曲变形理论,采用解析法详细分析了在空间六方向载荷单独作用下,传感器各弹性体受力及弯曲变形情况,并得出解析解表达式,再根据解析解表达式求出传感器标定矩阵 C ,且得到实验验证^[11]。2005年许德章教授运用矩阵摄动理论,详尽论证了解耦矩阵 C 中各元素相对值大小对六维力传感器测量精度的影响,得出“在六个分方向上增益一致的情况下,测量精度最理想”的结论,获得中科院合肥智能所戈瑜研究员的高度重视,并作为多维力传感器结构设计的重要依据^[12]。2007年东南大学宋爱国教授等人设计出一种低耦合度的四维力传感器,并分别采用材料力学理论和有限元法分析了传感器维间耦合关系^[13]。2010年,机器人传感器国家重点实验室梁康桥等人分别运用材料力学、弹性力学及有限元法,分析了双 E 型膜六维力传感器在静态力作用下的应力和应变,并通过实验标定,确定了静态维间耦合关系^[14]。

综上所述,针对六维力传感器静力特性分析,目前常用方法有解析法、数值法和实验法。

(1) 解析法。通常采用材料力学或弹性力学理论,分析弹性体受力状态,以及应力和应变。

(2) 数值法。常用的数值法一般采用有限元法,运用 ANSYS 等有限元分析软件,对弹性体在静态力作用下的应力和应变进行计算和分析^[15]。

(3) 实验法。将多维力传感器看成黑匣子,通过实验得出输入和输出关系,并进行建模。采用此方法时,通常需事先选择传感器的模型及系统阶次,模型中的待定系数则通过实验数据来确定^[16]。

上述三种方法的优缺点都相当明显。其中,数值法精度比较理想,但通用性比较差,只适合弹性体结构和尺寸已确定的情形;实验法在精度和通用性方面都存在明显不足,只能作为验证手段;解析法在精度和通用性方面具有明显优势,但表达式过于复杂,限制了其在工程领域的应用。另外,国内外在解析法方面的研究成果零星地散落在学术论文等文献中,没有形成比较系统的理论体系,给工程应用带来很大困难。

本书以双 E 型膜弹性体结构的六维力传感器为对象,运用弹性力学等理论,详细讨论了六维力传感器在静态力作用下的解析解,并借助有限元法验证解析解的正确性,为六维力传感器静力特性分析提供完整范例。

2.2 双 E 型膜弹性体结构特点

本书研究的对象为双 E 型膜弹性体的六维力传感器,如图 1-6 所示。应变片六维力传感器的核心部件为弹性体,用于感知外界载荷并产生形变,再由贴在弹性体上的电阻应变片检测弹性体形变,用于探测六维力传感器受到的外界载荷。双 E 型膜六维力传感器结构如图 1-7 所示。

依据双 E 型弹性体结构,传感器可分为两部分:一是组合梁,包括上 E 型膜、下 E 型膜及薄矩形板,用于感知外界作用力;二是连接件,包括底座、中心支柱、中间传力环和上传力环,相对于组合梁变形很小,可认为刚体用于传递力。其中,组合梁可分为上 E 型膜 4、下 E 型膜 2 和薄矩形板 6 三个简单子梁。在六个方向力/力矩作用下,三个子梁都存在相应的敏感方向,即分别对应某一方向灵敏度最高。如,在 M_z 力矩作用下,薄矩形板 6 变形最大,上 E 型膜 4 和下 E 型膜 2 变形较小;在 F_x 力作用下,薄矩形板 6 变形较小,上 E 型膜 4 和下 E 型膜 2 变形较大等。

2.3 单一方向载荷作用下,双 E 型膜弹性体静力学特性分析

力传感器在其工作量程范围内,变形都很小,并处于其材料变形的线性范围内,外力与弹性体的变形之间呈线性关系。空间任意力 F 可表示成空间六维力的矢量形式:

$$\mathbf{F} = [F_x F_y F_z M_x M_y M_z]^T$$

即空间任意力 \mathbf{F} 可以分解为六个方向分力。为了深入探讨六维力传感器静力学特性，可以逐一分析单一方向力作用下，弹性体的应力和应变，再依据线性特性进行合成，获得空间任意力作用下六维力传感器的静力学特性。

2.3.1 M_z 单独作用下弹性体静力分析

1. 传感器受力分析

当传感器受力矩 M_z 作用时，等效为外力 F 作用在上传力环螺孔位置，其加载形式如图 2-1 所示。因传感器结构的对称性，四片薄矩形板对上传力环的反作用力相等，分别记为 F_{11} 和 M_{11} 。将上传力环作为隔离体提取出来，它所受外力有 F 、 F_{11} 及 M_{11} ，受力分析如图 2-2 所示。根据刚体静力学平衡及力的平移定理，有

$$\begin{cases} F_{11} = F \\ M_{11} = Fl_1 \end{cases} \quad (2-1)$$

其中： l_1 为力作用点到上传力环内边界的距离。

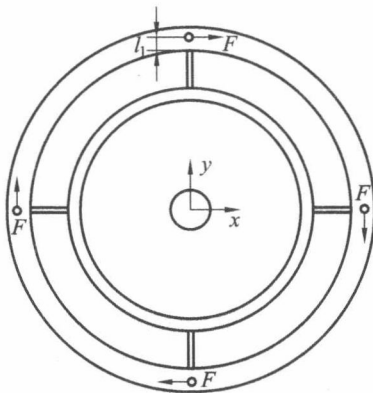


图 2-1 M_z 加载示意图

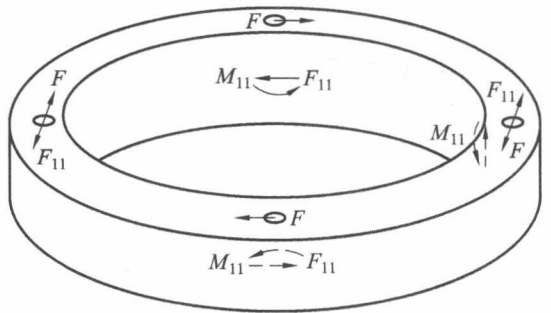


图 2-2 上传力环受力图

四片薄矩形板受力情况相同，现取 x 轴正方向的薄矩形板进行分析。设其在直角坐标系中的位置如图 2-3 所示。根据上传力环隔离体受力分析图及作用力与反作用力关系，薄矩形板力学模型可看成一端固定，另一端受均匀剪力 Q_1 和弯矩 M_1 作用的悬臂薄板。传感器上 E 型膜为圆环薄板，分析过程中将圆环薄板内边界看成固定，外边界受到由中间传力环传递的均匀剪力，力学模型如图 2-4 所示，即内边界固定，外边界受均匀剪力 q_1 作用。下 E 型膜也为圆环薄板，底座与下转接板刚性连接，可认为下 E 型膜外边界固定，内边界受到由中心支柱传递的外力，力学模型如图 2-5 所示，即外边界固定，内边界受均匀剪力 q_2 作用。

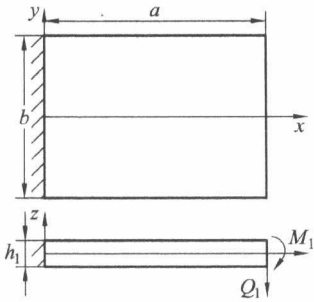


图 2-3 薄矩形板受力模型

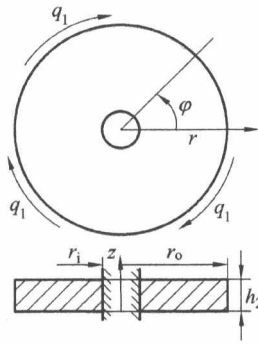


图 2-4 上 E 型膜受力模型

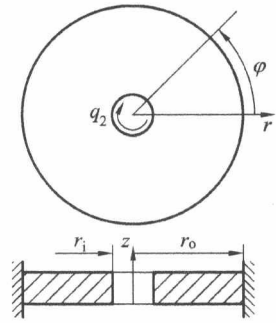


图 2-5 下 E 型膜受力模型

2. 薄矩形板变形分析

因为弹性体四个矩形板在传感器中对称布置，且受到的载荷也成对称特征，因此只要分析其中一个矩形板。以图 1-7 所示位置的矩形板为例，建立其在 M_x 作用下的力学模型。图 2-3 所示矩形板的边界条件和载荷沿 y 方向均没有变化，在受到 M_x 作用后只会形成沿 x 轴方向的弯曲变形，其挠度函数仅以 x 为变量。根据薄板小挠度弯曲理论，薄板弹性曲面微分方程为

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (2-2)$$

边界条件为

(a) $x = 0$ 处, $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$; 挠度和转角均为零。

(b) $x = a$ 处, $M_x = M_1 = -D \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{Fl_1}{b}$, $V_x = Q_1 = -D \frac{d^3 w}{dx^3} = \frac{F}{b}$, 边界为已知条件, 其中 D 为薄板矩形弯曲刚度, Q_1 为图 2-3 梁右端面均布剪力, F 为图 2-3 梁右端面均布剪力的等效集中载荷。

计算得薄矩形板挠度为

$$w(x) = \frac{2F(1-\mu^2)(3a-3l_1-x)x^2}{Eh_1^3 b} \quad (2-3)$$

根据挠度、内力及应力应变间的关系，得到薄矩形板应力和应变如下：

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{-12F(a-l_1-x)z}{bh_1^3} \\ \sigma_y = \frac{-12F\mu(a-x)z}{bh_1^3} \\ \tau_{xy} = 0 \\ \epsilon_x = \frac{-12F(1-\mu^2)(a-l_1-x)z}{Ebh_1^3} \\ \epsilon_y = \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

3. 上 E 型膜变形分析

图 2-4 为在 M_z 作用下上 E 型膜受力模型, 属于极坐标下的平面应力问题, 可采用应力函数法求解。设应力函数表达式为: $\Phi(x, y) = q_1 r_o^2 \varphi$, 经验证该应力函数能够满足相容方程及其应力边界条件, 进而可以求出上 E 型膜位移

$$\begin{cases} u_r(r, \varphi) = 0 \\ u_\varphi(r, \varphi) = \frac{Fr_o}{G\pi r_i^2} \frac{r_i^2 - r^2}{r} \end{cases} \quad (2-5)$$

得到上 E 型膜应力及应变计算表达式

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_\varphi = 0 \\ \tau_{r\varphi} = -\frac{2Fr_o}{\pi} \frac{1}{r^2} \\ \epsilon_r = \epsilon_\varphi = 0 \\ \gamma_{r\varphi} = -\frac{2Fr_o}{G\pi} \frac{1}{r^2} \end{cases} \quad (2-6)$$

4. 下 E 型膜变形分析

图 2-5 为在 M_z 作用下下 E 型膜受力模型, 同样属于平面应力问题, 也可运用应力函数法求解。设应力函数为 $\Phi(x, y) = q_2 r_i^2 \varphi$, 经验证该应力函数满足相容方程和应力边界条件, 从而求得下 E 型膜位移为

$$\begin{cases} u_r(r, \varphi) = 0 \\ u_\varphi(r, \varphi) = -\frac{Fr_i}{G\pi h_2 r_o^2} \frac{r_o^2 - r^2}{r} \end{cases} \quad (2-7)$$

进而得到下 E 型膜应力和应变计算表达式

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma_\varphi = 0 \\ \tau_{r\varphi} = -\frac{2Fr_i}{\pi h_2} \frac{1}{r^2} \\ \epsilon_r = \epsilon_\varphi = 0 \\ \gamma_{r\varphi} = -\frac{2Fr_i}{G\pi h_2} \frac{1}{r^2} \end{cases} \quad (2-8)$$

5. M_z 作用下仿真及分析

因为电阻应变片粘贴在传感器弹性体表面位置, 所以仅需计算弹性体表面的弯曲挠度及应力应变即可。取式(2-1)中的 $F = 50\text{N}$, 折算成 $M_{11}(M_z)$ 加载到传感器上, 选取 $z = h_1/2$, 代入式(2-4), 结合式(2-3)、式(2-5)~式(2-8)计算, 得到各弹性体挠度及形变表达式。采用 MATLAB 软件对各表达式进行仿真, 得到薄矩形板挠度和应变仿真图, 以及上 E 型膜和下 E 型膜的平面位移及应变仿真图, 结果如图 2-6 所示。