# 线性代数

主 编◎徐之晓　梁海明　陈 凡

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 线 性 代 数

主　编　徐之晓　梁海明　陈　凡
副主编　刘荣华　丁本艳
主　审　秦宏立

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内 容 简 介

本书是根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求编写而成的。本书主要内容包括矩阵及其运算、矩阵的初等变换、行列式、矩阵的秩与线性方程组、向量空间、相似矩阵与二次型以及与这些内容相对应的 MATLAB 应用。此外，每章后面都给出本章知识结构与内容提要，便于学生从全局方面把握本章的内容，并且配备有相应的不同难度和目标要求的习题。同时，我们还在书后汇编了 2007 - 2016 年全国硕士研究生入学统一考试线性代数试题，并附有各章习题的参考答案。

本书内容丰富，阐述深入浅出，简明扼要，注重理论联系实际，可作为高等院校理工、经管类各专业线性代数课程的教材或教学参考书，也可作为硕士研究生入学考试和其他相关人员的参考书。



**图书在版编目（CIP）数据**

线性代数/徐之晓，梁海明，陈凡主编. —北京：北京理工大学出版社，2016. 8
ISBN 978 - 7 - 5682 - 3000 - 1

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①徐… ②梁… ③陈…　Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 教材　Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 205291 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址／http：//www. bitpress. com. cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／三河市天利华印刷装订有限公司
开　　本／787 毫米 × 1092 毫米　1/16
印　　张／11. 5
字　　数／267 千字
版　　次／2016 年 8 月第 1 版　2016 年 8 月第 1 次印刷
定　　价／38. 00 元

责任编辑／梁铜华
文案编辑／孟祥雪
责任校对／孟祥敬
责任印制／马振武

# 前　　言

线性代数是我国高等院校理工类、经管类等专业必不可少的一门数学基础课程. 它的理论和方法已经成为科学研究和处理工程技术各领域问题的重要工具. 为了适应我国高等教育飞速发展的需求和满足社会对高校应用型人才培养的要求，也为了使学生能更好地掌握线性代数的基本理论和方法，培养学生利用线性代数分析问题和解决问题的能力，编者根据高等教育本科线性代数课程的教学基本要求，同时兼顾全国硕士研究生入学考试对线性代数的要求编写了这本《线性代数》教材.

考虑到高等院校非数学专业的学生学习本课程的目的主要在于加强数学基础及便于实际应用，在本书的编写过程中，我们做了以下几个方面的努力：

1. 在保持线性代数体系的完整性和结构的合理性的前提下，重组教学内容，理顺线性代数的基本概念和基本内容，淡化理论的推导. 注重概念的直观性和方法的启发性，尽可能做到阐述深入浅出，简明扼要，语言准确，易于学生理解.

2. 加入实际应用例题和习题，培养学生运用线性代数解决实际问题的意识和能力，突出了“以应用为目的”的思想.

3. 每章都加入“本章知识结构与内容提要”，给出本章的知识结构，提纲挈领，一目了然，便于学生从全局把握本章的内容.

4. 结合每章内容，介绍数学软件 MATLAB 在线性代数计算中的使用方法，使学生在掌握线性代数知识的基础上，能够使用计算机软件解决线性代数问题.

5. 在每章的习题配置上，既注重对教材基本知识和基本方法的训练，又兼顾适当的延伸和提高. 同时，我们还为考研的同学汇编了 2007 – 2016 年全国硕士研究生入学统一考试线性代数试题.

本书共分六章：第一章介绍矩阵及其运算，第二章介绍矩阵的初等变换，第三章介绍行列式，第四章介绍矩阵的秩与线性方程组，第五章介绍向量空间，第六章介绍相似矩阵与二次型. 另外，我们还在书后汇编了 2007 – 2016 年全国硕士研究生入学统一考试线性代数试题，并附有各章习题的参考答案.

参加本书编写的是徐之晓、梁海明、陈凡、刘荣华以及丁本艳，其中徐之晓老师设计了编写提纲，列出章节目录，并最后对全书进行修改补充、统稿定稿. 本书由徐之晓、梁海明和陈凡担任主编，秦宏立担任主审.

本书在编写过程中，参考了大量的相关文献资料和教材，并选用了其中的部分内容、

例题和习题，在此谨向有关作者和编者一并表示感谢！

由于编者水平有限，本书在体系、结构和内容上难免有不当之处，恳请广大读者批评指正，以使本书能够在教学实践中不断完善.

编　者

# 目　录

# 第一章　矩阵及其运算

在线性代数中，矩阵是主要的研究对象之一. 同时，它也是研究向量的线性相关性、线性方程组的解法和二次型等的有力且不可替代的工具. 矩阵理论在现代数学的各个分支以及经济管理和工程技术等许多领域也有着广泛的应用. 本章首先介绍矩阵的概念、运算及其性质，然后给出可逆矩阵和分块矩阵的基本理论，最后简单介绍数学软件 MATLAB 在矩阵中的一些应用.

## 1.1　矩阵的概念

### 1.1.1　矩阵的定义

什么是矩阵呢？它实际上就是我们在实际生产生活中熟悉的各种矩形表格的抽象.

例如，在某个地区有两个供货商 A，B 向同一个地区的三个超市甲、乙、丙供应商品，在第一季度的商品供应情况如下表：

| 超市 / 供货商 | 甲 | 乙 | 丙 |
|---|---|---|---|
| A | 200 | 130 | 240 |
| B | 220 | 300 | 180 |

为了方便分析，我们将上表中的核心部分——数据，按原来的次序排列成 2 行 3 列的矩形数表，并加上圆括弧（或方括弧）以表示这些数据是一个整体，于是得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 200 & 130 & 240 \\ 220 & 300 & 180 \end{pmatrix}.$$

**定义 1.1**　由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,3,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,n)$ 按一定的次序排成 $m$ 行 $n$ 列，并括以圆括弧（或方括弧）的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**. 这 $m\times n$ 个数称为矩阵(1.1)的**元素**，$a_{ij}$ 称为矩阵(1.1)的**第 $i$ 行第 $j$ 列元素**.

通常用大写黑体的英文字母表示矩阵. 矩阵(1.1)可简记为 $\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,有时为了强调矩阵的行数和列数,矩阵(1.1)也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n}$.

元素是实数的矩阵称为**实矩阵**. 元素是复数的矩阵称为**复矩阵**. 本书中的矩阵除特别说明外,都指实矩阵.

如果两个矩阵具有相同的行数与相同的列数,则称这两个矩阵为**同型矩阵**.

**定义 1.2** 如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ **相等**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

下面举几个关于矩阵应用的例子.

**例 1.1** 某工厂生产Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ三种产品,它们的生产成本由原材料费用、工人工资和杂项费用构成,每种产品的每项费用如下表:

| 生产成本 \ 产品 | Ⅰ | Ⅱ | Ⅲ |
|---|---|---|---|
| 原材料费用/百元 | 12 | 18 | 20 |
| 工人工资/百元 | 2 | 3 | 4 |
| 杂项费用/百元 | 1 | 3 | 2 |

可用费用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}12&18&20\\2&3&4\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

**例 1.2** 某班级中 4 名学生的 4 门课程的成绩如下表:

| | 数学 | 语文 | 物理 | 体育 |
|---|---|---|---|---|
| 张洋 | 90 | 90 | 86 | 85 |
| 徐莱 | 87 | 90 | 80 | 80 |
| 李冰 | 96 | 82 | 85 | 83 |
| 王童 | 85 | 89 | 92 | 88 |

可用成绩矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}90&90&86&85\\87&90&80&80\\96&82&85&83\\85&89&92&88\end{pmatrix}.$$

### 1.1.2　几类特殊矩阵

(1)行数与列数都等于 $n$ 的矩阵称为 **$n$ 阶矩阵**或 **$n$ 阶方阵**,$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也记为 $\boldsymbol{A}_n$. 特别地,一阶方阵看作一个数.

(2)只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n)$$

称为**行矩阵**或**行向量**. 为避免元素间的混淆,行矩阵也记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

(3)只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**或**列向量**.

(4)所有元素都是零的矩阵称为**零矩阵**,记为 $\boldsymbol{O}$.

**注**:不同型的零矩阵是不同的.

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $n$ 阶方阵时,从左上角到右下角的直线称为**主对角线**,位于主对角线上的元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线元素**.

(5)若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的主对角线左下侧所有元素都是零,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶**上三角形矩阵**或**上三角阵**,即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 的主对角线右上侧所有元素都是零,则称 $\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶**下三角形矩阵**或**下三角阵**,即

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

(6)若一个 $n$ 阶方阵除主对角线上的元素之外,其余元素都是零,则称此矩阵为 $n$ 阶**对角矩阵**或**对角阵**,通常用 $\boldsymbol{\Lambda}$ 表示,即

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix},$$

对角矩阵也记为

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

(7) $n$ 阶方阵

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}$$

称为 $n$ 阶**数量矩阵**.

(8) $n$ 阶方阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

称为 $n$ 阶**单位矩阵**,记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$.

**注**:上三角阵、下三角阵、对角阵、数量矩阵和单位矩阵中主对角线以外的零元素可以省略不写.

## 1.2 矩阵的运算

### 1.2.1 矩阵的加法

**例 1.3** 两种物资(单位:吨)同时从 3 个产地运往 4 个销地,其调运方案分别为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ 5 & 3 & 2 & 7\\ 2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 8 & 6\\ 1 & 2 & 5 & 7\end{pmatrix}.$$

则从 3 个产地运往 4 个销地的两种物资调运总量(单位:吨)为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3 & 4\\ 5 & 3 & 2 & 7\\ 2 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 0 & 8 & 6\\ 1 & 2 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+3 & 0+1 & 3+2 & 4+0\\5+4 & 3+0 & 2+8 & 7+6\\2+1 & 1+2 & 0+5 & 3+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1 & 5 & 4\\9 & 3 & 10 & 13\\3 & 3 & 5 & 10\end{pmatrix}.$$

**定义 1.3** 设有两个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**和**记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}.$$

**注：**只有当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算.

矩阵的加法满足下列运算规律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 的矩阵）：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$，即

$$-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\-a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\-a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn}\end{pmatrix}.$$

(3) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

(4) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

**注：**零矩阵 $\boldsymbol{O}$ 在矩阵的加法中与数 0 在数的加法中起着类似的作用.

**定义 1.4** 两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 的**减法**为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij}).$$

### 1.2.2 数与矩阵的乘法

**定义 1.5** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k$ 为一个数，那么**数 $k$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积**，简称为**数乘矩阵**，记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，规定为

$$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n}\\ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

**注：**

(1) 数与矩阵的乘法是用数乘以矩阵的每个元素；

(2) 负矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 可以用 $(-1)\cdot\boldsymbol{A}$ 来描述；

(3) $n$ 阶数量矩阵可记作 $\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \boldsymbol{E}$.

数与矩阵的乘法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$k,l$ 是两个常数):

(1) $k(l\boldsymbol{A}) = (kl)\boldsymbol{A} = l(k\boldsymbol{A})$;

(2) $(k+l)\boldsymbol{A} = k\boldsymbol{A} + l\boldsymbol{A}$;

(3) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = k\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{B}$;

(4) $1\cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

**注:**矩阵的加法与数乘矩阵统称为矩阵的**线性运算**.

**例 1.4** 已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,求 $2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}$.

**解** 
$$2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 7 \\ 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.3 矩阵的乘法

**例 1.5** 某地区有四个工厂(编号 1,2,3,4),生产三种产品(编号甲、乙、丙),矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示一年中各工厂生产各种产品的数量,矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示各种产品的单位价格(元)及单位利润(元),试求各工厂的总收入及总利润.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{ik}(i=1,2,3,4;k=1,2,3)$ 是第 $i$ 个工厂生产第 $k$ 种产品的数量,$b_{k1}$ 及 $b_{k2}(k=1,2,3)$ 分别是第 $k$ 种产品的单位价格及单位利润.

**解** 设矩阵

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix},$$

其中 $c_{i1}$ 及 $c_{i2}$ 分别是第 $i$ 个工厂生产三种产品的总收入及总利润. 则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的元素之间有下列关系:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \\ c_{41} & c_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \\ a_{41}b_{11}+a_{42}b_{21}+a_{43}b_{31} & a_{41}b_{12}+a_{42}b_{22}+a_{43}b_{32} \end{pmatrix},$$

其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}(i=1,2,3,4;j=1,2,3),$$

即 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

**定义 1.6**　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $C=(c_{ij})$,其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

并把此乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

**注:**

(1)只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘;

(2)矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的元素 $c_{ij}$即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j$ 列对应元素乘积的和.

**例 1.6**　已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=(4,5,6)$,求 $\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{BA}$.

**解**　根据矩阵的乘法公式,有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(4,5,6)=\begin{pmatrix}1\times4 & 1\times5 & 1\times6\\2\times4 & 2\times5 & 2\times6\\3\times4 & 3\times5 & 3\times6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\\8 & 10 & 12\\12 & 15 & 18\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=(4,5,6)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=4\times1+5\times2+6\times3=32.$$

**注:**矩阵的乘法不一定满足交换律.

对于两个 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$,若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**可交换的**.

例如,对于 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\1 & 3\end{pmatrix}$,总有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & -4\\2 & 6\end{pmatrix}$.

**例 1.7**　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

**解**　根据矩阵的乘法公式,有

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & -32\\8 & 16\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

**注：**

(1)矩阵 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，可有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 从而，若有两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，不一定有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

(2)若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，不一定有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

矩阵乘法的运算规律(假设运算都是可行的)：

(1)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$；

(2)$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$；

(3)$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$；

(4)$\boldsymbol{E}_m A_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

(5)$\boldsymbol{O}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n},\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{O}_n=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

**注：**由运算规律(4)可见单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在矩阵乘法中的作用类似于数1.

**定义 1.7** 变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n,\\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases}\tag{1.2}$$

称为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的**线性变换**，其中 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为常数. 线性变换式(1.2)的系数 $a_{ij}$构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$称为线性变换(1.2)的**系数矩阵**.

设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix},$$

则线性变换式(1.2)可表示为矩阵形式：

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}.\tag{1.3}$$

显然，线性变换与其系数矩阵之间存在一一对应关系.

设由变量 $x_1,x_2,x_3$ 到变量 $y_1,y_2$ 的线性变换

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3,\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax};$$

另设由变量 $y_1,y_2$ 到变量 $z_1,z_2,z_3$ 的线性变换