

文科

高等数学

WENKE
GAODENG SHUXUE

刘淑环◎编著

高等院校通识教育系列丛书



中国政法大学出版社



高等院校通识教育系列丛书

文科

高等数学

WENKE
GAODENG SHUXUE

刘淑环◎编著



中国政法大学出版社

2016·北京

声 明 1. 版权所有，侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题，由出版社负责退换。

图书在版编目（C I P）数据

文科高等数学/刘淑环编著. —北京：中国政法大学出版社，2016. 8
ISBN 978-7-5620-6951-5

I. ①文… II. ①刘… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第192064号

出 版 者	中国政法大学出版社
地 址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮 箱	fadapress@163.com
网 址	http://www.cuplpress.com (网络实名：中国政法大学出版社)
电 话	010-58908435 (第一编辑部) 58908334 (邮购部)
承 印	北京华联印刷有限公司
开 本	720mm × 960mm 1/16
印 张	14.25
字 数	247 千字
版 次	2016 年 8 月第 1 版
印 次	2016 年 8 月第 1 次印刷
印 数	1 ~ 3000 册
定 价	38.00 元

出版说明

在高等教育中，通识教育对于人才培养具有基础性价值和决定性作用。故此，中国政法大学早在 2005 年就正式启动了通识教育改革，此次改革承继了 20 世纪 90 年代开启的文化素质教育。在学校“打造有灵魂的通识教育”“建设有法大特色的通识教育课程体系”的两大改革目标指引下，在全校各方共同努力下，历经持续不断的艰苦摸索，学校通识教育课程体系终于从无到有，逐渐呈现出一种科学系统且生机勃勃的发展状态。

作为一所以法学专业为主的多科性大学，学校通识教育的资源相对匮乏。对于这一客观缺陷，学校并未盲目扩张，而是凭借“专业互通”的理念开放专业课程，以其作为其他专业的通识课，如此循序渐进，补足通识教育资源。同时，学校以《中华文明通论》《西方文明通论》这两门跨学科、综合性的全校必修课为基础，打造了通识教育四大类课程体系——人文素质类、社会科学类、自然科学类、法学类。而后又进一步围绕着四大类课组，纵向建立了“通识主干课”“一般通识课”两种类型的选修课。

经过十余年的实践探索，学校对于通识教育有了更加深入、立体的理解和认识，希望通过“高等院校通识教育系列丛书”这一全新的系列教材，达成以下目标：

1. 总结过往经验，修正教学实践中发现的问题。在十余年实践过程中，广大师生对通识教育课程反馈了大量有益信息，学校认为有必要在此基础上，将渐成体系的教案加以完善，升级为更为成熟、更为系统的教材。而在教材的后续使用过程中，也会获得进一步的有关教学效果的反馈信息，使得本系列教材不断修正、完善。

2. 完善通识教育课程体系，更好地服务教学。通识课的课程特性、课时等因素，导致学生在接受知识时难免有“点到为止、浮光掠影”之感。对此，学

校希望通过编写体例明朗、脉络清晰的通识课程配套教材，来帮助学生梳理所学知识，构建基本框架与知识体系，从而能够在现有基础上提高教学质量。

3. 扩大影响，增加交流合作的机会。学校之所以将本系列教材命名为“高等院校通识教育系列丛书”，而未将其局限于“中国政法大学”，乃是希望通过本系列教材的推广使用，在各高校间进行教学方法、教学实践的交流互动，互通有无、集思广益，将“通识教育”这一教学理念推广至全国高校，并总结、收集其在各高校的实践经验、教学反馈，对现有体系结构进行查漏补缺、更新换代的工作，以期对中国高等教育做出一定的贡献。

本系列教材的参编人员，均是从事一线教学多年、拥有丰富教学经验的教师，其中不乏学校十年通识教育改革的亲历者。相信他们深厚的学识水平、认真的治学态度，能够保证本系列教材的质量水准。当然，由于本系列教材的编写是一次全新的尝试，书中错漏在所难免。希望广大师生在使用过程中多提问题，以便我们逐步完善。

最后，希望我们可以秉持通识教育的基本理念——“通识、博雅、全人”，服务中国高等教育，在教学中打破学科壁垒，实现知识的融会贯通；在专业培养之外注重培育学生的性情、兴趣和趣味，实现人格的健康发展与人的全面发展。

中国政法大学

2016年8月

前 言

随着社会的发展与技术的进步,数学在经济、政治、法律、文学、历史、人文、考古等学科的发展中发挥着越来越大的作用。社会学科和人文学科中的专业问题,也已从单纯的定性研究转变为与定量分析相结合的研究方式。因此,数学素质应成为当代文科大学生必须具备的一种基本素质,高等数学的思想、方法也应成为文科专业的大学生必须掌握的一门工具。

数学思想、数学方法在各学科领域的重要性已有目共睹,各高校也都适时地在文科专业开设了相应的高等数学课程。中国政治大学自2010年起更是将《文科高等数学》作为政法、人文等文科专业的自然科学类通识主干选修课程,还是法学实验班的通识必修课程。在文科专业开设高等数学课程,应考虑文科专业的学科特点及学生实际,需要基于文科高等数学课程的定位,精心组织、安排教学内容。否则,不但起不到数学教育的真正作用,相反还会增加学生的负担,不利于数学思想、数学方法对人文学科领域的渗透及应用,也不利于文科专业学生数学素质的培养。

经过近三十年的教学实践,编者认为,将《文科高等数学》课程作如下定位比较恰当,即以高等数学知识为载体,一方面注重培养学生以理性的方式认识自然世界,思考人类与自然之间的关系,另一方面培养具有科学素养的公民,使学生可以参与社会性科学议题的讨论,并能够以日常科学思考的方式解决生活中的问题。基于此,文科专业高等数学课程的教学重点应放在“掌握概念,强化应用,培养能力,提高素质”上。经过多轮论证,编者最终将“以研究确定性现象的一元微积分”和“以研究随机现象统计规律性的概率论”的经典理论作为《文科高等数学》课程的教学主线,比较系统地介绍了一元微积分和概率论的基本内容,除绪论外,全书共分八章,内容包括:极限与函数、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、随机事件及其概率、随机变量的概率分布、随

机变量的数字特征。本书既注重介绍高等数学的基础知识,又通过各种有价值的实例,着力于数学建模思想的渗透和人文精神的熏陶。由于《文科高等数学》课程的学时少(一般在32~64学时),这两部分的内容选择与组织,在必须精简的条件下,要尽量避免繁琐的数学计算及深奥的理论证明,还要注意学科的严谨性和系统性。基于此,《文科高等数学》教材的编写自然应沿该主线展开,并同教学中的这样设计相吻合。

在本书的编写过程中,编者参考国内外已有的特别是近十年出版的多部优秀教材,也参考了从国外翻译过来的一些著作中的精华(见本书的参考文献),吸收、借鉴了这些教材、著作中好的讲法和具体实例,同时还汇集了编者多年教学研究的结晶。本书的内容体系和现有的教材相比虽无大异,但在整体框架安排上略有创新,在相关章节增加了无限魅力一瞥、概率推理案例分析、期望和方差魅力一瞥,并将可分离变量微分方程模型建立及求解作为不定积分应用来介绍,这样编写安排注重了数学方法的实用性与趣味性,贯彻了理论联系实际的原则。并形成了以下特色:

(1) 精心组织、设计了大量契合经典内容的有新意的实例。例如,绪论中的强盗分赃、报数游戏、当事人是否在说谎、技术使用费支付方式的选择等。又如,第一章极限概念之后的希尔伯特旅馆、芝诺悖论、叠牌游戏等。再如,第六章的概率推理与证人识别、测谎证据的概率分析、利用CAT扫描结果对被告进行精神病的无罪辩护等。通过这种设计,将数学素质的培养有机地融合在实例的讲解中,突出数学思想、数学方法的应用,使读者感受到用数学知识、数学方法解决实际问题的乐趣,增加读者广泛应用数学方法解决问题的意识和能力。

(2) 采用问题驱动式,渗透数学建模思想。例如,绪论中感性词汇的重要性排序问题、公平席位分配问题。又如,第四章的原子衰变模型与马王堆一号墓的年代认定、冷却模型及刑案现场死亡时间鉴定、单种群模型与人口预测。再如,第六章的敏感性问题的调查设计、“狼来了”诚信的缺失分析等。这些问题都以问题引出——模型建立——问题解决——结果分析为主线,有利于对学生思维的启发与引导,提高文科专业学生的数学人文素养,使数学思维延伸至一般的思维。

(3) 教材正文与习题相配,理论与方法相宜。为理解、巩固所介绍的数学方法及其应用,书后附有大量习题,并且为配合读者的学习需要,理解数学的概念及方法,针对各章的习题都配有详细解答,并以二维码的形式附在各章后面供

读者方便参考。

总之,本书在内容取舍、结构安排、概念叙述和定理证明上,力求简洁明了,同时尽可能注意系统性和严谨性,尽力通过列举有应用价值的实例,从各个角度自然地引入微积分和概率论的基本知识,既展示数学知识的来龙去脉,又示范性地保持这两部分内容所特有的形式化本质特征。从而在强调培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力和运算能力之外,更注重培养学生运用所学的数学方法去分析问题和解决问题的能力。相信读者在阅读此书后,能开阔思路,增强分析问题、解决问题的意识和能力。

本书可作为政、法、文、史、哲等人文类专业高等数学课程教材,也可作为理工类专业学生拓展数学应用的数学参考书,还可作为高校教师和其他专业高等数学课程的教辅材料。

尽管编者有良好的愿望,但编写这样一本合适的高等数学教材有一定难度,加之编者水平有限,肯定会存在各方面的问题。为体现文科高等数学教学的一种改革模式,编者希望能抛砖引玉。对书中不当之处,恳切希望广大读者和各位同仁批评指正,以期不断完善。

本书的编写得到了中国政法大学教务处的大力支持与资助,中国政法大学出版社编辑马旭、唐朝对本教材的编辑出版工作都给予了精心的建议和大力支持,书后的部分习题解答由我校2014级成思危金融菁英实验班的本科生王金晓同学提供,在此一并致谢。

刘淑环

2016年8月

目 录

绪论 课前动脑	1
一、逻辑推理分析	1
二、数学计算	2
三、简单的数学建模分析	5
第一章 极限与连续	10
第一节 极限的概念	10
一、数列极限	10
二、函数极限	13
第二节 无穷大量与无穷小量	16
一、无穷大量	16
二、无穷小量	17
三、无穷小量与无穷大量的关系	17
四、无穷小量的阶	18
第三节 无限魅力一瞥	18
一、希尔伯特旅馆	19
二、芝诺悖论	19
三、叠牌游戏	21
第四节 极限的运算	23
一、极限四则运算法则	23
二、极限存在准则	27
三、两个重要极限	28

第五节 函数的连续性	30
一、函数连续的概念	31
二、函数连续的运算法则	32
三、函数间断	33
四、闭区间上函数连续的性质	34
习题一	35
第二章 导数与微分	38
第一节 导数的概念——函数的局部变化率	38
一、两个引例	38
二、导数概念	39
三、左、右导数	41
四、可导与连续的关系	42
第二节 导数的运算法则	42
一、基本初等函数求导公式	43
二、四则运算求导法则	43
三、复合函数求导法则	44
四、隐函数求导法则	44
五、取对数求导法	45
六、分段函数求导	45
七、高阶导数的定义	45
第三节 函数微分	46
一、微分的概念	46
二、微分运算法则	48
三、微分形式不变性	49
四、微分的近似计算	50
习题二	51
第三章 导数应用	54
第一节 微分中值定理	54
一、罗尔 (Rolle) 中值定理	54

二、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	55
三、柯西 (Cauchy) 中值定理	56
第二节 洛必达法则	57
一、洛必达法则	57
二、其他未定型的极限计算	58
第三节 函数性态分析	59
一、函数单调性与函数极值	59
二、曲线的凹向与拐点	65
第四节 曲线图形绘制	67
一、曲线渐近线	67
二、曲线绘图	69
第五节 导数在经济学中的应用	71
一、边际分析——函数的绝对变化	71
二、函数优化分析	73
三、弹性分析——函数的相对变化率	73
习题三	77
第四章 不定积分—微分的逆运算	80
第一节 不定积分的概念与性质	80
一、原函数与不定积分	80
二、不定积分基本公式	83
三、线性运算法则	84
第二节 矛盾转化法求不定积分	85
一、第一换元法 (凑微分法)	85
二、第二换元法	87
三、分部积分法	88
第三节 不定积分魅力一瞥——微分方程模型求解初探	90
一、微分方程预备知识	90
二、原子衰变模型与马王堆一号墓的年代认定	91
三、冷却模型及刑案现场死亡时间鉴定	92
四、单种群模型与人口预测	93

习题四	95
第五章 定积分—总量问题	97
第一节 定积分的概念	97
一、两个引例	97
二、定积分的定义	99
第二节 定积分的性质	101
第三节 微积分学基本定理	103
一、变上限积分函数及其导数	103
二、牛顿—莱布尼兹公式	104
第四节 定积分计算的一般方法	105
一、换元积分法	105
二、分部积分法	106
第五节 定积分应用	107
一、平面图形的面积	107
二、旋转体的体积	108
三、已知平行截面面积的立体的体积	108
四、经济总量问题	109
第六节 广义积分 (反常积分)	110
一、问题的提出	110
二、无穷区间上的广义积分	111
三、无界函数的广义积分	112
习题五	113
第六章 随机事件及其概率	115
第一节 随机事件及其运算	115
一、随机事件及其关系	115
二、随机事件运算规律	117
第二节 概率定义及其确定方法	117
一、预备知识——排列与组合	117
二、确定概率的频率方法	119

三、确定概率的古典方法——古典概型	122
四、几何概型	126
五、概率的公理化定义	127
第三节 条件概率与乘法公式	129
一、条件概率	129
二、乘法公式	131
三、全概公式和贝叶斯公式	133
第四节 随机事件独立与二项概型	138
一、事件独立	138
二、 n 重贝努利试验与二项概型	139
第五节 概率推理案例分析	140
一、归纳推理与法庭证明	140
二、被告有罪、无罪的概率分析	141
三、概率推理与证人识别问题	142
四、测谎证据的概率分析	143
五、利用 CAT 扫描结果对被告进行精神病的无罪辩护	144
习题六	145
第七章 随机变量的概率分布	151
第一节 随机变量的概念	151
第二节 离散型随机变量的概率分布	152
一、概率分布(分布列)	152
二、几种常见的离散型分布	154
第三节 连续型随机变量的概率密度	162
一、概率密度	162
二、几种常见的连续型分布	163
第四节 分布函数的概念与性质	165
一、分布函数的定义	165
二、离散型随机变量的分布函数及其性质	165
三、连续型随机变量的分布函数及其性质	166
第五节 正态分布及其应用	169

一、正态分布的概率密度	169
二、正态分布的分布函数	170
三、正态分布的概率计算	171
四、二项分布的正态近似	173
第六节 随机变量函数的分布	175
一、离散型随机变量函数的分布律	175
二、连续型随机变量函数的概率密度	176
习题七	177
第八章 随机变量的数字特征	181
第一节 数学期望	181
一、引例——分赌本问题	181
二、离散型随机变量的数学期望	182
三、连续型随机变量的数学期望	185
四、数学期望性质	185
五、随机变量函数的数学期望	186
第二节 随机变量的方差	188
一、方差的定义及计算公式	188
二、方差性质	189
三、常见分布的数学期望和方差	190
第三节 期望和方差魅力一瞥	192
一、变异系数	192
二、切贝雪夫不等式	193
三、风险型问题的决策分析	194
习题八	199
附表一 泊松分布的概率分布表	203
附表二 标准正态分布函数值表	207
参考文献	210

绪论 课前动动脑

在开始我们的文科高等数学课程学习之前，我们先来分析下面几个有趣的问题，感受一下数学思维、数学推理、数学计算、数学建模之乐趣。

一、逻辑推理分析

站在别人的立场思考问题，预测别人如何做是个不错的方法。

（一）强盗分赃

五个强盗共同抢得赃物金币 100 枚，现在进行分赃。经过讨论，强盗们决定，由甲至戊依次提出分赃方案，其他人举手表决，半数以上（包括半数，但是只有两个人表决时，须全都同意才能通过）同意即为通过。方案一经通过，立即执行。但是，如果提出的方案遭到否决，那么提出该方案的人将立刻被杀死。假设甲、乙、丙、丁、戊都是精明的理性人，请问甲应当如何提出分赃方案？

答案分析 答案可能有些出乎意料：“甲 97 枚，乙 0 枚，丙 1 枚，丁 2 枚，戊 0 枚。”这并非是唯一的标准答案，但是，是相当富有智慧的答案。

先从分析丁入手。如果丁否决甲、乙、丙的意见而使甲、乙、丙被杀的话，那么当轮到丁提方案时，丁只能提出自己一枚也不要，全部给戊。因为戊作为纯理性人，只会追求 100 枚金币的最大利益，哪怕丁想获得一枚，也会被戊否决，而使自己被杀。为了保命，丁将一无所得。所以，只要甲、乙、丙提出的方案能使丁获利，即使是一点点，丁也会答应，因为“人总会对激励做出反应”。这样，丙分析丁的心理之后会提出“丙 99 枚，丁 1 枚，戊 0 枚”的方案。这样，丙、丁都会同意，戊将会一无所获。

同样，乙分析了丙、丁的心理，会提出“乙 98 枚，丁 2 枚，丙、戊 0 枚”的方案，因为乙的方案使丁多获得了一枚金币，丁当然会同意乙的方案，而不是杀掉乙，

却使自己少得一枚金币. 这样, 轮到乙提方案时, 会有乙、丁两个人同意, 获得通过.

甲在提方案前, 应该考虑到刚才逆推的一切. 从丁入手, 倒叙考虑每个人提出的方案. 甲在充分考虑后, 会提出“甲 97 枚, 乙 0 枚, 丙 1 枚, 丁 2 枚, 戊 0 枚”的方案. 因为甲知道, 丁的心理是得利即可, 而该方案必须使丁获得同乙提出方案一样多的或者更多的金币, 丁才没有理由反对. 而丙的心理是: “如果让乙提方案, 我将一无所得, 因此只要甲给我利益我就同意.” 这样, 甲、丙、丁会同意该方案, 方案获得通过.

(二) 报数游戏

在不被同桌知道的情况下, 每个人写一个 $1 \sim 100$ 的数字, 写出的数最接近平均数的 $\frac{2}{3}$ 的同学为赢家. 问最后为赢家的同学写的数是多少? (这个实验是耶鲁大学公开课程“博弈论”里面的一个小游戏, 据说是能看出谁比较聪明)

推理分析

第一个判断: 获胜的数字是平均数的 $\frac{2}{3}$, 那么即使大家都选 100, 获胜数也是 67, 所以获胜数字肯定可以排除 $68 \sim 100$. (假如我是理性人)

第二个判断: 既然获胜数字排除 $68 \sim 100$, 那么同学们选择就是 $1 \sim 67$, 即使大家都选 67, 获胜数字就是 45, 所以获胜数字可以排除 $46 \sim 67$. (假如我的同学都是理性人)

第三个判断: 如果排除 $46 \sim 100$, 大家都选 $1 \sim 45$, 同理, 获胜数字只会是 $1 \sim 30$. (假如我知道你知道其他同学都是理性人)

第四个判断……

如果按照这样的推理判断, 假设你的同学都是比较聪明的人, 那么获胜的数字应该是 1. (想象不到吧?)

最终的获胜数字为什么可能不是 1 呢? 根据传统的经济学理论的假设, 所有的人都是聪明和理性的. 比如, 分析中说 $68 \sim 100$ 是不应该选的, 但是实际上可能还是有人选了. 因为你不知道你周围同学的聪明程度, 所以无法准确地写出获胜数字, 因此, 当中还是有运气和随机的成分.

二、数学计算

(一) 当事人是否在撒谎

一私营船主运送一批货物到 A 地, 抵岸后接货人找甲某等人来搬运该批货

物。货船与岸边陆地之间用一条长约 10 米的跳板连接。由于当天风力较大，甲某在搬运货物时不慎跌倒，造成左膝盖粉碎性骨折。为此，甲某以船上的安全措施不到位为由起诉船主要求赔偿。在确定由谁赔偿甲某时，按行业惯例，以跳板尾部与陆地接触处为界：若伤亡发生在该界限与货船之间，则由船主负责；若发生在该界限之外的陆地上，则由接货人负责。

根据甲某的描述，他在距岸 1 米的跳板上时，左脚踩空，左膝跪在了地上，而右脚仍在踏板上，身体悬空，由于负荷过重造成左膝盖粉碎性骨折。若甲某所述属实，按惯例，理当由船主对甲某进行赔偿。经船主委托的律师调查取证，发现：跳板与水平面有一大约 15° 的夹角；跳板靠岸处的陆地是一个斜坡，坡度大约 30° ；甲某身高 170cm，其髋部（腹股沟部位）到膝盖 50cm。试根据上述信息，判断甲某是否在距岸 1 米的跳板上跌倒？

解 根据所述信息，得到船、跳板、岸边、水平面的关系如图 0-1。

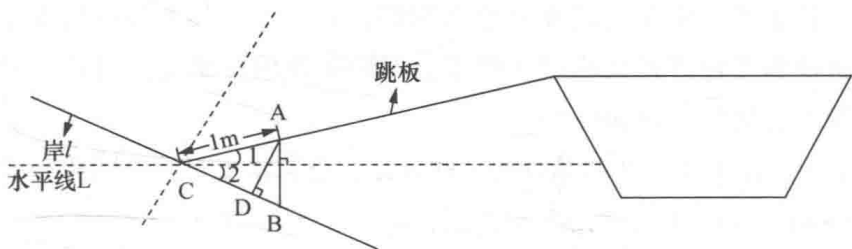


图 0-1

设 L 为水平线， A 点为甲某跌倒点， A 点铅直向下与岸 l 相交的 B 点为其左膝盖的落地点， C 点为跳板与岸 l 的接触点，则 $\angle 1 = 15^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ， $AC = 1\text{m}$ ， $\angle ACB = \angle 1 + \angle 2 = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ$ 。过点 A 作 $AD \perp BC$ 于 D ，则有 $AD = CD$ 。

由勾股定理知： $AD^2 + CD^2 = AC^2$ ，所以 $2AD^2 = 1\text{m}$ ，即 $AD = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{m}$ 。

又因为 $AB \perp L$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，所以 $\angle ABD = 60^\circ$ 。

$$\text{故 } AB = \frac{AD}{\sin \angle ABD} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.82\text{m}.$$

根据甲某描述，当他在距岸 1 米的跳板上跌倒时，左膝接触到了地面，而右腿仍在跳板上，身体是悬空的，那么也就是说图 0-1 中 AB 间的距离即为甲某