普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

流形上的微积分

萧树铁 主编
陈维桓 编著

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

大学数学

第二版

流形上的微积分

萧树铁　主编

陈维桓　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材，是高等教育出版社 2000 年版"大学数学"系列教材的第二版。

本书主要讲授定义在拓扑空间和微分流形上的连续函数、光滑函数和光滑影射，并介绍处理它们之间的关系的原理和方法。全书由 4 章组成：拓扑结构，光滑结构，外微分式及其积分，黎曼流形上的微分算子等。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材，也可供其他专业人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学：流形上的微积分/萧树铁主编；陈维桓编著.—2版.—北京：高等教育出版社，2003.11
普通高等教育"十五"国家级规划教材
ISBN 7-04-013636-8

Ⅰ.大… Ⅱ.①萧…②陈… Ⅲ.微积分—高等学校—教材 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 089495 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂	版　　次	2000 年 5 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2003 年 11 月第 2 版
印　　张	12	印　　次	2003 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	210 000	定　　价	13.10 元

再版序言

提高大学数学教学质量的关键在于教师，但一套较好的教材也是重要的.随着我国大学数学教学内容改革的逐步深入，当前不少高等学校在基础数学教学内容的改革方面有了一些进展，例如单纯“面向专业”的观念有所淡化，代数课程的内容和学时有所增加，开设了一些新的课程，如“数学实验”和“随机数学”等；相应地有一批新教材出版.本套教材也在试用了两年多以后，进行了部分修订.这就是《大学数学》的第二版.

在保持原有的指导思想和风格的前提下，这一套教材由原来的五本：《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》改编、扩充为七本，即：《微积分(一)》、《微积分(二)》、《多元微积分及其应用》、《流形上的微积分》、《代数与几何》、《随机数学》及《数学实验》，其中《流形上的微积分》是新编入的.其它几本修订的大致情况如下：

《微积分(一)》以原来的《一元微积分》中的第一篇，即“直观基础上的微积分”为其主要内容，力求做到“返璞归真”.除了进一步强调了计算和应用之外，还增加了一些对“极限”的朴素描述.

《微积分(二)》是把原来《一元微积分》中的第二篇，即“理性微积分”的内容作一些修改而成.其中为了使读者能更好体会数学分析中的一些基本手法，对用阶梯函数逼近的办法来处理定积分(即函数集扩张的思想)又作了一些改进.

《多元微积分及其应用》是把原书加以适当精简而成.原书中“复变函数”部分重新改写以求突出重点和更加精练；原书的“微分几何”部分移到《代数与几何》.

以上三本教材的习题也都作了调整.

《流形上的微积分》与前面三本微积分教材合在一起，就显示了微积分从古典一直到现代的基本面貌，而且也是一个理解当代数学和物理的一个不可缺少的台阶.虽然目前它并不属于数学基础课的范围，但可供对此有兴趣的学生选修.此外，对从事微积分教学而在这方面有所欠缺的教师来讲，不妨顺便补上这一课.

《代数与几何》内容的变动是适当精简了代数的内容，增加了“行列式的几何意义”；几何部分则增加了“微分几何”的基本内容.

《随机数学》的一部分内容作了进一步精简，同时增加了一些诸如线性回

归和随机数学内容,补充了一些有趣的例子.

《数学实验》是在几年来教学实践的基础上,对第一版的内容进行调整,以了解基本原理和掌握实用方法为主线,使之适合更多学生的学习情况,并升级书中所用的 MATLAB 版本,同时出版供教师使用的电子教案.

《代数与几何》中的几何部分包括了仿射、射影和微分几何,还有两个非欧几何的模型.它所需的学时不多(不超过 30 学时).这些内容的选取和写法是否合适,能在多大程度上体现数学理性思维和"数学美",还有待进一步讨论.人们对大学数学课程中几何被严重削弱的缺陷已有共识,但又往往以"课内学时不够"或"没有用"等理由保留了这个缺陷.精简课内学时是必要的,内容的选取更可以讨论.希望有志于此的教师能先试开一些这方面的选修课,供大家来讨论.

这次内容的调整主要是为了增加这套教材的灵活性,不同的学校或专业在内容上可以有不同的选择:可以选择其中的某几本,或删去某些用小字写的部分.例如在清华,这套教材就初步适应了一个较为稳定的教学计划.即除了部分文科和艺术类专业以外,数学基础课的内容确定为:"微积分(一)"(3 学分),"微积分(二)"(3 学分),"多元微积分及其应用"(4 学分),"代数"(4 学分),"几何"(2 学分),"随机数学"(3 学分),"数学实验"(3 学分),其中 1 学分表示一个学期(实上课 15 周)上 15 节课(每节 45 分钟),另外适当安排少数课外习题课.这样数学基础课的总学时就是 330 学时,而其中被列为必修基础课的只有"微积分(一)"和"代数"两门.但实际上多数专业的学生几乎都选了大部分甚至全部数学基础课.

参加这一版改写工作的有朱学贤、郑建华、章纪民、华苏、居余马、萧树铁、李津、陈维桓等同志;谭泽光、白峰杉同志参加了讨论并提出很多好的意见.

编者于清华园

2002 年 10 月

序　言

长期以来,我国高等学校各类非数学专业的数学基础课都限于以微积分为主要内容的“高等数学”.面临21世纪各门知识的相互渗透和自身加速更新的形势以及全面提高人才素质的需要,数学的作用将显得日益重要.而作为高等学校数学基础课的作用,除了作为各门学科的重要工具以外,它在提高人才全面素质中起着重要作用的培育理性思维和审美功能方面也应得到充分的重视.这就需要一部与之相适应的教材.

这套“大学数学”教材是在前国家教委“面向21世纪教学内容和课程体系改革”研究课题的支持下完成的.共有五本:《一元微积分》、《多元微积分及其应用》、《代数与几何》、《随机数学》与《数学实验》.我们认为它们是21世纪高级人才应该普遍具备的数学基础.希望学生通过对它们的学习,能在掌握数学工具、提高理性思维和审美素质以及获取新知识的能力诸方面打下一个良好的基础.这种要求应该是针对任何专业的,只是在深度上及侧重的方面可能会有些区别.

在现行的《高等数学》中,微积分和数学分析之间的关系一直是一个难以处理的问题.19世纪以前的微积分,以它的直观性和不断扩展的应用显示了数学的威力,但同时也暴露出其缺乏严格逻辑基础的缺点.诞生于19世纪的数学分析则以其逻辑的完美显示了数学的理性精神.这两个方面在教材中如果结合得好,可以激发初学者对数学的兴趣;但如果结合得不好,则很可能失去两者的活力而形成一堆枯燥的形式推理和繁琐的计算.在本书中我们力图按其本来的面目来编写,把一元微积分分为两部分:前一部分注重直观,着重训练应用和运算,后一部分则着重培育理性思维.

《多元微积分及其应用》的应用内容包括复变函数、微分几何及常微分方程.

《代数与几何》的代数部分基本上是线性代数,其内容也可分为两部分:一部分是以算法为主的求解一般线性方程组的内容;另一部分则主要研究线性空间及其上的线性映射.由于后者是前者的理论框架,而且它已成为近代数学普遍使用的基本语言,因此本书在集合、关系、运算、代数结构之后,较快地进入后者的讨论,并且通过数值表示把两者结合起来.

至于几何,尽管它在古希腊及19世纪有着辉煌的历史,在本世纪后半叶也进入了数学研究的主流行列,但近50年来,在我国高校的数学基础课中,却一直被压

缩到只剩下一点空间解析几何.这对培养学生的形象思维及理性思维的习惯极为不利.本书除了在多元微积分应用中加上古典微分几何基础(曲线和曲面)以外,在几何部分则增加了"仿射及射影几何"及非欧几何的两个初等模型.

本世纪后半叶以来,人们对事物认识演化的表现之一是从单纯的确定性思维模式进入确定—随机性模式.这一趋势还在发展,在高校数学教学中已受到广泛的关注.我们提出把"随机数学"正式列入基础课.本书内容的重点是通过几个典型范例的讨论,使学习者学会描述与表达随机性及随机变化的过程,即集中于对随机模式认识的训练.

这套系列教材中的《数学实验》有其独特性.它的知识内容包含数值方法、统计计算和优化计算的基本概念和初等方法,其目的是为学生自己动手解决问题提供必要的数学知识和软件平台.这是一门以学生独立动手,教师起辅导作用的课程.这类课程的教材如何编写,本书只是一种尝试.

以上是这套教材的一个简要介绍.这套教材既是一个统一的整体,各部分之间又有相对的独立性,可以独立讲授.在内容方面,它包含了现行的高等数学、线性代数、复变函数、微分方程、微分几何、数值分析、概率统计、优化计算等课程最基本的内容,而总学时则大为减少.我们在清华大学几个班的试验表明:全部讲完上述内容所需的学时大约为 340 左右.除数学实验外,如果再减掉一些内容,280 学时左右也是可以的,可由教师灵活掌握.

这套教材在有些大段落后面,附有一段"评注",主要讲述这一段的重要思想和可能的发展,为有兴趣的学生进一步学习数学开一点小小的窗口.

大凡一本可用的教材,往往有两种写法:尽量多写一点,以便于教师选择;或尽量写少一点,以便于教师发挥.这套教材似乎偏于前者.因为这是一个尝试,对习惯讲授传统"高等数学"的教师来说,对这套教材可能不太适应,也许需要多一些说明.

这套教材原有的基础是清华大学出版社 1995 年出版、由萧树铁、居余马、葛严林等主编的三卷本《高等数学》.参与现在这套教材编写的有朱学贤、郑建华、章纪民、居余马、李海中、钱敏平、叶俊、姜启源、高立、何青等人.谭泽光、白峰杉、韩云瑞等同志为本书的编写作了大量的工作.高教出版社对本书的编写和出版始终给予热情的支持.

前面已说过,这套教材的编写是一个尝试,目的在于根据"百家争鸣"的精神,参与探索大学数学基础课在培养下一世纪高素质人才中所应起的作用,以及与之相适应的教材建设.我们衷心欢迎各方人士对这套教材评头论足,指出缺点和错误.如果这套教材能起到抛砖引玉的作用,我们就很满足了.

萧树铁

1999 年 6 月

前　　言

本书是《大学数学》中的微积分的组成部分.

通过前面各部分的学习,我们对于一元微积分和多元微积分的基本概念已经有了相当深刻的理解,并且掌握了微分、积分的计算技巧及其应用.但是,随着数学本身的发展,以及解决实际问题(特别是物理和力学中的各种问题)的需要,仅仅考虑欧氏空间中的微积分是不够的.例如,只知道定义在欧氏空间的开区域中的函数的连续性和可微性,则尚不能对于定义在球面上的函数的连续性和可微性有正确的、深刻的了解.所以,有必要把数学—微积分的“演出舞台”从欧氏空间进一步拓展到微分流形.这就是本书的主要目标.

流形的概念是由伟大的数学家黎曼(B. Riemann)在 1854 年的著名演讲《关于几何学的基本假设》中提出来的.在笛卡儿和费马发明坐标系之后,我们所处的空间中的点与 3 个有次序的实数的组(x,y,z)能够建立 $1-1$ 对应关系.这是数学中的革命性创举,是牛顿和莱不尼茨发明微积分的前奏曲.黎曼关注数学物理问题,特别是热方程.他把物理中的数据看成是抽象空间中的点,该数据成为“点”的坐标.此时,坐标不再有具体的几何含义.如距离、夹角等.黎曼引进的实际上是我们现在所称的局部坐标系.在 20 世纪初 Poincare 提出拓扑学之后,拓扑概念很快成为数学的基础概念.流形和微分流形的概念在此基础上逐渐成熟,大范围分析(即大范围的微积分学)和大范围微分几何学应运而生,成为 20 世纪的热门研究课题.与此同时,微分流形的有关概念成为现代数学的基本术语,出现在众多的数学文献中.了解和掌握微分流形的基本概念和术语是进入现代数学殿堂的前提.

本课程的标题是《流形上的微积分》.微分学在本质上是局部理论,它的基本概念和技巧在前面已经学过了.因此,本书的重点在于扩展我们对于空间本身的了解,也就是介绍拓扑空间和微分流形的概念,介绍定义在拓扑空间和微分流形上的连续函数、光滑函数和光滑映射,以及随之而产生的处理局部定义的量和大范围定义的量之间关系的原理和方法.所以,本课程的副标题可以是《微积分的几何理论》.

20 世纪的几何大师、中国现代数学的建筑大师陈省身曾经说过:“要研究整个流形,流形论的基础便成为必要.流形内的坐标是局部的,本身没有意义;

流形研究的主要目的是经过坐标卡变换而保持不变的性质(如切向量,微分式等).这是与一般数学不同的地方.这些观念经过几十年的演变,渐成定型.将来数学研究的对象必然是流形;传统的实数或复数空间只是局部的情形(虽然在许多情形下它会是最重要的情形)”这一段话为我们指明了本课程的主要方向.

在萧树铁先生的主持和指导下,以清华大学数学科学系的老师为主体编写的《大学数学》是非数学专业数学课程教育改革的重要成果.在萧树铁先生亲自创导下,我们在 2001 年和 2002 年的秋季两次为清华大学理科基地班 2 年级同学在学习多元微积分之后开设新的选修课程《流形上的微积分》,本书是在该课程取得经验的基础上编写的.全书由四章组成,标题分别为:拓扑结构,光滑结构,外微分式及其积分,黎曼流形上的微分算子.

在“拓扑结构”这一章,我们首先说明只有定义在欧氏空间上的函数的连续性概念是不够的,经常需要考虑定义在 3 维欧氏空间中的曲面上的函数的连续性.关于后者,传统的定义显得乏力,需要摒弃球状邻域的概念,代之以一般的邻域概念.拓扑结构是从欧氏空间的邻域结构抽象出来的.但是,我们感兴趣的不是抽象集合上的各种各样怪异的拓扑结构,而是与欧氏空间相近的拓扑空间,所以我们在介绍了拓扑的一般概念之后,重点是介绍重要的拓扑空间的例子和重要的拓扑性质.

在“光滑结构”一章,首先说明微分结构对于引进函数的可微性概念是必要的.然后,主要介绍光滑流形的重要例子,光滑函数的概念,以及沟通局部定义的数学对象和整体定义的数学对象的工具—截断函数和单位分解定理.切向量和光滑切向量场是微分算子,是流形的光滑结构的衍生物,本章对此作了系统的讨论.

“外微分式及其积分”是本书在微积分学方面的主要部分.在前面两章扩展了我们所考虑的空间概念之后,在本章需要进一步展开和研究该空间上的微积分学.主要内容有:外微分式,外微分运算,外微分式的积分,Stokes 定理.

“黎曼流形上的微分算子”的主要内容首先是以欧氏空间为例子,介绍光滑切向量场的协变导数和协变微分,然后介绍梯度,散度,Laplace 算子等重要的微分算子,以及场论公式,最后把这些算子过渡到一般的黎曼流形上去.

本书可以按周学时 4 的计划在一学期内讲完,其中带 * 的章节用小号字排出,在课堂上可以不讲,仅供学生自学和参考.若周学时为 3,则前三章可以作为课程的内容,而第四章作为学生自学的材料.

教学课程体系和教学内容的改革是一个不断地适应时代发展的需要、不断地反映学科创新成果的艰难过程,不是一朝一夕就能完成的.对于目前的这门新课程来说,从取材、内容到先后安排和讲法更有一个逐步成熟的过程,恳

请大家不吝指教.

在本书写作过程中作者得到国家自然科学基金项目(批准号为:10271004)的资助,在此作者对国家自然科学基金委员会的支持表示衷心的感谢.

陈维桓

2003 年 2 月

目　录

第一章 拓扑结构

多元微积分是研究定义在 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的函数的微积分理论.但是,随着数学的发展,以及它的应用范围的扩大,把我们所考虑的空间局限于欧氏空间显然是不够的.比如,要大范围地研究地球的表面,则它在数学上只能看作一个椭球面,尽管在每一点的附近可以近似地看作一小块平面,但是就整个表面来说它不是2维的欧氏空间.当然,在微积分"演出"的舞台从欧氏空间扩展到一般的微分流形的过程中,始终是把欧氏空间作为参照物,把欧氏空间作为模型.我们要把在欧氏空间中籍以定义连续函数、可微函数的构造抽象出来,移植到抽象的非空集合上来.本章的目的是把欧氏空间的邻域结构抽象出来,作为抽象集合上的拓扑结构,籍以定义该空间上的连续函数.另外,我们还要密切地注视欧氏空间特有的一些拓扑性质,把它们添加到感兴趣的拓扑空间上去.

1.1 n 维欧氏空间

所谓的 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是指有次序的 n 个实数的数组构成的集合,即

$$\mathbb{R}^n = \{(x^1,\cdots,x^n): x^1,\cdots,x^n \in \mathbb{R}\}.$$

在这里,与多元微积分中的记号不同,我们采用上指标表示该数组中的数的序号.

集合 $\mathbb{R}^n$ 有双重身份:$\mathbb{R}^n$ 中的元素 $x = (x^1,\cdots,x^n)$ 称为点,它代表的是空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点的位置;$\mathbb{R}^n$ 中的元素 $x = (x^1,\cdots,x^n)$ 又可以看作向量,因而在 $\mathbb{R}^n$ 中又有加法和数乘法:

$$(x^1,\cdots,x^n) + (y^1,\cdots,y^n) = (x^1+y^1,\cdots,x^n+y^n),$$
$$\lambda\cdot(x^1,\cdots,x^n) = (\lambda x^1,\cdots,\lambda x^n),$$

并且 $\mathbb{R}^n$ 关于这两种运算成为向量空间.实际上,原点 $O=(0,\cdots,0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个特殊点,而点 A 和有向线段$\overrightarrow{OA}$(向量)是一一对应的.在把 $\mathbb{R}^n$ 中的元素看作向量时,实际上是在 $\mathbb{R}^n$ 的所有有向线段之间建立了一个等同关系,即向量$\overrightarrow{AB}$ 和$\overrightarrow{CD}$ 是同一个,当且仅当 $ABDC$ 成为一个平行四边形.若设点 $A = (a^1,\cdots,a^n)$,点 $B=(b^1,\cdots,b^n)$,则有向量$\overrightarrow{OA} = (a^1,\cdots,a^n)$,$\overrightarrow{OB} = (b^1,\cdots,b^n)$.根据有向线段相加的三角形法则,存在向量$\overrightarrow{AB}$ 满足条件

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB},$$

即

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b^1 - a^1, \cdots, b^n - a^n).$$

究竟以哪一种身份来看待 $\mathbb{R}^n$ 取决于我们的研究对象是什么.如果我们要研究定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数或 n 元函数在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的图像,则把它看作“点”的空间;如果考虑的是 $\mathbb{R}^n$ 的代数结构,则把 $\mathbb{R}^n$ 看成“向量”的空间.

1.1.1 n 维欧氏向量空间

把 $\mathbb{R}^n$ 看作向量空间,则对于任意的 $u = (u^1, \cdots, u^n), v = (v^1, \cdots, v^n) \in \mathbb{R}^n$,它们的内积是

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u^i v^i.$$

很明显,$\langle u, v \rangle$ 作为二元函数关于每一个自变量 u 和 v 都是线性的,并且

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} (u^i)^2 \geqslant 0,$$

其中等号成立当且仅当 $u = 0$.换句话说,内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是定义在向量空间 $\mathbb{R}^n$ 上的对称、正定的双线性形式.给定了内积的向量空间称为欧氏向量空间.

1.1.2 n 维欧氏空间上的距离函数

设 $A = (a^1, \cdots, a^n), B = (b^1, \cdots, b^n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个点,命

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (b^i - a^i)^2}.$$

很明显,$d(A, B) = d(B, A)$;$d(A, B) \geqslant 0$,且等号成立当且仅当 $A = B$;对于任意三个点 $A, B, C \in \mathbb{R}^n$,则有

$$d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C).$$

上式称为三角不等式.满足上面三个条件的 2 元函数 $d(A, B)$ 称为点 A 和 B 之间的距离.

1.1.3 n 维欧氏空间中的球状邻域

设 $X_0 \in \mathbb{R}^n, r > 0$,命

$$B(X_0, r) = \{A \in \mathbb{R}^n : d(X_0, A) < r\},$$

称为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中以 X_0 为中心、以 r 为半径的**球状邻域**.

若 $n=1$,则 $X_0 \in \mathbb{R}$ 是实数,于是球状邻域 $B(X_0,r)$ 就是开区间 (X_0-r,X_0+r).

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集,A 是 U 中的任意一点.如果存在正数 r,使得 $B(A,r) \subset U$,则称 A 是 U 的**内点**.如果 U 的每一点都是内点,则称 U 为 $\mathbb{R}^n$ 的**开子集**.很明显,开子集 U 必定能够表示成 $\mathbb{R}^n$ 中的若干球状邻域的并集;反之亦然.

$\mathbb{R}^n$ 的开子集有下列两个性质:

(1) $\mathbb{R}^n$ 的任意多个开子集的并集必是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集;

(2) $\mathbb{R}^n$ 的任意两个开子集的交集或者是空集,或者是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集.

为了叙述简便起见,把空集看作是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集.于是从性质(2)得知,$\mathbb{R}^n$ 的任意有限多个开子集的交集是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集.

球状邻域和开子集的概念是叙述极限和连续函数的定义的基础.让我们来回顾 $\mathbb{R}^n$ 中点列的极限和连续函数的定义.

1.1.4 n 维欧氏空间中点列的极限

先考虑 $n=1$ 的情形.设 $\{X_i\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个点列,即 $\{X_i\}$ 是一个实数序列.用 $\varepsilon-N$ 语言叙述的"实数序列 $\{X_i\}$ 以实数 a 为极限"的定义是:对于任意的 $\varepsilon>0$,必能找到正整数 N,使得当 $i>N$ 时都有 $|X_i-a|<\varepsilon$.最后的不等式可以改写为 $X_i \in B(a,\varepsilon)$.因此,"$\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{X_i\}$ 以点 $X_0 \in \mathbb{R}^n$ 为极限"的定义可以用 $\varepsilon-N$ 语言叙述为:对于任意的 $\varepsilon>0$,必能找到正整数 N,使得当 $i>N$ 时都有

$$X_i \in B(X_0,\varepsilon), \qquad \text{即} \qquad d(X_0,X_i)<\varepsilon,$$

记为 $\lim\limits_{i\to+\infty} X_i = X_0$.

采用球状邻域的好处是可以用不涉及维数的统一语言来表述,并且直观意义更加清晰.

1.1.5 n 维欧氏空间上的连续函数

同样,先考虑 $n=1$ 的情形.用 $\varepsilon-\delta$ 语言叙述的"函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在 x_0 处连续"的定义是:任意给定 $\varepsilon>0$,必能找到 $\delta>0$,使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.上面的说法可以改述为:任意给定 $\varepsilon>0$,必能找到 $\delta>0$,使得当 $x\in B(x_0,\delta)$ 时都有 $f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$,即 $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$.