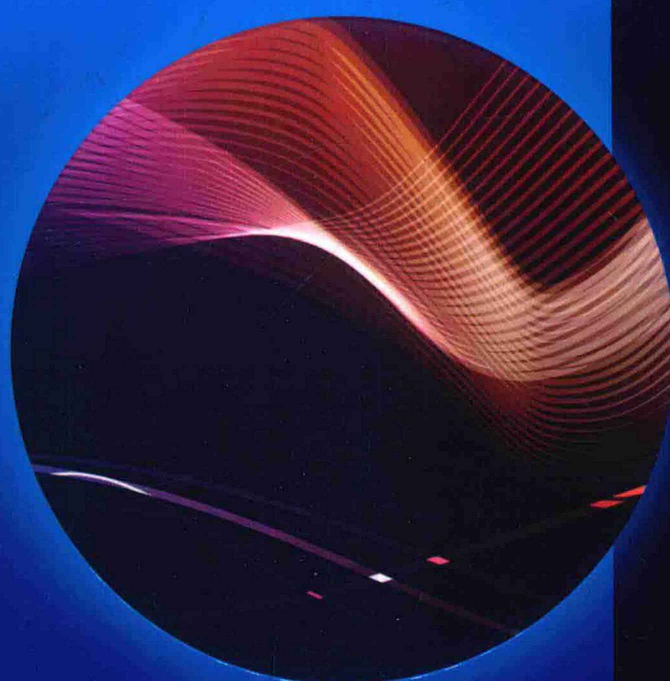
地球物理基础丛书

数学物理方程学习辅导

霍学深　李姬喆　编著



科学出版社

地球物理基础丛书

数学物理方程学习辅导

霍学深　李姬喆　编著

科学出版社

北京

内容简介

本书是与操华胜编著的《数学物理方程》配套的学习辅导书。全书共分为9章，每一章包括基本要求、知识要点、习题思路和解答三部分内容。基本要求是本章需要掌握的知识点，知识要点是相关内容的讲解，习题思路和解答提供《数学物理方程》中绝大多数习题的解答思路与答案。阅读本书，可以帮助学生学习《数学物理方程》中各类定解问题的解题方法和技巧，了解各种题型，从而加深对这门课程的理解和掌握。

本书可作为普通高等院校理科类本科生、工科专业本科生或研究生"数学物理方程"课程的学习辅导书，也可作为相关教师和科研人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程学习辅导/霍学深，李姬喆编著. —北京：科学出版社，2016.10

(地球物理基础丛书)

ISBN 978-7-03-050112-7

Ⅰ.①数… Ⅱ.①霍… ②李… Ⅲ.①数学物理方程-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 235686 号

责任编辑：张颖兵　杨光华/责任校对：肖　婷

责任印制：彭　超/封面设计：苏　波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2016 年 10 月第　一　版　印张：7 1/2

2016 年 10 月第一次印刷　字数：188 000

定价：23.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

"地球物理基础丛书"编委会

“地球物理基础丛书”序

地球物理学是地球科学领域最古老、最重要而又最充满活力的分支之一。自两千多年前亚里士多德开始，就已经出现了地球物理学的萌芽。在《物理学》中，亚里士多德阐述了很多与地球及其周围空间相关的自然现象，诸如风、雨、雷、电、火山、地震等自然现象。这些现象与地球系统密切关联，其解释又涉及物理学本身。地球系统包括固态内核、液态外核、熔融地幔、黏弹地壳、固态冰川和液态海洋、地球液态固态体（简称地球本体）周围的大气层、电离层、月球以及所有绕地卫星；此外，地球系统与太阳、太阳系内的所有行星、卫星及星际物质密切关联，因而，广义地，也可将后者纳入地球系统之中。地球物理学，就其本意而言，是研究地球系统内各种物性参数、各种物理场、各种物质变化运移、各圈层相互作用及环境变化以及地球系统中发生的各种自然现象的物理学。或者简单而不太严密地说，地球物理学，是利用物理学原理、方法、实验手段研究地球系统本身及其内发生的各种自然现象的学说。随着科学技术的进步，地球物理学也在不断拓展其研究范围，现在已包含非常广泛的分支学科，如太阳系起源，行星学，地球形状学，地球自转学，地球重力学，地电学，地磁学，地热学，地球年代学，地壳形变学，地球动力学，地震学，地球内部物理学等。

由于地球物理学是研究地球的物理学，因此，随着物理学新进展或新发现的出现，其理论体系或方法论必将影响、渗透到地球物理学。从亚里士多德的宇宙地心说和自由落体重者下落较快说到哥白尼的宇宙日心说和伽利略的自由落体等速说，从开普勒三大定律到牛顿万有引力定律，从法拉第电磁感应定律到麦克斯韦电磁场统一方程，从伽利略的温度计到开尔文的热力学系统，从牛顿的经典力学体系和绝对时空观到爱因斯坦的相对论理论和相对论时空观，从微观世界的连续性理论到不连续量子理论，从古老的简单机械计算到现代的大型计算机，无一不在影响和逐步推动着地球物理学的发展进程。比如，没有牛顿的万有引力定律，就没有对天体运行规律的完美描述；没有爱因斯坦的广义相对论，就难以解释行星的近日点进动效应；没有热力学定律，地热学就难以发展。当今地球物理学，仅凭理论推演、不付诸实践检验而构建模型的时代已几乎一去不复返了。构建地球物理模型，解释各种自然现象，理论预测与实际观测比对，修改模型，进一步比对，不断循环往复，这是地球物理学的发展逻辑；不断拓展地球系统研究对象，包括利用物理学新理论新方法、新实验结果研究地球系统物性参数及各种自然现象，并向其他领域交叉渗透，这是当今地球物理学的发展趋势。

尽管历经两千多年的发展，但在地球物理学领域仍有很多悬而未决的重大科学难题，例如：太阳系起源，地磁场起源，内核的年龄，内核超速旋转速率，Chandler 晃动机理，十年尺度日长变化机理，厄尔尼诺现象的机理，地球膨胀/收缩机理，地震预报等。奥秘无穷，探索无尽。地球物理学没有终结，只有起点。

国内已有30多所大学开设了地球物理学本科专业，但尚缺乏系统性的循序渐进的适合于理科的地球物理专业教科书。因此，我们认为有必要出版地球物理基础丛书。该丛书面向地球物理专业、大地测量专业及相关专业，在内容选择方面，注重基础性和系统性，注重从第一性原理出发，强调理论的系统性、严密性和逻辑性；注重阐述基本概念、基本原理，在描述现象的基础上，诠释现象的本质；注重理论联系实践及启发式教学，注重培养学生的实际动手能力和科学研究能力。这套丛书以偏重于理科的教科书为主，兼顾偏重于应用的教科书以及实践教程，可供地球物理专业、大地测量专业本科生学习，也可供研究生及相关教学和科研人员参考。

申文斌

2016年1月26日于武昌

序

“数学物理方程”是大学教育中的一门重要的数学课程，它是各理工专业本科生重要的专业基础课。在学习该课程的过程中，学生普遍感觉到完成习题是一件很困难的事情。求解偏微分方程，一方面计算量大，容易出错；另一方面涉及面广，题目背后有物理含义，技巧性强。因此一本供学生参考的学习指导和习题解答是非常必要的。然而应指出的是，我们不主张学生在自主思考之前先看答案或解答。为了学好数学物理方程的基础，学生应该独立完成老师布置的作业，不能抄袭辅导书的解答，本书仅供学习时参考。事物的答案不唯一，因此学生在解答偏微分方程时思维不要局限于书本上所给出的解答。

在本书即将出版之际，感谢武汉大学我的历届研究生和本科生同学，是他们不断地提出问题，激励我不断努力，对许多问题与解答进行进一步地思考。感谢研究生贺清和熊奥林提供部分相关题目答案的电子版，大大减轻了文字编辑的工作量；本书第二作者本科生李姬喆把余下的题目答案作出分析和整理。

编写本书时参考了众多的相关材料，这里无法一一列出。本书得到了国家自然科学基金面上项目(项目批准号：41374010，41674007)、2016年武汉大学本科院中央财政专项“本科教学工程建设项目经费”(项目批准号：503—413200006)、中央高校基本科研业务费专项资金(项目批准号：2042015kf0186)和教育部云南丽江地球物理野外实践教育基地项目的资助。编写本书的初衷是帮助学习“数学物理方程”课程的学生学好这门比较难学的课程，同时也给讲授该课程的教师提供一些有益的参考。

由于编者水平有限，书中难免有不足之处，敬请各位读者批评指正。

编　者

2016年夏于武昌

目　　录

第1章　数学物理方程的定解问题

1.1　基本要求

① 掌握数学物理方程的基本概念；

② 熟练掌握三类基本方程(包括波动方程、热传导方程、调和方程)的导出和数学表达；

③ 熟练掌握定解条件(包括边界条件、初始条件、自然条件)的概念；

④ 掌握叠加原理和齐次化原理及一些简单的求解方法。

1.2　知识要点

1. 典型的泛定方程

典型的泛定方程分为三类：

(1) 一维波动方程的表示形式

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

(2) 一维热传导方程的表示形式

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$$

(3) 泊松方程 (二维、三维)

$$u_{xx} + u_{yy} = f, \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f$$

上述 f 为非齐次项，若 $f = 0$，则泛定方程为齐次方程。波动方程和传导方程因与时间的变化相关，将它们统称为发展方程 (evolution equations)；与时间无关的泊松方程称为稳定方程 (equations of stability)。

2. 定解条件

定解条件描述物理问题的特性，与泛定方程一起构成定解问题，定解条件包括初始条件、边界条件和自然条件。

(1) 初始条件：描述初始时刻状态，包括初始位置以及初始速度。

① 波动方程需要两个初始条件：初始位移和初始速度；

② 热传导方程需要一个初始条件：初始温度分布。

(2) 边界条件：描述物体在边界上所处的状态，包括三类边界条件。

① 第一类边界条件：$u(t,0) = g(x)$ 或 $u\big|_s = g(x,t)$；

② 第二类边界条件：$\dfrac{\partial u(t,0)}{\partial n} = g(t)$ 或 $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_s = g(x,t)$；

③ 第三类边界条件：$\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_s=g(x,t)$。

(3) 自然条件：要求定解问题的解是“有界的”“连续的”“周期性”等。

3. 叠加原理

(1) 有限型

设u_i满足方程(或定解问题)

$$Lu_i=f_i$$

那么 $u=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$ 一定满足

$$Lu=\sum_{i=1}^{n}f_i$$

(2) 无限型

设u_i满足方程(或定解问题)

$$Lu_i=f_i$$

那么 $u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i$ 一定满足

$$Lu=\sum_{i=1}^{\infty}f_i$$

注：可要求 $u=\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i$ 一致收敛，也可以不要求（广义解）。

(3) 连续型

设 $u(x,\xi)$ 满足方程(或定解问题)

$$Lu(x,\xi)=f(x,\xi)$$

若积分 $U(x)=\int_V f(x,\xi)\mathrm{d}\xi$ 收敛，那么 $U(x)$ 一定满足

$$LU(x)=\int_V f(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

4. 齐次化原理

设有二阶常微分方程

$$\text{(A)}\quad\begin{cases}u''+a_1u'+a_0u=f(t) & (t>0)\\ u(0)=0,u'(0)=0\end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad\begin{cases}\omega''+a_1\omega'+a_0\omega=0 & (t>\tau)\\ \omega(\tau)=0,\omega'(\tau)=f(\tau)\end{cases}$$

如果 $\omega(t,\tau)$ 是方程(B)的解，则

$$u(t)=\int_0^t\omega(t,\tau)\mathrm{d}\tau$$

是方程(A)的解。

1.3　习题思路和答案

1. 验证已知函数满足方程(a,α,β 为参量)。

(1) 验证 $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(r\neq 0)$满足 $\Delta_3 u=0$;$u=\ln r=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$满足 $\Delta_2 u=0$。

解　若 $u=\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(r\neq 0)$,则对 x 求导可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$$

对 x 求二阶导数可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

由 x,y,z 的对称性可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2y^2-x^2-z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2z^2-x^2-y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$$

故

$$\Delta_3 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2x^2-y^2-z^2+2y^2-x^2-z^2+2z^2-y^2-x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}=0$$

若 $u=\ln r=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$,则对 x 求导可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

对 x 求二阶导数可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

同理考虑其对称性可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

故

$$\Delta_2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0$$

证毕。

(2) 验证 $u=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp\left[-\dfrac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}\right](t>0,x\neq\zeta)$满足方程$u_t=a^2 u_{xx}$ 与$\lim\limits_{t\to 0}u(t,x)=0$。

解　由题对 t 求导可得

$$u_t=\left[-\frac{1}{2t\sqrt{t}}+\frac{1}{\sqrt{t}}\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t^2}\right]\exp\left[-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t}\right]=u\left[\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t^2}-\frac{1}{2t}\right]$$

分别对 x 求一阶和二阶导数可得

$$u_x = u\left(-\frac{x-\zeta}{2a^2 t}\right)$$

$$u_{xx} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2t^2} - \frac{1}{2t}\right]u = \frac{1}{a^2}u_t$$

则方程$u_t = a^2 u_{xx}$ 得证。

令$\frac{1}{\sqrt{t}} = m$,则$\frac{1}{t} = m^2$,因此原式化为

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \lim_{m\to\infty} u(m,x) = \lim_{m\to\infty} m \cdot \exp\left[-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2}m^2\right]$$

由洛必达法则可得

$$\lim_{m\to\infty} m \cdot \exp\left[-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2}m^2\right] = \lim_{m\to\infty}\frac{2a^2}{m(x-\zeta)^2} \cdot \exp\left[-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2}m^2\right] = 0$$

证毕。

(3) 设 $f(x)$,$g(x)$ 为二次可微函数,α,β 为常数且 $\alpha \neq \beta$,验证 $u = f(x+\alpha y)+g(x+\beta y)$满足方程$u_{yy} - (\alpha+\beta)u_{xy} + \alpha\beta u_{xx} = 0$。

解 当$u = f(x+\alpha y)+g(x+\beta y)$时,$u$ 对 x 的二阶偏导数为

$$u_{xx} = f'' + g''$$

同理可得

$$u_{xy} = \alpha f'' + \beta g'', \quad u_{yy} = \alpha^2 f'' + \beta^2 g''$$

代入要求证的方程中即可得到

$$\alpha^2 f'' + \beta^2 g'' - (\alpha+\beta)(\alpha f'' + \beta g'') + \alpha\beta(f''+g'') = 0$$

2. 求方程某种指定形式的特解($r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$,$k$,$\lambda$ 为参量)。

(1) $\Delta_3 u = 0$,$u = u(r)$。

解 此方程是 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ 这种情况。对 x 求导可得

$$u_x = u'\frac{x}{r}$$

对 x 求二阶偏导数可得

$$u_{xx} = u''\frac{x^2}{r^2} + u'\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = u''\frac{x^2}{r^2} + u'\frac{r^2 - x^2}{r^3} \qquad ①$$

由 x,y,z 的轮换对称性可得

$$u_{yy} = u''\frac{y^2}{r^2} + u'\frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} = u''\frac{y^2}{r^2} + u'\frac{r^2 - y^2}{r^3} \qquad ②$$

$$u_{zz} = u''\frac{z^2}{r^2} + u'\frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2} = u''\frac{z^2}{r^2} + u'\frac{r^2 - z^2}{r^3} \qquad ③$$

所以

$$①+②+③\Rightarrow\Delta_3 u = u'' + u'\frac{2}{r} = 0$$

解上述微分方程可得到最终结果

$$u = \frac{c}{r}$$

其中 c 为任意常数。

(2) $\Delta_3 u + k^2 u = 0, u = u(r)$。

解　与大题 2 第(1) 小题解法相似,最终是解微分方程

$$\Delta_3 u + k^2 u = u'' + u'\frac{2}{r} + k^2 u = 0$$

令

$$y = ur$$

则 $y' = u'r + u, y'' = u''r + 2u'$。因此原方程变为

$$y'' + k^2 y = 0$$

其解为

$$y = C_1 \cos kr + C_2 \sin kr$$

因此原方程的解为

$$u = \frac{1}{r}(C_1 \cos kr + C_2 \sin kr)$$

其中C_1, C_2 为任意常数。

(3) $u_{tt} - a^2 \Delta_3 u = 0, u = e^{i\lambda t} R(r)$。

解　对 t 求二阶偏导数得

$$u_{tt} = -\lambda^2 e^{i\lambda t} R(r) \qquad ①$$

与大题 2 中第(1) 小题相似

$$\Delta_3 u = e^{i\lambda t}\left(R'' + R'\frac{2}{r}\right) \qquad ②$$

将 ① 和 ② 代回到原方程中可得

$$R'' + R'\frac{2}{r} + \frac{\lambda^2}{a^2}R = 0$$

令

$$y = Rr$$

则方程变为

$$y'' + \frac{\lambda^2}{a^2}y = 0$$

其解为

$$y = C_1 \cos\frac{\lambda}{a}r + C_2 \sin\frac{\lambda}{a}r$$

因此微分方程的最终解为

$$u = \frac{e^{i\lambda t}}{r}\left(C_1\cos\frac{\lambda}{a}r + C_2\sin\frac{\lambda}{a}r\right)$$

其中C_1,C_2 为任意常数。

(4) $u_{xx} - 4u_{yy} = e^{2x+y}$,$u = axe^{2x+y}$。

解 当 $u = axe^{2x+y}$ 时,对 x 求一阶偏导数得

$$u_x = ae^{2x+y} + 2axe^{2x+y}$$

对 x 求二阶偏导数得

$$u_{xx} = 4ae^{2x+y} + 4axe^{2x+y} \tag{①}$$

对 y 求二阶偏导数得

$$u_{yy} = axe^{2x+y} \tag{②}$$

将①和②代回到原方程中有

$$4ae^{2x+y} = e^{2x+y} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

3. 求指定函数所满足的常微分方程($r = \sqrt{x^2+y^2}$ 或 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$,$k$,$\omega$ 为参量)。

(1) $\Delta_2 u = 0$,求 $u = u(r)$。

解 此方程的解应该满足 $r = \sqrt{x^2+y^2}$ 这个形式。对 x 求导可得

$$u_x = u'\frac{x}{r}$$

对 x 求二阶导数可得

$$u_{xx} = u''\frac{x^2}{r^2} + u'\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} = u''\frac{x^2}{r^2} + u'\frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

由 x,y 的对称性可得

$$u_{yy} = u''\frac{y^2}{r^2} + u'\frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} = u''\frac{y^2}{r^2} + u'\frac{r^2 - y^2}{r^3}$$

因此

$$\Delta_2 u = u'' + \frac{1}{r}u' = 0$$

其微分方程的最终解为

$$u = c\ln r$$

其中 c 为任意常数。

(2) $\Delta_2 u + k^2 u = 0$,$u = \cos n\theta R(r)$,求 $R(r)$。

解 由大题 3 第(1) 小题可得

$$\Delta_2 u = \cos n\theta\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)$$

代回到原方程可得

$$R'' + \frac{1}{r}R' + k^2 R = 0$$

显然 $r = 0$ 是微分方程的正则奇点，则可设

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{n+v}$$

对 R 求导则有

$$R' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+v) C_n r^{n+v-1}$$

$$R'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+v)(n+v-1) C_n r^{n+v-2}$$

代回到原方程中有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+v)^2 C_n r^{n+v-2} + k^2 \sum_{n=2}^{\infty} C_n r^{n+v-2} = 0$$

其中r^n 对应的系数要相等。

当 $v = 0$ 时可得

$$C_0 \text{ 为任意常数}, \quad C_1 = 0$$

$$C_{2n} = \frac{-k^2}{4n^2} C_{2n-2} = \frac{(-k^2)^n}{4^n (n!)^2} C_0, \quad C_{2n+1} = 0$$

所以可得到一个解为

$$R_1 = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n}$$

当 $v = -1$ 可得

$$C_1 \text{ 为任意常数}, \quad C_0 = 0$$

$$C_{2n+1} = \frac{-k^2}{4n^2} C_{2n-1} = \frac{(-k^2)^n}{4^n (n!)^2} C_1, \quad C_{2n} = 0$$

所以方程另外一个解为

$$R_2 = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n+1}$$

方程最终解为

$$R(r) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n+1}$$

其中C_0,C_1 为任意常数。

(3) $\Delta_2 u + ku = 0$,求 $u = u(r)$。

解　与第(2) 小题解题过程一样，其最终结果为

$$u(r) = C_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n} + C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{4^n (n!)^2} r^{2n+1}$$

其中C_0,C_1 为任意常数。

(4) $\Delta_3 u = 0$,$u = R(r)\sin\theta\cos\varphi$,求 $R(r)$。

解　与大题 2 第(1) 小题相似

$$\Delta_3 u = R'' + R'\frac{2}{r} = 0$$

上述微分方程的解为

$$R(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

其中C_1,C_2 为任意常数。

(5) $\Delta_3 u = 0$,$u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}R(r,\omega)$,求 $R(r,\omega)$。

解 如果 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,那么方程将没有非零解,因此 $r = \sqrt{x^2+y^2}$。

对 x 求二阶偏导数有

$$u_{xx} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}\left(R''\frac{x^2}{r^2} + R'\frac{r-\frac{x^2}{r}}{r^2}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}\left(R''\frac{x^2}{r^2} + R'\frac{r^2-x^2}{r^3}\right)$$

同理可得

$$u_{yy} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}\left(R''\frac{y^2}{r^2} + R'\frac{r-\frac{y^2}{r}}{r^2}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}\left(R''\frac{y^2}{r^2} + R'\frac{r^2-y^2}{r^3}\right)$$

而

$$u_{zz} = -R\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega z}$$

将上述三式代入原方程中得到

$$R'' + \frac{1}{r}R' - R\omega^2 = 0$$

解法同大题 3 第(2) 小题,最终结果为

$$R(r,\omega) = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^{2n}}{4^n\ (n!)^2}r^{2n} + C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^{2n}}{4^n\ (n!)^2}r^{2n+1}$$

(6) $u_{tt} = a^2\Delta_2 u$,$u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}R(r,\omega)$,求 $R(r,\omega)$。

解 对 t 求二阶导数有

$$u_{tt} = -R\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

与大题 3 第(1) 小题相同

$$a^2\Delta_2 u = a^2\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\left(R'' + \frac{1}{r}R'\right)$$

将上述两式代回原方程有

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \frac{\omega^2}{a^2}R = 0$$

解法与大题 3 第(3) 小题相似,因此最终解为

$$R(r,\omega) = C_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{\omega^2}{a^2}\right)^n}{4^n\ (n!)^2}r^{2n} + C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{\omega^2}{a^2}\right)^n}{4^n\ (n!)^2}r^{2n+1}$$

4. 求下列方程的通解。

(1) $u_y + a(x,y)u = 0$。

解 由题意得