万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

2017

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

经济类

专业硕士数学复习全书

徐婕 主编

✓ 严格根据专业硕士联考考试大纲和真题命题规律编写
✓ 权威而富于教学经验的经管类联考命题研究中心成员编写
✓ 提供基于零基础的、精细完整的经管类联考应试解决方案

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

2017

经济类

专业硕士

数学复习全书

徐婕 主编

编委：徐婕 王丹 王爱霞 张喜珠 周晓燕

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

经济类专业硕士数学复习全书/徐婕主编. —北京:北京理工大学出版社,2016.6
ISBN 978-7-5682-2429-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第127346号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社 址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮 编 / 100081
电 话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网 址 / http://www.bitpress.com.cn
经 销 / 全国各地新华书店
印 刷 / 北京汇祥印务有限公司
开 本 / 787毫米×1092毫米 1/16
印 张 / 15
字 数 / 310千字
版 次 / 2016年6月第1版 2016年6月第1次印刷
定 价 / 36.80元

责任编辑 / 梁铜华
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

丛书序

本丛书专门为参加管理类联考、经济类联考的考生设计，是报考管理类、经济类专业学位硕士考生的必备应试教材。本套丛书由经管类联考命题研究中心成员、资深命题专家和辅导教师们联合编写，包括逻辑、写作系列丛书和经管类联考数学系列丛书。

本丛书具有如下特点：

一、严格根据专业学位硕士考试大纲和真题命题规律编写

本套丛书完全根据《管理类专业学位联考(199 科目)综合能力考试大纲》、《经济类专业学位联考(396 科目)综合能力测试考试大纲》进行编写，并对经管类联考的历年真题进行深度分类解析，形成完整、有效、易理解的应试书籍。丛书通过“知识点——经典例题——巩固习题——真题——模拟题”的方式，帮助考生充分理解和掌握所有考点，并能准确判断高频考点，达到经管类联考考生所需要的高分。

二、权威而富于教学经验的经管类联考命题研究中心成员

本套丛书的作者是经管类联考命题研究中心的权威资深辅导老师。逻辑写作丛书系列的主编杨岳老师、数学丛书系列的主编徐婕老师主力参加了各大媒体组织的 2012 至 2016 届经管类专硕研究生入学考试的“大纲解析”和“真题解析”工作。他们从 2007 年开始便致力于研究生入学考试的应试辅导，具有丰富的经管类联考辅导经验，既有对大纲的精准解析能力，又能对命题规律和真题进行深度把握，结合多年辅导经验编写的本套丛书，能快速地帮助考生达到经管类联考的应试要求。

三、提供基于零基础的、精细完整的经管类联考应试解决方案

于参加经管类联考考生而言，逻辑、写作一般都是零基础，数学基础一般较差。本丛书充分考虑绝大多数考生的现实情况，提供了基于零基础的、包含考研各个阶段的精细完整应试解决方案，帮助考生实现高分目标。

逻辑写作系列丛书包括《逻辑复习全书》、《写作复习全书》、《逻辑历年真题》、《写作历年真题》四本书籍。数学系列丛书包括《管理类专业硕士数学复习全书》、《经济类专业硕士数学复习全书》、《管理类专业硕士数学历年真题》、《经济类专业硕士数学历年真题》四本书籍。

该系列图书从考生的应试学习起点出发，详尽讲解大纲的所有知识点，并通过例题、习题、真题、模拟题的系统性训练，构建考生出色的应试能力。

我们最大的目标，是希望考生们通过自己的努力和我们众多经管类联考命题研究中心专家、教师们的帮助，在 2017 届经管类专硕考研中脱颖而出、金榜题名！

丛书编委会

前言

基于多年参加396经济类联考、199管理类联考"大纲解析"、"真题解析"的工作经验和多年对考生进行经管类联考的应试辅导的关注和总结，我对考生在数学学习中的难点、困惑和解决方案，有了越来越深的理解。帮助学生们避开陷阱、考出高分，是写作本书最直接的动力，同时经管类数学系列的这四本书籍也算是对自己近十年工作的一个总结和交代。

本书不仅可以作为报考经济类专业硕士(金融硕士、国际商务硕士等)、需要参加396经济类联考的考生的备考书，也可作为辅导老师的授课参考教材。

本书分为四个部分。

前三部分分学科按章编写，基于考生学习的起点，按照"知识点——重要题型——题型方法分析——典型例题——习题"的思路来编写，目的是使考生从零开始构建完整的知识框架，并精确把握各章节常考重要题型及题型方法，通过典型例题，迅速形成解题能力，每章配备20道左右习题，帮助大家加强固化解题能力，提升解题速度。

第四部分提供了4套模拟卷，每套20题，用于考生进行整体检测和查漏补缺。

下面对本书的标签进行说明：

【章的各级标题】构建形式完整的理论体系。

【注】帮助理解知识点的说明、扩展。

【题型】每个章节的常考重要题型

【题型方法分析】针对每种题型精炼处对应的解题方式

【例题】对某一个或几个知识点进行考察的标准化考题。

【答案】提供A～E的具体答案。

【解析】提供详尽的深度精确解析。

【总结】每道例题后面都给出根据本道例题所总结提炼的常规结论和方法。

【练习】学完一章的理论和例题后，以章为单位进行测试的标准化考题。

【模拟卷】以每套卷为单位，每次60分钟进行整体测试的标准化考题。

本书的编委会成员包括：徐婕(主编)、王丹、王爱霞、张喜珠、周晓燕。各位老师在成书过程中付出了时间和精力，尤其感谢王丹老师。

考生在使用本书过程中，如有疑问，可以登录新浪微博@万学海文徐婕老师进行交流。

编　者

目　录

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限和连续 …… 1
第一节　函　数 …… 2
第二节　极　限 …… 9
第三节　连续和间断点 …… 19
本章练习 …… 22
本章练习答案与解析 …… 23
第二章　一元函数微分学 …… 26
第一节　导数与微分的概念 …… 27
第二节　导数与微分的计算 …… 30
第三节　微分中值定理 …… 36
第四节　导数的应用 …… 37
第五节　微积分在经济学中的应用 …… 43
本章练习 …… 45
本章练习答案与解析 …… 46
第三章　一元函数积分学 …… 50
第一节　不定积分 …… 51
第二节　定积分及其应用 …… 63
本章练习 …… 73
本章练习答案与解析 …… 75
第四章　多元函数微分学 …… 80
第一节　多元函数的一阶偏导数 …… 80
第二节　多元复合函数和隐函数求导 …… 83
第三节　全微分 …… 85
本章练习 …… 88
本章练习答案与解析 …… 89

第二篇　线性代数

第一章　行列式 …… 93
本章练习 …… 102

本章练习答案与解析 …… 103
第二章　矩　阵 …… 106
本章练习 …… 125
本章练习答案与解析 …… 127
第三章　向量与线性方程组 …… 132
第一节　向　量 …… 132
第二节　线性方程组 …… 136
本章练习 …… 147
本章练习答案与解析 …… 149

第三篇　概率论与数理统计

第一章　随机事件及其概率 …… 155
第一节　计数原理 …… 156
第二节　随机事件和概率 …… 157
本章练习 …… 172
本章练习答案与解析 …… 174
第二章　一维随机变量及其概率分布 …… 177
本章练习 …… 193
本章练习答案与解析 …… 195
第三章　随机变量的数学期望和方差 …… 201
本章练习 …… 205
本章练习答案与解析 …… 207

第四篇　模拟试题

模拟试卷一 …… 211
模拟试卷二 …… 213
模拟试卷三 …… 215
模拟试卷四 …… 217
模拟试卷一答案及详解 …… 219
模拟试卷二答案及详解 …… 222
模拟试卷三答案及详解 …… 224
模拟试卷四答案及详解 …… 227

附录　联考大纲 …… 231

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限和连续

函数是高等数学的重要研究对象，需要会求函数的表达式，能准确写出定义域和值域. 在经济类联考数学当中，以真题的形式考查过. 极限是高等数学的研究工具，在经济类联考 396 数学中每年必考，是复习的重中之重，尤其是七种未定式极限的求解，务必熟练掌握. 而连续性是用极限来研究函数的第一个性态，是可导性和可积性的必要条件，同样重要. 为了更好地把握本章的内容，现总结本章知识体系框架如下：

本章知识框架

- 函数　有界性、单调性、奇偶性、周期性
- 极限
  - 极限概念
    - “$\varepsilon-N$”定义
    - “$\varepsilon-X$”定义
    - “$\varepsilon-\delta$”定义
  - 极限性质
    - 唯一性
    - 有界性
      - 数列整体有界
      - 函数局部有界
    - 保号性
  - 求极限的主要方法
    - 极限四则运算法则
    - 等价无穷小替换
    - 变量替换
    - 洛必达法则
      - $\frac{0}{0}$ 型、$\frac{\infty}{\infty}$ 型
      - $\infty-\infty$ 型、$0\cdot\infty$ 型；1^{∞}、∞^{0}、0^{0} 型 —— 转换
    - 极限存在准则
      - 单调有界数列有极限
      - 夹逼定理
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$
      - $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$
    - 函数的连续性
    - 导数的定义
    - 函数极限求数列极限
    - 定积分定义求某些和式的极限
  - 无穷小量
    - 无穷小量与无穷大量的定义、关系
    - 无穷小量的运算性质
    - 无穷小量与极限的关系
    - 无穷小量的比较

- 连续性
  - 连续的概念
    - 初等函数的连续性
    - 分段函数连续性的判定
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 有界性定理
      - 零点定理
      - 最值定理
      - 介值定理
  - 间断点的分类
    - 第一类 —— 左右极限都存在
      - 跳跃间断点
      - 可去间断点
    - 第二类 —— 左右极限中至少有一个不存在

第一节　函　数

考点归纳

一、函数的概念

设 I 是实数集的某个子集，对于 $\forall x \in I$，通过一个对应法则 f，都有唯一确定的值 y 与之对应，即

$$\forall x \in I, x \xrightarrow{f} y$$

则称变量 y 为变量 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 其中，I 称为函数的定义域，f 称为对应法则，而相应的函数值的全体称为函数的值域.

【注】 1. 自然定义域：使得算式有意义的一切实数组成的集合. 常见函数的自然定义域：

(1) 分式函数，$\dfrac{1}{u(x)}$，$u(x) \neq 0$；

(2) 开偶次方，$\sqrt[2n]{u(x)}$，$u(x) \geqslant 0$；开奇次方，$\sqrt[2n+1]{u(x)}$，$u(x) \in \mathbf{R}$；

(3) 对数函数，$\ln(u(x))$，$u(x) > 0$；

(4) 三角函数：

$\sin x, x \in \mathbf{R}$；$\cos x, x \in \mathbf{R}$；$\tan x, x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$；$\cot x, x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$；

(5) 反正弦函数和反余弦函数，$\arcsin u(x)$，$\arccos u(x)$，$|u(x)| \leqslant 1$.

2. 考研中所指的函数均为单值函数，故要确定一个函数关系只要知道函数定义的两要素：定义域、对应法则. 即两个函数相等 $\Leftrightarrow$ 定义域相同且对应法则相同.

特别的是，函数与自变量的字母表示无关，比如 $y = x^2$ 与 $y = t^2$ 这两个函数相等.

二、函数的几何特性

1. 奇偶性

(1) 奇偶函数的定义

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-a, a)(a > 0)$，若对于任意一个 $x \in (-a, a)$ 都有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若对于任意 $x \in (-a, a)$，都有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 奇偶函数的性质

① 图像特征：偶函数图像关于 y 轴对称，奇函数图像关于原点对称；

② 奇函数如果在 $x=0$ 点有定义，则必有 $f(0)=0$；

③ 奇偶函数的运算法则：

加法运算法则：奇 + 奇 = 奇，偶 + 偶 = 偶，非零奇 + 非零偶 = 非奇非偶；

乘法运算法则：奇 × 奇 = 偶，奇 × 偶 = 奇，偶 × 偶 = 偶，简记为同偶异奇；

复合运算法则：奇(奇) = 奇，奇(偶) = 偶，偶(偶) = 偶，偶(奇) = 偶，简记为一偶则偶.

④ 任意一个函数 $f(x)$，$x\in[-a,a]$，则均可拆成一个偶函数和一个奇函数之和，即

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

⑤ 常见的奇函数：$0,\sin x,\tan x,\dfrac{1}{x},x^{2n+1},\arcsin x,\arctan x,\cdots$

常见的偶函数：$C,|x|,\cos x,x^{2n},e^{|x|},e^{x^2},\cdots$

⑥ 奇偶性与微积分的结合：可导偶函数的导函数是奇函数；可导奇函数的导函数是偶函数；连续奇函数的原函数均是偶函数；连续偶函数的原函数有一个是奇函数，其余为非奇非偶.

2. 周期性

(1) 周期函数的定义

对函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T>0$，使得对定义域内的每一个 x，$x+T$ 仍在定义域内，且有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期.

(2) 周期函数的性质

① 图像特征：周期函数的图像是周期变化的.

② 若函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则函数 $f(\omega x)$ 以 $\dfrac{T}{|\omega|}$ 为周期；若函数 $f_1(x)$ 以 T_1 为周期，函数 $f_2(x)$ 以 T_2 为周期，则函数 $f_1(x)+f_2(x)$ 以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期.

③ 考研常见的周期函数：$C,\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|\cdots$

④ 周期性与微积分的结合：可导的周期函数的导函数是周期函数；周期函数的原函数不一定是周期函数.

3. 单调性

(1) 单调性的定义

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，在 $\forall x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$ 时，均有

①$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加；

②$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少；

如果把上述定义中的“$<$”换成“$\leqslant$”称为单调不减，“$>$”换成“$\geqslant$”称为单调不增.

(2) 单调性的性质

① 单调性是函数在某个区间上的性质，因此单调性是一个区间概念；

② $\forall x\in I,f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调递增；$\forall x\in I,f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 在 I 上单调递减.

4. 有界性

(1) 有界性的定义

设函数 $y=f(x)$ 在一个数集 I 上有定义，若存在正数 M，使得对于 $\forall x\in I$，有 $|f(x)|<M$ 成立，则称 $f(x)$ 在 I 上有界；如果不存在这样的 M，即对充分大的 $M>0$，都 $\exists x\in I$，使 $|f(x_1)|>M$，就称函数 $f(x)$ 在 I 上无界.

(2) 有界性的性质

①$y=f(x)$ 在 I 上有界 $\Leftrightarrow y=f(x)$ 在 I 上既有上界。又有下界；

② $y=f(x)$ 在有限区间 I 上其导函数 $f'(x)$ 有界，则函数 $f(x)$ 在 I 上也有界；

③ 常见的有界函数：$C, \sin x, \cos x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x \cdots$

④ 有界性是函数在某个区间上的性质，因此有界性是一个区间概念.

三、函数的构成方法与常见函数类

1. 基本初等函数

幂函数：$y=x^{u}$（$u \in \mathbf{R}$ 是常数）；

指数函数：$y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a \neq 1$）；

对数函数：$y=\log_{a} x$（$a>0$ 且 $a \neq 1$，特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，$y=\ln x$）；

三角函数：$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数：$\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

2. 复合函数

在有意义的情况下 $y=f(u), u=\varphi(x) \xrightarrow{\text{多合一}} y=f[\varphi(x)]$.

【注】 函数复合的条件：$y=f(u)$ 的定义域与 $u=\varphi(x)$ 的值域有交集.

3. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算构成的，并可以用一个式子表示的函数，称为初等函数.

【注】 初等函数是考研数学研究的重点.

4. 分段函数

(1) 分段函数的定义：

若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示，形如

$$y=f(x)=\begin{cases} f_{1}(x), x \in I_{1}, \\ f_{2}(x), x \in I_{2}, \\ \cdots \\ f_{n}(x), x \in I_{n}, \end{cases}$$

称其为分段函数.

(2) 常见的隐形分段函数

① 绝对值函数：$y=|f(x)|$，分段点：$f(x)=0$ 的点，即零点分段；

② 取整函数：$y=[f(x)]$，分段点：所有的整数点；

③ 最值函数：$y=\max\{f(x), g(x)\}$ 或 $y=\min\{f(x), g(x)\}$，分段点：$f(x)=g(x)$ 的点，即令两函数相等的点.

5. 反函数

$$y=f(x) \xrightarrow{\text{若可反解出 } x} x=f^{-1}(y).$$

6. 隐函数

设有方程 $F(x, y)=0$，若对于 $\forall x \in I$ 都由方程唯一的确定了一个 y 的值，则由此所确定的一个函数关系式 $y=y(x)$ 称为由方程 $F(x, y)=0$ 确定的在 I 上的隐函数.

7. 幂指函数

$y=f(x)^{g(x)}\ (f(x)>0)$

【注】 $y=f(x)^{g(x)}=\mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$，一般用 e 作底数将幂指函数转为指数函数.

重要题型

题型一 函数的两要素

【题型方法分析】

(1) 利用函数的两要素判定函数是否相同；

(2) 用变量代换法求函数的表达式；

(3) 利用定义域的概念和常见函数的自然定义域求解复杂函数的定义域.

例 1.1　下列函数对中,表示同一函数的是(　　).

(A) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$

(B) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$

(C) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(u) = u\sqrt[3]{u-1}$

(D) $f(x) = x+1$, $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

【答案】 (C)

【解析】 选项(A) 中,两个函数的定义域不同,函数 $f(x) = \ln x^2$ 的定义域为 $x \neq 0$,函数 $g(x) = 2\ln x$ 的定义域为 $x > 0$,故两个函数不同.

选项(B) 中,函数 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$,而 $f(x) = x$,即两个函数的对应法则不同,故两个函数不同.

选项(C) 中,函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3} = \sqrt[3]{x^3(x-1)} = x\sqrt[3]{x-1}$,定义域为 $x \in \mathbf{R}$,而函数 $g(u) = u\sqrt[3]{u-1}$,定义域为 $u \in \mathbf{R}$,即两个函数的定义域和对应法则均相同,只有变量名称不同,而变量名称不是函数的要素,故这两个函数相同,因此答案选(C).

选项(D) 中,函数 $f(x) = x+1$,定义域为 $x \in \mathbf{R}$,而函数 $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$,定义域为 $x \neq 1$,两个函数的定义域不同,故两个函数不同.

【总结】 判定两个函数是否相同,只要检验其两要素:定义域和对应法则是否相同即可,与变量名称无关.

例 1.2　若 $f(e^x) = x+1$,则 $f(1)$ 的值为(　　).

(A) 2　　(B) 1　　(C) 0　　(D) $e+1$

【答案】 (B)

【解析】 令 $e^x = t$, $x = \ln t$,则 $f(t) = \ln t + 1$, $t > 0$,故可知 $f(1) = \ln 1 + 1 = 1$.

【总结】 求复合函数表达式,用变量替换法作整体替换.

例 1.3　已知函数 $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{2x}-1}}{e^x - 1}$,求 $f(x)$ 的定义域.

【解】 要使 $\dfrac{\sqrt{\sqrt{2x}-1}}{e^x-1}$ 有意义,则要求 $\begin{cases} 2x \geqslant 0, \\ \sqrt{2x} - 1 \geqslant 0, \\ e^x - 1 \neq 0 \end{cases}$ 同时成立,即 $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 因此函数 $f(x)$ 的定义域为 $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

【总结】 求函数的定义域,如果没有特殊要求,则直接利用常见函数的自然定义域求解.

题型二　函数的几何特性

【题型方法分析】

(1) 判定函数的奇偶性：

① 奇偶性的定义；

② 奇偶性的性质；

③ 若 $f(-x)+f(x)=0$，则 $f(x)$ 为奇函数；$f(-x)+f(x)=2f(x)$，则 $f(x)$ 为偶函数.

④ 若 $f(x)\neq 0$，且 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1$，则 $f(x)$ 为奇函数；$\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1$，则 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 判定函数的周期性：

① 周期性的定义；

② 周期性的性质；

(3) 判定函数的单调性：

① 单调性的定义；

② 若函数可导，利用其导数符号；

③ 数学归纳法.

(4) 判定函数的有界性：

① 有界性的定义；

② 有界性的性质；

③ 数学归纳法.

例 1.4　已知函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，则 $f(x)$ 为(　　).

(A) 奇函数　　(B) 偶函数　　(C) 非奇非偶函数　　(D) 无法确定

【答案】 (A)

【解析】 方法一　**利用定义.**

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\left[\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]\\&=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\\&=-f(x),\end{aligned}$$

故函数 $f(x)$ 为奇函数.

方法二　$$\begin{aligned}f(x)+f(-x)&=\ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{x^2+1})\\&=\ln(x^2+1-x^2)=\ln 1=0,\end{aligned}$$

故函数 $f(x)$ 为奇函数.

【总结】 根据题设条件选择前面所总结的方法判定函数的奇偶性，本题在方法一中化简的方法是根式有理化，在计算中若遇到根式相加或者相减的形式，则可以考虑此方法.

例 1.5　已知函数 $f(x)=x^2\sin x\mathrm{e}^{\cos x}, x\in\mathbf{R}$，则 $f(x)$ 为(　　).

(A) 周期函数　　(B) 有界函数　　(C) 单调函数　　(D) 奇函数

【答案】 (D)

【解析】　易知，$\cos x$，$\sin x$ 均以 2π 为周期，验证 2π 是否为函数 $f(x)=x^2\sin x e^{\cos x}$ 的周期，利用周期性的定义可知，$f(2\pi+x)=(2\pi+x)^2\sin(2\pi+x)e^{\cos(2\pi+x)}=(2\pi+x)^2\sin x e^{\cos x}\neq f(x)$，因此 $f(x)$ 不是周期函数.

关于有界性，令 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)e^{\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=\infty$，则 $f(x)$ 为无界函数.

关于单调性，任取三个函数值

$f(0)=0$，$f(-\frac{3\pi}{2})=\left(-\frac{3\pi}{2}\right)^2\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)e^{\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}=\frac{9\pi^2}{4}$，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)e^{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\pi^2}{4}$，易得 $f(0)<f(-\frac{3\pi}{2})$，$f(0)<f(\frac{\pi}{2})$，因此函数不具备单调性.

易知，$\sin x$ 是奇函数，$e^{\cos x}$，x^2 均是偶函数，则由奇×偶＝奇可知，函数 $f(x)=x^2\sin x e^{\cos x}$ 是奇函数.

【总结】　要理解函数的各个几何特性的定义和判断方法，奇偶性一般先看定义域是否对称，再用定义来判断；单调性可以通过求导来判断，在选择题中也可以用特值来判断，排除错误选项；周期性需要严格进行验证，一般主要是针对三角函数；有界性或者无界性的判断需要和极限结合起来.

例 1.6　已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(6)$ 的值为（　　）.

(A) -1　　(B) 0　　(C) 1　　(D) 2

【答案】　(B)

【解析】　由题设可知，$f(x)$ 是奇函数，则 $f(0)=0$，又 $f(x+2)=-f(x)$，故 $f[(x+2)+2]=-f(x+2)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 以 4 为周期，则 $f(6)=f(2)=f(0+2)=-f(0)=0$，因此答案选(B).

【总结】　已知 $f(x+a)=-f(x)$，则 $f[(x+a)+a]=-f(x+a)=-(-f(x))=f(x)$，即以 $2a$ 为周期.

题型三　函数的复合和分解

【题型方法分析】

(1) 将简单的初等函数、分段函数进行复合，利用复合函数的定义，由外向里逐层进行复合；

(2) 将复合函数逐层分解成简单函数，则由外向里逐层进行分解，直至分解为简单函数为止.

例 1.7　设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}-x^2, & |x|<1,\\ 3-|x|, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 试求 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

【解】　先复合最外层，将 $g(x)$ 看成整体，则 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & g(x)\leqslant 0,\\ 2, & g(x)>0,\end{cases}$ 再求 $g(x)$ 的值域.

当 $|x|<1$ 时，$g(x)=-x^2$，则 $-1<g(x)\leqslant 0$；

当 $1\leqslant|x|<3$ 时，$g(x)=3-|x|$，则 $g(x)>0$；

当 $|x|\geqslant 3$ 时，$g(x)=3-|x|$，则 $g(x)\leqslant 0$；

故 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |x|<1 \text{ 或 } |x|\geqslant 3,\\ 2, & 1\leqslant |x|<3.\end{cases}$

先求 $g[f(x)]$，仍然从外向里复合，将 $f(x)$ 看成一个整体，则

$g[f(x)]=\begin{cases}-[f(x)]^2, & |f(x)|<1,\\ 3-|f(x)|, & |f(x)|\geqslant 1,\end{cases}$ 再求 $f(x)$ 的值域，因为

$f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0,\end{cases}$ 故可得 $f(x)\geqslant 1$，因此

$g[f(x)]=3-|f(x)|=\begin{cases}2, & x\leqslant 0,\\ 1, & x>0\end{cases}$，$x\in\mathbf{R}$.

【总结】 将两个函数进行复合，按照由外向里的顺序比较简便，在最外层复合时，将里层函数看作整体代入.

例 1.8 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{1+x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $f\{f[f(x)]\}$.

【解】 由外向里逐层复合 $f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}2f[f(x)], & f[f(x)]\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{1+f[f(x)]}, & f[f(x)]>0.\end{cases}$

再求 $f[f(x)]$，可知 $f[f(x)]=\begin{cases}2f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{1+f(x)}, & f(x)>0.\end{cases}$

接下来求 $f(x)$ 的值域. 由 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{1+x}, & x>0\end{cases}$ 知，

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=2x\leqslant 0$；

当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{2}{1+x}>0$，故由 $f[f(x)]=\begin{cases}2(2x), & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+x}}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}4x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2+2x}{3+x}, & x>0\end{cases}$ 可知 $f[f(x)]$ 的值域.

当 $x\leqslant 0$ 时，$f[f(x)]=4x\leqslant 0$；

当 $x>0$ 时，$f[f(x)]=\dfrac{2+2x}{3+x}>0$，代入可得

$$f\{f[f(x)]\}=\begin{cases}2(4x), & x\leqslant 0,\\ \dfrac{2}{1+\dfrac{2+2x}{3+x}}, & x>0\end{cases}=\begin{cases}8x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{6+2x}{5+3x}, & x>0.\end{cases}$$

【总结】 无论是多少层的函数复合,我们只要从最外层开始逐层向里进行复合,复合时都将下层函数看作一个整体,然后求出里层函数的值域范围,再依次还原代入即可.

第二节　极　限

考点归纳

一、极限的定义

1. 数列极限

(1) 数列收敛的定义

设数列$\{y_n\}$:$y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots$若当$n$无限增大时,$y_n$趋于某固定数值$M$,则称数列$\{y_n\}$以$M$为极限,记作$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=M$或$y_n\to M,(n\to\infty)$.此时也称数列收敛于$M$.若不存在这样的定值$M$,则称数列发散.

(2) 数列极限的$\varepsilon-N$定义

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N$(自然数),使得当$n>N$时,有$|x_n-A|<\varepsilon$.

【注】 1.极限存在时称数列是收敛的,极限不存在时称数列是发散的.

2.数列极限只对从N后面无穷多项有要求,而对前面有限项无约束.

3.$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=A$.

2. 函数极限

(1) 函数极限的定义1($\varepsilon-X$语言)

当$x\to\infty$时的函数极限:$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,使得当$|x|>X$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

(2) 函数极限的定义2($\varepsilon-\delta$语言)

当$x\to x_0$时的函数极限:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】 1.函数极限在某点的极限是否存在与该点的定义无关.

2.数列极限可转化为函数极限,设$x_n=f(n)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,要注意在数列极限中默认$n$为正整数,故要写成$x\to+\infty$.

(3) 单侧极限

$f(x)$在x_0点的左极限:$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,也可记为$f(x_0-0)$.

$f(x)$在x_0点的右极限:$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$,也可记为$f(x_0+0)$.

(4) 极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

【注】 极限存在的充要条件一般用于分段函数在分段点处求极限.

(5) 需要熟记的常用极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$;$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$;$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0,|q|<1$;$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty,|q|>1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$;$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$;$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$;$\lim\limits_{x\to0^+}x^x=1$;

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$;$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

二、极限的性质

(1) 唯一性

若数列(函数)的极限存在,则此极限必唯一.

(2) 有界性(局部有界性)

如果数列收敛,则数列必有界;如果函数极限存在,则函数局部有界.

(3) 保号性(局部保号性)

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0$,则$\exists\,\delta>0$,使得$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,$f(x)>0$.

【注】 1. 如果当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时,$f(x)>0$,那么$A\geqslant0$.

2. 推广:设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则$\forall\,l<A$,$\exists\,\delta>0$,使得$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$,$f(x)>l$.

三、极限的运算法则

1. 极限的四则运算法则

若$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,那么

$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$, $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$, $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq0)$.

【注】 1. 可推广至有限个,若$\lim f_1(x)=A_1,\lim f_2(x)=A_2,\cdots,\lim f_n(x)=A_n$,则

$$\lim[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=A_1+A_2+\cdots+A_n.$$

2. 定性分析:存在 ± 存在 = 存在,存在 ± 不存在 = 不存在,不存在 ± 不存在 = 不一定

存在 × 存在 = 存在,不存在 × 存在 = 不一定,不存在 × 不存在 = 不一定

存在($\neq0$) × 不存在 = 不存在

3. 加减运算的推广:若$\lim f(x)=A$,则$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm\lim g(x)$.

4. 乘法运算的推广:若$\lim f(x)=A\neq0$,则$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot\lim g(x)$,即非零因子先求出.

5. 商的极限的两个结论:

(1)$\lim\frac{f(x)}{g(x)}$存在,$\lim g(x)=0\Rightarrow\lim f(x)=0$;

(2)$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq0$,$\lim f(x)=0\Rightarrow\lim g(x)=0$.

2. 幂指函数极限运算法则

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=A^B$.