

数据、模型与决策

管理科学的数学基础

Data, Model and Decision

The Mathematical Fundamental of Management Science

梁櫟 杨锋 苟清龙 编著



机械工业出版社
China Machine Press

华章文渊
管理学系列

数据、模型与决策

管理科学的数学基础

Data, Model and Decision

The Mathematical Fundamental of Management Science

梁樑 杨锋 苟清龙 编著



机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目 (CIP) 数据

数据、模型与决策：管理科学的数学基础 / 梁樑，杨锋，苟清龙编著. —北京：机械工业出版社，2017.1

(华章文渊·管理学系列)

ISBN 978-7-111-55534-6

I. 数… II. ①梁… ②杨… ③苟… III. 决策模型 IV. C934

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 281890 号

本书以“数据—建模—决策”为线索，以电子表格为工具，以案例教学为手段，旨在帮助学生掌握数据收集、处理和分析的方法；建立合理的定量分析模型，获得准确的结果；做出正确的决策。本书主要涉及概率统计和运筹学等管理学科典型的方法论和科学工具，强调决策方法在商务和管理环境下的实际应用。

本书适合 MBA、管理学院的本科生及研究生、在职管理人员的学习和参考。

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：施琳琳

责任校对：董纪丽

印 刷：北京诚信伟业印刷有限公司

版 次：2017 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

开 本：185mm×260mm 1/16

印 张：26.5

书 号：ISBN 978-7-111-55534-6

定 价：45.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 88379210 88361066

投稿热线：(010) 88379007

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱：hzjg@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问：北京大成律师事务所 韩光 / 邹晓东

华章文渊
管理学系列

师道文宗
笔墨渊海

文渊阁 位于故宫东华门内文华殿后，是紫禁城中贮藏图书的地方，世界上最大的丛书《四库全书》曾经藏在这里，阁内悬有乾隆御书“汇流澄鉴”四字匾。

作者简介

梁樑 教授、博士生导师，现任合肥工业大学校长，曾任中国科学技术大学管理学院执行院长。主要从事数据包络分析和供应链管理等领域的研究，国家杰出青年科学基金获得者、教育部长江学者特聘教授等。近年来主持国家自然科学基金创新研究群体基金、重大海外合作项目和国家科技支撑计划项目等，在国际学术期刊（SCI和SSCI检索）上发表论文90多篇，研究成果曾获得教育部自然科学一等奖和教育部高等学校优秀科研成果（人文学科）一等奖等多个奖项，2012年获得复旦管理学杰出贡献奖。主要社会兼职包括中国优选法统筹法与经济数学研究会和中国决策科学学会副理事长，中国管理现代化研究会、中国系统工程学会和中国管理科学学会常务理事等。

杨锋 教授、博士生导师，现任中国科学技术大学管理学院副院长。主要从事决策科学和运营管理等领域的研究，国家优秀青年科学基金获得者、教育部新世纪优秀人才支持计划入选者。近年来主持国家自然科学基金重点项目等多个国家级课题，在国际学术期刊（SCI和SSCI检索）上发表论文40多篇，研究成果曾获得教育部自然科学一等奖、Emerald Outstanding Author Contribution Awards等多个奖项。主要社会兼职包括中国系统工程学会理事、安徽金融统计学会学术委员会主席等。

苟清龙 副教授、硕士生导师，现任教于中国科学技术大学管理学院。主要从事供应链管理、运营与营销交叉等领域的研究。近年来主持多项国家自然科学基金项目，是多个重大项目的研究骨干，在*Decision Sciences*、*IJPR*、*IJPE*、*Omega*、*JORS*、*AOR*等重要国际期刊上发表论文30余篇，研究成果曾获得教育部自然科学一等奖、The XVIII ACME International Conference on Pacific Rim Management（Toronto 2008）的Best Theoretical Paper Award等多个奖项。

出版说明

提高自主创新能力，建设创新型国家，是党中央、国务院做出的战略部署，是包括科技界、教育界在内的全社会的共同目标。高等学校是培养和造就数以千万计专门人才和一大批拔尖创新人才的重要基地，是综合国力的重要组成部分，在支撑经济社会发展、提高自主创新能力、推进创新型国家建设中具有不可替代的重要作用。增强自主创新能力、建设创新型国家，对培养创新人才提出了新的要求，对高等教育提出了新的挑战。教育部明确提出大力推进高校自主创新，进一步提高高等教育质量。

作为教学内容改革成果重要体现形式的教材，则在高校创新人才的培养中扮演着重要角色。“教材是体现教学内容和教学方法的知识载体，是进行教学的具体工具，也是深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才的重要保证。”新世纪的到来，对高等教育来说，不仅是时间上的跨越，更重要的是教育思想、教育观念发生了深刻的变革，而教材正从一个侧面折射出教育思想变革。为体现优秀教材创新成果，机械工业出版社华章公司推出“华章文渊”教材系列（分经济学系列和管理学系列）。本系列重视教育思想和观念的改革，力求处理好知识、能力和素质三者辩证统一的关系，以素质教育为核心组织教材的内容，实现教材内容和体系的创新。“华章文渊”教材充分体现“授人以鱼不如授人以渔”的终身教育的思想。

奉献给广大读者的“华章文渊”教材系列重在培养学生的创新精神和能力，观点、体系有所创新，既与国际接轨，又具有理论性、实用性、可操作性和创新性等鲜明特色，具有各自的知识创新点和独到之处。同时，优秀教材是知识性和可读性的结合体，将深奥的知识融于浅显易懂的文字中，努力使读者的学习过程变得轻松愉快，也是“华章文渊”的目标。

秉承“国际视野、教育为本、专业出版”的理念，华章始终坚持以内容为先的出版标准。集合优秀教材创新成果的“华章文渊”教材系列正是“深化教育教学改革，全面推进素质教育，培养创新人才”的直接体现，期待有志于此的广大教师加入。

华章经管出版中心

前 言

管理更应被视为一门艺术，还是一门科学？不同背景的学者、实践管理者会给出不同的回答，并可以提供充足的论据进行辩护。争执不下的结果之一是：一些学者认为，管理既是一门艺术，又是一门科学。

在编写本书时，我们无意于纠缠这一问题的答案，而是重点偏向于管理的科学性，并将本书视为管理科学的基础性教材。众多学者承认，管理科学（Management Science, MS）、决策科学（Decision Science, DS）与运筹学（Operations Research, OR）具有深刻的关联，甚至有学者以 MS/OR 作为管理科学、决策科学、运筹学的共同称呼。MS/OR 可以定义为：基于定量数据，通过科学的方法来制定管理决策的一门学科。该定义包含三个重要元素：一是数据，即定量数据是制定决策的依据；二是模型，即科学方法是判定决策优劣的逻辑基石；三是决策，即数据和模型的目标是推动决策结果的最优化或满意化，从而服务于现实需求。因此，我们认为，数据、模型与决策，是管理科学、决策科学和运筹学最基础的元素。本书的编撰，也是为管理科学、决策科学和运筹学学科提供一本最基础的教材。

管理科学所使用的科学方法，可能会涉及数学、计算机、经济学、信息科学等多个学科，但数学是最为主要的。我们通过数学模型来实施科学的运算和判断。所谓模型，是对研究的实体进行必要的简化，并用适当的变现形式或规则把它的主要特征描述出来；而数学模型，则是以数学语言描述的一类模型，其形式可能包括代数、方程、规划、统计、图、拓扑、几何等。考虑到管理科学的特点，本书对数学方法的呈现形式尽可能简洁易懂，以便读者能够更容易地接受本书，更容易将有关知识应用于指导管理实践。

与本书类似的书籍确实十分多，特别是大量的国外教材相继翻译成中文，极大地拓宽了读者的选择空间。在这些书籍中，本书具有十分鲜明的特色。具体来说，相比较同类书籍而言，本书具有如下特点。

（1）通俗易懂，深入浅出。本书以管理学视角（而非数学视角）来呈现各种数学技术，使得读者不需要掌握特别深厚的数学基础，即可掌握本书的核心思想和技术。在问题求解技术上，本书力图以常见的 Excel 软件来实现各种计算，读者不需要深入学习 MATLAB、SPSS 等专业软件，也无须耗费巨大精力去钻研单纯形法等传统求解方法。

（2）以中国情景的案例串联起问题和知识点。在每一个章节中，都呈现出众多的中国情景的问题，围绕着该问题的解决，各个知识点不再是孤零零的，而是通过例子串联起来。通过这些案例，既能够引起读者的学习兴趣，又清晰地展现了不同技术和知识点的差

异,使读者的理解更为明晰。

(3) 增加了一些本领域十分重要而基础的内容,使得读者在学习本书之后有更大的收获,并可以为未来的进一步学习奠定一定的基础。这些新增的内容主要包括:收益管理、数据包络分析、决策的发展历史、群决策、前景理论等。其中,收益管理、数据包络分析、前景理论是学术界广泛关注的热点领域。

全书共分为三大部分,共 15 章。

第一部分围绕“数据”展开,展现了数据的描述、分布、统计和预测,共 4 章,对应于第 1~4 章。其中,第 1 章“随机变量与概率分布”重点介绍随机事件及概率的定义、条件概率的运算等,并呈现了几类代表性的离散概率分布和连续概率分布形态。第 2 章“数据描述及归纳”介绍了总体和样本的概念及区别,并展现了参数形式的数据描述和图表形式的数据描述方法,在此基础上,进一步介绍了数据统计规律描述在德尔非法实施过程中的重要性。在帮助读者掌握了数据描述的基本方法后,第 3 章“统计推断”帮助读者如何通过抽样来认识总体。主要需要掌握一些抽样方法,如简单随机抽样、系统抽样、分层抽样、整群抽样等;对抽样的数据特征进行认知,并据此判断特征,于是读者可以掌握点估计、均值、标准差、比例以及两个总体均值差的置信区间等知识;最后,为了由样本推断总体的特性,读者需要掌握基础的假设检验方法,这些内容均在第 3 章进行介绍。第 4 章“预测”专注于考虑如何通过当前已知数据来推断未来未知数据。预测的方法主要分为两类,其一是数据的变化受到外界因素的影响,利用回归分析法可以解决此类预测问题;其二是数据的变化不受外界因素的影响,仅仅依据事件发展的内部惯性,利用时间序列分析可以解决这一类预测问题。

第二部分围绕“运筹模型”展开,着重讲述数学规划相关知识,共 5 章,对应于第 5~9 章。第 5 章“线性规划”介绍了最优化问题求解的最基础的方法,即线性规划,通过明确决策变量、优化目标、约束条件以及它们之间的相互关系,建立起线性规划模型,进行求解找到最优解,通过灵敏度分析来理解最优解的性质。这些内容可以帮助读者初步去解决一些最优化问题。在此基础上,第 5 章介绍了利用线性规划进行投入-产出效率分析的经典方法——数据包络分析。第 6 章“整数规划”展现了整数规划(特别是更重要的 0-1 整数规划)的概念、求解方法和应用。0-1 整数规划有助于解决众多包含逻辑判断的最优化问题,本书着重描述了它的一个应用,即指派问题。第 7 章“动态规划”向读者介绍了多阶段动态决策过程的描述以及动态最优问题的求解方法,并在此基础上介绍了一类典型的动态规划问题——收益管理问题。第 8 章“非线性规划”介绍了非线性规划的基本概念,并就一类典型的约束优化型非线性规划问题的求解和应用进行了阐述。第 9 章“网络模型”介绍了图论在管理学的经典应用案例,即最短路径问题、最小生成树问题和最大流量问题。

第三部分围绕“决策”展开,展现了不同类型的决策问题和技术,共分为 6 章,对应于第 10~15 章。第 10 章“决策理论知识”描述了决策科学的发展历史,从本能决策、原始决策到科学决策,阐述了该演变路线背后的原因。同时,介绍了决策问题包含的主要要

素,如决策者、分析者、决策目标、决策方案、自然状态、决策结果、决策准则、信息等,在此基础上重点阐述了与决策问题密切联系的风险、效用等概念。第11章“不确定性决策”介绍了不确定型决策的5种决策准则:乐观准则、悲观准则、后悔值准则、折中准则和等可能性准则,对不同的决策气质与准则的选取也一并进行了介绍。第12章“风险型决策”展示了4种经典的风险决策方法。风险型决策的基础是期望值准则,该准则根据各个方案目标函数期望值的大小进行决策;最大可能准则是从各种自然状态中选择一个概率最大的状态来进行决策;贝叶斯决策和决策树方法是在期望值准则下发展出来的、适用于不完全证据或动态过程的风险决策方法。第13章“多属性决策”详细讲解了多属性决策的基本方法(如线性加权法、理想点法、ELECTRE法等)以及应用性极广的三类多属性决策方法(包括层次分析法、数据包络分析、加总比例分析)。第14章“群决策”介绍了群决策的概念及其与个体决策的差异,理解了二者不同的适用范围;接下来介绍了9种常用的社会选择函数,包含Condorcet函数、Copeland函数、Dodgson函数、Borda函数、Nanson函数、本征向量函数(Lin函数)、Kemeny函数、Cook-Seiford函数、Bernardo函数等;最后,这一章介绍了投票制度,并提到了该领域经典的三大不可能定理(阿罗不可能定理、Gibbard-Satterthwaite防策略投票不可能性定理、Sen帕累托自由不可能性定理)。第15章“行为决策:前景理论”列举了最常见的有限理性行为,然后给出了前景理论,并通过范例来演示如何使用前景理论来解释现实生活中的有限理性决策行为。

本书全书结构由梁樑确定,第1~4章由梁樑负责,参与编写的人员还包括杜少甫、叶五一、董骏峰、朱昌磊等人;第5~9章由苟清龙负责,参与编写的人员还包括吴杰、李勇军、张娟等人;第10~15章由杨锋负责,参与编写的人员还包括杜菲、杨明明、魏方庆、江利景等人。中国科学技术大学管理学院的多位研究生参与了本书的校对与算例求解。全书由梁樑、杨锋统稿。

在本书的编写过程中,机械工业出版社华章公司的编辑施琳琳、张有利、吴亚军、云逸四位老师给了本书极大的支持和帮助,在长达五年的时间内不倦地指导本书的编撰和修改,使得我们的辛苦工作得以呈现在读者眼前。在此,我们郑重地对诸位编辑致以诚挚的感激和敬意。本书在编写和评审过程中得到了许多国内同行的指导,在此一并致谢。本书的编写,同时也得到了国家自然科学基金的资助,感谢国家自然科学基金委管理学部对本团队的长期支持。

在本书的编写过程中,编者广泛参考了大量的相关教材和文献资料。主要参考文献已经列出,但难免有重要参考文献遗漏。编者向已经列出和未列出的参考文献的作者致以由衷的感激之情。本书但凡有可取之处,均受益于这些学者的学术贡献;而本书存在的错漏,则应归咎于编者的学识有限。在此予以郑重声明。

由于编者水平有限,书中肯定有不妥之处,望广大读者不吝赐教。

梁樑 杨锋 苟清龙

2016年8月于中国科学技术大学

教学建议

一、课程介绍

本书主要是通过系统地介绍管理科学、决策科学和运筹学的基础性定量分析方法，奠定学生定量分析问题的思维习惯，提升定量分析问题和解决问题的学习兴趣，掌握最基本的管理学定量分析工具，运用基础软件解决实践问题，为后续课程的学习提供坚实的基础。

二、选课建议

本书适合高等学校管理类（包括管理科学与工程、工商管理、公共管理）和经济类（如应用经济学）等专业的本科生或者 MBA 学生，对应的课程是运筹学、管理科学基础、管理科学定量方法等。

三、学习要点与课时安排

教学内容	学习要点	课时安排	
		本科生	MBA
第 1 章 随机变量与概率分布	(1) 掌握随机事件及概率的定义 (2) 掌握条件概率、独立概率等随机事件的运算 (3) 理解随机变量的定义，掌握基本的离散概率分布和连续概率分布	6	6
第 2 章 数据描述及归纳	(1) 理解总体与样本的概念及区别 (2) 掌握参数形式和图表形式的数据描述方法 (3) 理解数据统计描述在德尔菲法中的应用	6	6
第 3 章 统计推断	(1) 掌握常见的抽样方法和抽样分布 (2) 掌握基本的参数估计方法 (3) 理解检验的原理概念以及正态总体和卡方独立性的假设检验	9	3
第 4 章 预测	(1) 掌握回归分析法 (2) 掌握时间序列分析方法	6	3

(续)

教学内容	学习要点	课时安排	
		本科生	MBA
第 5 章 线性规划	(1) 掌握线性规划的基本概念和图解法 (2) 掌握线性规划的灵敏度分析方法 (3) 掌握线性规划的电子数据表求解方法 (4) 理解数据包络分析方法的基本概念	12	6
第 6 章 整数规划	(1) 掌握整数规划的基本概念和图解法 (2) 掌握 0-1 整数规划的建模思想和代表性应用	3	3
第 7 章 动态规划	(1) 掌握多阶段决策过程的描述 (2) 掌握动态规划的求解方法 (3) 了解动态规划在收益管理中的应用	3	0
第 8 章 非线性规划	(1) 理解非线性规划的基本概念及其求解难点 (2) 掌握约束优化型非线性规划及其求解	3	0
第 9 章 网络模型	(1) 理解图和网络模型的基本概念 (2) 理解最短路径问题、最大流量问题、最小生成树问题的基本概念并掌握解决方法	6	3
第 10 章 决策理论知识	(1) 了解决策科学的发展历史 (2) 掌握决策问题包含的主要要素,如决策者、分析者、决策目标、决策方案、自然状态、决策结果、决策准则、信息等 (3) 重点掌握决策问题中的风险与效用	3	3
第 11 章 不确定性决策	掌握不确定决策中的乐观准则、悲观准则、后悔值准则、折中准则和等可能性准则	3	3
第 12 章 风险型决策	(1) 掌握风险决策中的期望值准则、最大可能准则 (2) 理解贝叶斯决策和决策树方法的原理	3	3
第 13 章 多属性决策	(1) 掌握多属性决策的基本方法 (2) 理解层次分析法、数据包络分析、加总比例分析	6	3
第 14 章 群决策	(1) 掌握群决策的概念及其与个体决策的差异 (2) 掌握常用的社会选择函数 (3) 理解投票制度和阿罗不可能定理	6	3
第 15 章 行为决策:前景理论	(1) 理解决策的有限理性及其常见的表现形式 (2) 掌握前景理论及其与其他理论的区别 (3) 掌握前景理论在解释有限理性决策行为中的应用	6	3
合计		81	48

说明:

- 1. 课时可由教师根据专业需要灵活分配使用。
- 2. 建议本科生课程采用三个单元、每个单元约 27 个课时的形式进行。
- 3. MBA 课程讲授中,部分章节可略去,不影响其他章节的正常讲授。

目 录

出版说明

前 言

教学建议

第一部分 数据分析基础

第1章 随机变量与概率分布	2
1.1 随机事件及概率	2
1.2 随机变量及分布	7
本章小结	19
关键术语	19
参考文献	20
第2章 数据描述及归纳	21
2.1 数据展示	21
2.2 数据描述	31
2.3 德尔菲法	38
本章小结	47
关键术语	48
参考文献	48
第3章 统计推断	49
3.1 抽样及抽样分布	49
3.2 参数估计	60
3.3 假设检验	79
本章小结	102
关键术语	102
参考文献	103
第4章 预测	104
4.1 回归分析法	104

4.2 趋势外推法	131
本章小结	171
关键术语	171
参考文献	171

第二部分 优化模型

第5章 线性规划	174
5.1 线性规划的概念	175
5.2 线性规划的求解	180
5.3 线性规划的应用：数据包络分析	193
本章小结	199
关键术语	199
参考文献	200
第6章 整数规划	201
6.1 整数规划基础	201
6.2 指派问题	212
本章小结	221
关键术语	221
参考文献	222
第7章 动态规划	223
7.1 动态规划基础	223
7.2 收益管理	237
本章小结	239
关键术语	239
参考文献	239

第8章 非线性规划 240

8.1 非线性规划的基本理论..... 240

8.2 约束优化..... 243

8.3 有多个约束条件的非线性
规划问题..... 247

本章小结 252

关键术语 253

参考文献 253

第9章 网络模型 254

9.1 网络构成..... 254

9.2 最短路径问题..... 255

9.3 最大流量问题..... 263

9.4 最小生成树问题..... 268

本章小结 270

关键术语 270

参考文献 271

第三部分 决策理论与方法

第10章 决策理论知识..... 274

10.1 决策的发展历程 274

10.2 决策的基本要素 278

10.3 效用与效用函数 282

10.4 风险与效用 285

本章小结 288

关键术语 288

参考文献 289

第11章 不确定性决策..... 290

11.1 乐观准则 291

11.2 悲观准则 292

11.3 后悔值准则 294

11.4 折中准则 296

11.5 等可能性准则 297

本章小结 298

关键术语 298

参考文献 299

第12章 风险型决策..... 300

12.1 期望值准则 300

12.2 最大可能准则 308

12.3 贝叶斯决策规则 310

12.4 决策树 317

12.5 使用决策树进行灵敏度
分析 323

本章小结 325

关键术语 326

参考文献 326

第13章 多属性决策..... 328

13.1 多属性决策的概念 328

13.2 多属性决策的基本方法 ... 337

13.3 层次分析法 346

13.4 数据包络分析 353

13.5 加总比例分析 361

本章小结 363

关键术语 364

参考文献 364

第14章 群决策 366

14.1 群决策的概念 366

14.2 社会选择函数 369

14.3 投票制度 378

14.4 群决策方法 384

本章小结 391

关键术语 392

参考文献 392

第15章 行为决策：前景理论 ... 395

15.1 有限理性行为及其特征 ... 395

15.2 前景理论的基本概念 405

本章小结 409

关键术语 409

参考文献 410

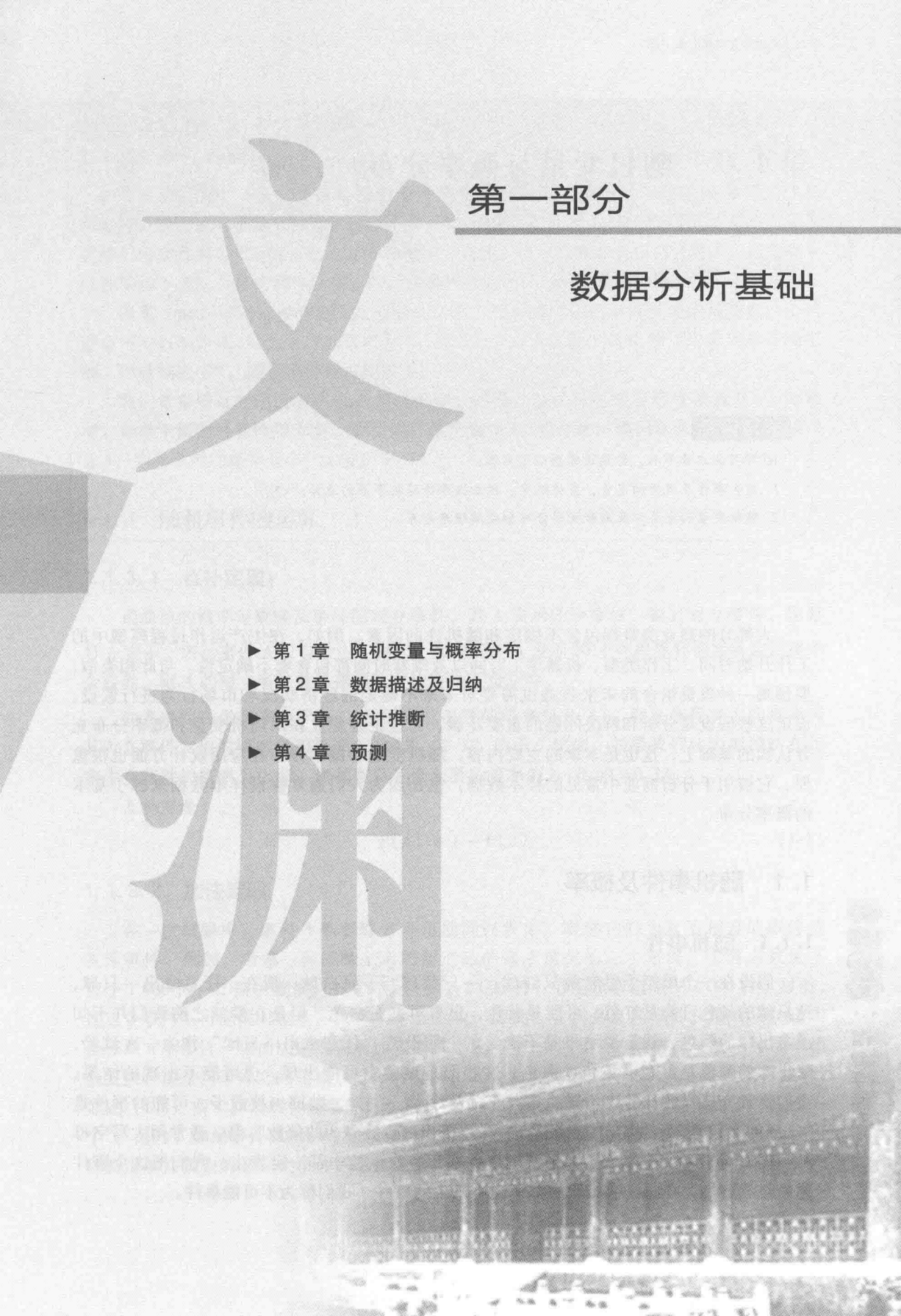
文

第一部分

数据分析基础

- ▶ 第1章 随机变量与概率分布
- ▶ 第2章 数据描述及归纳
- ▶ 第3章 统计推断
- ▶ 第4章 预测

渊



第1章 随机变量与概率分布

学习目标

☑ 学习完本章节后，你应该掌握以下内容：

1. 随机事件及概率的定义，条件概率、独立概率等随机事件的运算；
2. 随机变量的定义以及离散概率分布和连续概率分布。

大部分的商业决策都包含不确定和随机性的因素。例如，在生产运作过程模型中的工作开始时间、工作类型、机器停工时间以及维修时间都包含着不确定性。与此相类似，要预测一种投资组合的未来收益也需要对未来不确定的经济状况和市场行为进行假设。设定这些假设是分析和解决问题的重要步骤，而这正是建立在对随机变量和概率分布充分认知的基础上，这也是本章的主要内容。随机变量和概率分布在应用统计方面也很重要，它被用于分析商业中常见的样本数据，也是因为人们通常假设样本数据来源于基本的概率分布。

1.1 随机事件及概率

1.1.1 随机事件

假设在一个黑箱子里有两只红球、一只黄球、一只白球。现在，任意拿出一只球，这只球的颜色可能是红色，可能是黄色，也有可能是白色。但是在摸球之前我们并不知道拿出球的颜色，就是说结果是不确定的。假设将“任意拿出一只球”作为一次试验，拿出球的颜色是红色、黄色、白色，这些都是试验中可能出现，也可能不出现的结果。我们称具有这样特征的事为随机事件，简称事件。例如，抛掷一枚骰子，可能的事件是“掷出的点数是2”“掷出的点数是奇数”“掷出的点数是3的倍数”等。通常用大写字母A、B、C等表示一个事件。如果某个事件在每一次试验中都一定发生，我们把这个事件称为必然事件，在每一次试验中都一定不发生的事件，我们称为不可能事件。

1.1.2 事件的概率

在日常生活中,我们经常会接触事件的概率。当天气预报员表述下雨的可能性是70%时,她所说的正是一种概率的表述。又如2014年巴西世界杯,我们预测说德国赢阿根廷的可能性为2比1时,这也是一种概率的表述。概率的概念是相当直观的,但是概率的性质却不是这么直观和容易掌握的。在本节我们先提出一些重要的性质。

概率(probability)是0到1之间的一个值,表示某个随机事件发生的可能性。不可能事件的概率为0,必然事件的概率为1。概率为0到1之间的随机事件的发生是不确定的,但越接近于1,随机事件越可能发生。

我们常常用百分比或者机会来表述概率。但是,这些可以很容易变换成0~1的概率。如果下雨的可能性是70%,则下雨的概率为0.7。类似地,德国队队获胜的机会是2比1,则其获胜的概率是2/3(或0.6667)。

1.1.3 随机事件的运算

1.1.3.1 互补定理

最简单的概率定理涉及事件的对立事件。若A表示任一事件,则其对立事件,用符号 $\bar{A}$ 表示,表示事件A没有发生。例如,如果事件A表示2014年世界杯德国队在比赛中会获胜,则A的对立事件就是德国队在比赛中不会获胜。

如果事件A的概率为 $P(A)$,则其对立事件的概率为 $P(\bar{A})$,即某事件发生的概率与其对立事件发生的概率之和等于1,如式(1-1)所示。比如,如果我们认为德国队在比赛中会获胜的概率为0.67,则德国队不会获胜的概率为 $1 - 0.67 = 0.33$ 。

互补定理

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (1-1)$$

1.1.3.2 加法定理

在一次试验中,事件A和事件B不可能同时发生,则称它们为互不相容的事件或互斥事件。例如,考虑一种即将上市的新产品的需求情况的三个事件:①需求数量不大于1000件;②需求数量大于1000但少于2000件;③需求数量至少2000件。显然,这三个事件不可能同时发生,只有一个会发生。因此,它们是互斥事件。用 A_1 到 A_n 表示任意n个事件,则加法定理表示这些事件中至少有一个发生的概率。一般这种概率相当复杂,但是当事件之间是相互排斥的时候,就会大大简化,其概率就是各自概率之和,如式(1-2)所示。当然,当事件之间相互排斥的时候,“至少一个”就相当于“仅有一个”。另外,如果事件 A_1 到 A_n 是全面的,那么概率之和应该为1。这种情况下,我们可以断定事件集中的某一个事件一定会发生。

互斥事件的加法定理

$$P(A_1 \text{ 到 } A_n \text{ 中至少有一个发生}) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \quad (1-2)$$

特别地, 互斥事件 A_1 到 A_n 概率值可用其在所有结果中所占的比例表示。例如, 在即将上市的新产品需求的例子中, 定义 A_1 为“需求数量低于 1 000 件”, A_2 为“需求数量高于 1 000 件但低于 2 000 件”, A_3 为“需求数量至少 2 000 件”。如前所述, 这三个事件是相互排斥且是穷举的。所以, 它们的概率之和肯定等于 1。假设 $P(A_1) = 0.2$, $P(A_2) = 0.3$, $P(A_3) = 0.5$ (注意概率之和为 1)。那么, 加法性质使我们能够计算出其他事件的概率。例如, 事件“需求数量至少 1 000 件”即事件 A_2 或者 A_3 发生。由加法性质可知, 其概率为:

$$P(\text{需求数量至少为 1 000 件}) = P(A_2) + P(A_3) = 0.8$$

$$P(\text{需求数量低于 2 000 件}) = P(A_1) + P(A_2) = 0.5$$

$$P(\text{需求数量低于 1 000 件或高于 2 000 件}) = P(A_1) + P(A_3) = 0.7$$

1.1.3.3 条件概率与乘法定理

概率通常对应于当前已知的信息。当新的信息变成已知的, 概率通常就会发生变化。例如, 如果当你了解到德国有一个队员受了伤, 那么你肯定认为德国队赢得冠军的概率发生了变化。基于新的信息来修正概率的方法就需要使用条件概率。

假设事件 A 、事件 B 概率分别为 $P(A)$ 、 $P(B)$ 。一般地, $P(A)$ 的值不需要了解 B 是否发生。但是, 如果我们获知事件 B 已经发生, 则事件 A 的概率就会发生变化。事件 A 新的概率称为已知 B 发生时 A 的条件概率, 用 $P(A|B)$ 表示。注意符号中竖线左边表示不确定的事件, 我们不知它是否会发生。但是, 竖线右边的事件是确定的, 我们知道它已经发生了。

条件概率

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (1-3)$$

条件概率公式可以帮助我们计算 $P(A|B)$ 的值, 如式 (1-3) 所示, 式中的分子表示事件 A 、 B 同时发生的概率, 当然这个概率是已知的。但是, 有些情况下 $P(A|B)$ 和 $P(B)$ 是已知的, 那么我们可以在条件概率公式两边乘上 $P(B)$ 得到式 (1-4), 即乘法定理。

乘法定理

$$P(AB) = P(A|B)P(B) \quad (1-4)$$

条件概率公式和乘法定理都是有用的, 实际上两者之间是等价的。使用哪一个取决于我们已知的概率和我们想要计算的概率, 如例 1-1 所示。

例 1-1 E 公司的概率计算

E 公司为一家海外日用品代购网站。该公司预定将于 9 月初上架一批新的化妆品。但是, 新商品能否按原计划推出存在风险, 因为 E 公司能否在 8 月初与其海外供应商签订