普通高等教育“十二五”规划教材

工 科 数 学 精 品 丛 书

概率论与数理统计

（第二版）

李寿贵　余胜春　主编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十二五”规划教材
工科数学精品丛书

概率论与数理统计

（第二版）

李寿贵　余胜春　主编

科学出版社
北京

版权所有，侵权必究

举报电话：010-64030229；010-64034315；13501151303

内 容 简 介

本书参照全国高等学校公共数学教学指导委员会《概率论与数理统计课程教学基本要求(修订稿)》，在保持本课程传统教材优点的基础上，对教材内容、体系进行了适当的调整和优化.

全书共分为三部分，第一部分包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理；第二部分包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析；第三部分为应用部分，包括Excel软件及SAS软件在概率统计中的使用方法. 例题和习题既具典型性，又具应用性. 各章末均附有该章重要概念的英文词汇和相关数学家的生平或轶事，书末附有各章习题的参考答案和各种统计数表，以供读者参考.

本书可作为高等学校理工类(非数学类专业)、经管类概率论与数理统计课程的教材，也可供教师、学生及工程技术人员参考，还可用作自学用书和考研参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/李寿贵，余胜春主编. —2版. —北京：科学出版社，2016.6

(工科数学精品丛书)

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-049233-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①李… ②余… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材 ②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第147283号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：787×1092 1/16

2016年6月第 二 版 印张：16 1/2

2016年6月第一次印刷 字数：390 000

定价：36.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

普通高等教育“十二五”规划教材
工科数学精品丛书

《概率论与数理统计》(第二版)
编 委 会

主　编　李寿贵　余胜春

副主编　赵喜林　刘云冰　李春丽　张　强

编　委　(按姓氏笔画为序)

丁咏梅　邢远秀　曲峰林　刘云冰　李　文
李寿贵　李春丽　李琳娜　何晓霞　余长春
余胜春　张　青　张　强　张　婷　张艳红
陈贵词　赵喜林　咸艳霞　徐树立　鄂学壮
蒋　君　熊　丹

前　言

概率论与数理统计是高等学校理工类和经管类各专业学生必修的一门重要的学科基础课程. 编者本着教育要面向世界、面向未来、面向现代化的宗旨，参照全国高等学校公共数学教学指导委员会《概率论与数理统计课程教学基本要求(修订稿)》，从培养学生的创新意识，加强学生的数学素养，提高学生的科学计算及运用数学的能力等现代教育理念出发，针对学生客观情况，编写了本书.

本书第二版在保持第一版教材优点的基础上，经过这几年的教学实践与完善，并参考了众多国内外优秀教材和资料，对原教材的内容、体系进行了适当的调整：主要对第1章进行了适当的精炼处理；对第2章进行了结构调整，将一维随机变量和多维随机变量拆分为第2章和第3章；其他章节也进行了适当的微调. 本书力求结构严谨、层次清晰、题型丰富、内容精炼.

全书共分为三部分，第一部分包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理，讲授概率论基础知识，重要概念都是通过实际问题的直观要求引入的；第二部分包括样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析，着重介绍数理统计中常用的方法及其应用，突出对数据进行合理分析和处理的思想和方法；第三部分为应用部分，包括Excel及SAS的使用方法，尽量做到联系工程实践，并注重概率统计知识在实际生活和经济领域中的运用，将概念写得清晰易懂，既便于教师教学，也便于学生自学.

在例题和习题的取舍上，本书力争做到深入浅出，既具典型性，又具应用性. 还配置有应用软件Excel及SAS在概率统计中的使用方法，供读者在提高软件应用能力时选用. 在各章末均附有该章重要概念的英文词汇和相关概率统计学家的生平或轶事，书末附有各章习题的参考答案和各种统计数表，以供读者参考.

本书由李寿贵、余胜春主编，赵喜林、刘云冰、李春丽、张强任副主编，李寿贵教授提出编写思路. 其中，刘云冰编写了第1章；赵喜林、李春丽编写了第2章、第3章、第5章；李寿贵、余胜春编写了第4章、第6章、第7章及参读材料；张强编写了第8～10章；重要概念的英文词汇，相关数学家的生平或轶事，各章习题、参考答案以及各种统计附表由编委会全体成员共同整理、解答和编写. 参加编写辅助工作的有熊丹、陈贵词、咸艳霞、丁咏梅、徐树立、张青、蒋君、曲峰林、张艳红、邢远秀、余长春、李琳娜、何晓霞、鄂学壮、张婷、李文等. 赵喜林、李春丽、刘云冰在第二版的修订中做了大量的工作，全书的统稿、定稿工作由李寿贵、余胜春、李春丽完成.

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，希望专家、同仁及广大读者批评指正，以便今后不断完善.

编　者

2016年5月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第 1 章　随机事件和概率

在自然界中，有一类现象在一定条件下必然发生，称为确定性现象. 例如，在标准大气压下，纯水加热到 100 ℃沸腾，平面三角形的任意两边之和大于第三边，同性电荷互相排斥等. 自然界中还存在着另外一类现象，其在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现其他结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果，但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，其结果却呈现出固有规律性(称为**统计规律性**). 例如，抛一枚均匀硬币，可能出现正面，也可能出现反面，但若抛较多的次数，我们会发现出现正面和反面的次数都接近一半. 我们把这种在个别试验中结果呈现出不确定性，但在大量重复试验中其结果又具统计规律性的现象，称为**随机现象**. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1　随 机 事 件

1.1　随机试验与样本空间

我们将对随机现象的观测、记录、实验称为**随机试验**，简称试验，记为 E.

随机试验具有下述三个特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行.

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果.

(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**. 显然，每次试验一定出现一个且只能出现一个样本点. 表 1-1 给出了几个随机试验及其样本空间.

表 1-1　随机试验及样本空间

	随机试验	样本空间
E_1	掷一枚硬币，观察出现正反面的情况(以 H 记正面，T 记反面)	$S_1=\{H,T\}$
E_2	一枚硬币接连掷两次，观察出现正反面的情况	$S_2=\{HH,HT,TH,TT\}$
E_3	掷一枚骰子，观察出现的点数	$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$
E_4	掷三枚骰子，观察出现的点数	$S_4=\{(i,j,k)\mid i,j,k=1,2,3,4,5,6\}$
E_5	抽验的 n 件产品中不合格品件数	$S_5=\{0,1,\cdots,n\}$
E_6	接连射击首次命中所需射击次数	$S_6=\{1,2,\cdots\}$
E_7	记录 110 电话台一昼夜收到的呼叫次数	$S_7=\{0,1,\cdots\}$
E_8	观察某设备无故障工作时间	$S_8=\{t\mid t\geqslant 0\}$

注意,样本空间由试验目的决定.例如,接连进行两次射击,若只观察命中的次数,则样本空间为 $S=\{0,1,2\}$;若要求观察两次射击命中的情况(以 0 表示未命中,以 1 表示命中),则样本空间为

$$S=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

1.2 随机事件及其运算关系

1. 随机事件

实际运作中,在进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合.例如,若规定某种设备无故障工作时间(小时)小于 1000 为次品,则在表 1-1 中,对随机试验 E_8,我们关心设备无故障工作时间是否有 $t\geqslant 1000$.满足这一条件的样本点组成 S_8 的一个子集:$A=\{t\,|\,t\geqslant 1000\}$,称 A 为试验 E_8 的一个随机事件.显然,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,有 $t\geqslant 1000$.

一般的,称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**,简称**事件**.在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一**事件发生**.

样本点组成的单点集称为**基本事件**;每次试验中都一定出现的事件,称为**必然事件**,显然必然事件就是样本空间 S;任何一次试验中都不会出现的事件,称为**不可能事件**,记为 $\varnothing$.本书中,用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示事件.有时也用"·"或者{·}表示事件,大括号或引号内用式子或文字表示事件的内容.例如,对表 1-1 中的随机试验 E_3,"出现偶数点"是事件,也可写为 $A=\{2,4,6\}$;"出现的点数小于 7"是必然事件,"出现点数 7"是不可能事件.

既然事件本质上是集合,就可以将集合之间的关系和运算引进到事件中来.

2. 事件的关系

事件的基本关系:包含关系、相等关系、互不相容关系.

(1) 包含关系.若属于事件 A 的样本点必属于事件 B,则称 B 包含 A,或 A 被包含在 B 中,记为 $A\subset B$.也可理解为:事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) 相等关系.如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

(3) 互不相容.如果 A 与 B 没有相同的样本点,则称 A 与 B 互不相容或互斥.也可理解为:事件 A 与事件 B 不可能同时发生.基本事件是两两互不相容的.

3. 事件的运算

事件的基本运算:和、积、差、逆(或对立).

1) 和事件

事件 A 与 B 中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件称为 A 与 B 的和事件,记为 $A\cup B$.当且仅当事件 A 与 B 中至少有一个发生时,$A\cup B$ 发生.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

事件的和运算可推广到有限个或可列个事件，称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件.

2）积事件

事件 A 与 B 中公共的样本点组成的新事件称为 A 与 B 的积事件，记为 $A \cap B$ 或 AB. 当且仅当事件 A 与 B 同时发生时，AB 发生.

事件的积运算可推广到有限个或可列个事件，称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为有限个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件.

显然，A 与 B 互不相容等价于 $AB = \varnothing$.

3）差事件

在事件 A 中而不在事件 B 中的样本点组成的新事件称为 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$. 当且仅当事件 A 发生而 B 不发生时，$A-B$ 发生.

4）逆（对立）事件

在样本空间 S 中而不在事件 A 中的样本点组成的新事件称为 A 的逆（对立）事件，记为 $\bar{A}$. A 与 $\bar{A}$ 必有且只有一个发生. 显然

$$A \cup \bar{A} = S, \quad A\bar{A} = \varnothing, \quad \bar{\bar{A}} = A$$

注　对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件不一定是对立事件；根据差事件的定义，

$$A - B = A\bar{B}$$

5）划分

设 S 为样本空间. 如果事件 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 满足：

（1）两两不相容，即 $H_iH_j = \varnothing\ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, \cdots, n)$；

（2）$H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = S$，

则称 $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ 是样本空间 S 的一个划分（也称其为 S 的一个完全事件组）. 划分的概念可以推广到可列个事件情形.

例如，一批产品分为 3 个等级，以 H_i 表示“随意抽取一件恰好抽到 i 等品”$(i = 1, 2, 3)$，则事件 H_1, H_2, H_3 构成一个完全事件组.

对于任意事件 $A, B, C, A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，有如下运算律：

（1）交换律

$$A \cup B = B \cup A, \quad AB = BA$$

(2) 结合律

$$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad ABC = (AB)C = A(BC)$$

(3) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (AB) \cup (AC), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

分配律可以推广到有限或可列无限个事件情形,即

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (AA_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (A \cup A_i)$$

$$A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (AA_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} (A \cup A_i)$$

(4) 对偶律(德摩根律)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

对偶律可以推广到有限或可列无限个事件情形,即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$$

事件运算的性质都不难证明,并且借助于文氏图(图 1-1,图中矩形表示必然事件 S)也容易理解. 在进行事件的运算时要善于运用这些性质.

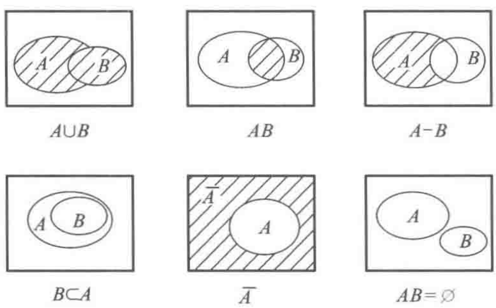

图 1-1

例 1 设样本空间为 S. E_1, E_2, E_3 为三个事件,设 $A_i =$"E_1, E_2, E_3 中至少发生 i 个",$B_i =$"E_1, E_2, E_3 中恰好发生 i 个",$C_i =$"E_1, E_2, E_3 中至多发生 i 个" $(0 \leqslant i \leqslant 3)$. 试用 E_1, E_2, E_3 表示 A_i, B_i, C_i $(0 \leqslant i \leqslant 3)$.

解 由题意

$$A_0 = S, \quad A_1 = E_1 \cup E_2 \cup E_3, \quad A_2 = E_1E_2 \cup E_1E_3 \cup E_2E_3, \quad A_3 = E_1E_2E_3$$

$$B_0 = \bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3, \quad B_1 = E_1\bar{E}_2\bar{E}_3 \cup \bar{E}_1E_2\bar{E}_3 \cup \bar{E}_1\bar{E}_2E_3$$

$$B_2 = E_1E_2\bar{E}_3 \cup E_1\bar{E}_2E_3 \cup \bar{E}_1E_2E_3, \quad B_3 = E_1E_2E_3$$

"E_1, E_2, E_3 中至多发生 i 个"可理解为"E_1, E_2, E_3 中至少有 $3-i$ 个不发生" $(0 \leqslant i \leqslant 3)$, 因此

$$C_0 = \bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3, \quad C_1 = \bar{E}_2\bar{E}_3 \cup \bar{E}_1\bar{E}_3 \cup \bar{E}_1\bar{E}_2, \quad C_2 = \bar{E}_3 \cup \bar{E}_2 \cup \bar{E}_1, \quad C_3 = S$$

2　概率及其常见模型

在几何学中，线段的长短、平面图形或立体的大小等可以用数值来度量；在物理学中，物质的多少、质点运动的快慢等也可以用数值来度量. 事件发生的可能性大小，也应该可以用数值度量，这种度量就是"概率"，一般用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率. 为了找到一个合适的度量来表示概率，我们首先引入频率的概念.

2.1　频率与概率

1. 频率

定义 1　在相同的条件下，进行了 n 次重复试验，事件 A 在这 n 次试验中出现的次数 n_A，称为 A 在这 n 次试验中出现的**频数**；而

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称为 A 在这 n 次试验中出现的频率.

由上述定义，易见频率具有下列基本性质：

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$

(2) $f_n(S) = 1$

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

假如把"n 次重复试验"称为"一个系列试验"，则事件 A 在 n 次试验中的频率 $f_n(A)$ 不但与事件 A、试验条件和次数 n 有关，而且与试验的"系列"有关：即便试验条件和次数 n 保持不变，对于不同系列的试验，事件 A 的频率也会有所不同和波动. 产生这种现象的原因是试验的随机性. 容易理解频率的取值具有不确定性.

频率不但具有不确定性，而且具有稳定性. 频率的稳定性表现是：当试验次数 n 充分大时，事件在任何系列的 n 次试验中波动很小，并且随着试验次数 n 的增大这种波动有变小趋势，逐步稳定在某固定的数值(称为**频率的稳定值**)附近. 这是被大量实践活动证明了的事实. 我们称频率的这种性质为**频率的稳定性**. 此外，实践证明，这个"频率的稳定值"既与试验的系列无关，也与具体的试验次数 n 无关(只要 n 充分大)，其反映了试验条件和事件本身所固有的性质. 下例说明了频率的稳定性.

例 1　频率的稳定性的例子.

(1) 男女性别比重.

表 1-2 所示是国家统计局公布的我国大陆 1950 ～ 2000 年间每年年底人口的统计资料(国家统计局公布的每年年底的人口数是根据抽样调查结果推算的). 表中数据表明，我国历年男性人口比重稳定在 51.5% 附近，女性人口比重稳定在 48.5% 附近. 我国大陆 2000 年全国人口普查的结果：总人口 126 583 万，男 65 355 万，女 61 228 万，男和女的比重相应为 51.63% 和 48.37%. 上述统计资料表明我国男性人口和女性人口的比重是稳定的.

表 1-2 （单位：万人）

年份		1950	1960	1970	1980	1990	2000
总数	全部	55 196	66 207	82 992	98 705	114 333	126 583
	男	28 669	34 283	42 686	50 785	58 904	65 355
	女	26 527	31 924	40 306	47 920	55 429	61 288
比重	男	0.519 4	0.517 8	0.514 3	0.514 5	0.515 2	0.516 3
	女	0.480 6	0.482 2	0.485 7	0.485 5	0.484 8	0.483 7

世界其他国家或地区的人口及新生婴儿的性别也有完全相似情况.例如,瑞典 1871 年～1900 年 30 年间共记录了 2 644 757 个新生婴儿,其中男婴 1 359 671 个,女婴 1 285 086 个,比重各为 51.41% 和 48.59%；瑞典 1935 年共出生婴儿 88 273 个,其中男婴 45 682 个,女婴 42 591 个,比重相应为 51.75% 和 48.25%.与我国的统计资料十分相近.

(2) 掷硬币试验.

为验证频率的稳定性,许多统计学家作过掷硬币试验,表 1-3 列出了几个掷硬币的结果.

表 1-3

试验者	投掷次数	正面出现的次数	正面出现的频率
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	40 941	0.507 7

由表 1-3 的结果可见,多次重复掷硬币,正面出现的频率都十分接近 0.5.

事件在试验中出现的频率的稳定性反映了事件的固有特性,说明事件在试验中出现的可能性可以用数值来度量,换句话说,当试验次数 n 充分大时,用事件发生的频率的稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的.用频率估计事件发生可能性的大小,和用“尺子”度量长度(面积或体积)、用“天平”度量物质的质量是一样的.形象地说,频率就是测定事件在试验中出现的概率的“尺子”,测定的“精度”是靠增大试验次数来保障的.

2. 概率

在实际问题中,我们不可能对每一事件都做大量的试验,从中得到频率的稳定值.同时,为了理论研究的需要,我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发,给出了概率的公理化定义.

历史上,虽然人们很早就进行了概率的计算,然而在很长时间内概率论还不是一门成熟的数学学科,包括概率的概念在内的一些基本概念还没有明确的数学定义.直到 19 世纪末人们才开始注意“概率的公理”,即实践证实而无须逻辑证明的概率的最基本性质,而概率的其他性质可以以概率的公理为基础来证明.现在普遍采用的概率公理化体系,是俄罗斯数学家科尔莫戈罗夫(A. N. Kolmogorov)1933 年在专著《概率论的基本概念》中提出的.有了这

个公理化定义，概率论得到了迅速发展.

定义 2（概率的公理化定义）　设 E 是一个随机试验，S 为其样本空间. 对 E 的任一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下三条公理：

(1) 非负性　对于任一事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性　$P(S) = 1$；

(3) 可列可加性　若 $A_1, A_2, \cdots$ 为两两互不相容事件，即 $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots)$，则

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

在第 5 章中将证明，当 n 趋于无穷大时，频率 $f_n(A)$ 在一定意义下收敛于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们就有理由以概率 $P(A)$ 来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

下面由这三条公理，推导出概率的一些重要性质.

性质 1　$P(\varnothing) = 0$.

证　令 $A_n = \varnothing$ $(n = 1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$，且 $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots)$，由概率的可列可加性，可得

$$P(\varnothing) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

由非负性公理，$P(\varnothing) \geqslant 0$，因此 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2（有限可加性）　若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

证　令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，则有 $A_iA_j = \varnothing$ $(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots)$，由性质 1，得

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \\ &= P\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P(\varnothing) + \cdots = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \end{aligned}$$

性质 3　对任一事件 A，有

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

证　因为 $A\bar{A} = \varnothing$，$A \cup \bar{A} = S$，由概率的规范性和有限可加性

$$P(A) + P(\bar{A}) = P(S) = 1$$

则有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

性质 4（减法公式）　对于任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A - B) = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB)$$

证　显然 $A = (A - B) + AB$，且 $(A - B) \cap (AB) = \varnothing$，由概率的有限可加性

$$P(A) = P(A - B) + P(AB)$$

即 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

特别地，若 $B \subset A$，则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$. 进一步，当 $B \subset A$ 时，$P(B) \leqslant P(A)$.

性质 5 对于任一事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$.

证 因为对于任一事件 A,均有 $A\subset S$,因此,

$$P(A)\leqslant P(S)=1$$

性质 6(加法公式) 对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

证 对于任意两个事件 A 和 B,显然有

$$A\cup B=A\cup(B-AB)$$

并且 $A(B-AB)=\varnothing$,由有限可加性和减法公式

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

加法公式可以推广到任意 n $(n\geqslant 3)$ 个事件情形

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

以上公式用数学归纳法容易证明.

性质 7(半可加性) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是任意 n $(n\geqslant 2)$ 个事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

证 当 $n=2$ 时,由加法公式和概率的非负性,可得

$$P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1A_2)\leqslant P(A_1)+P(A_2)$$

当 $n\geqslant 3$ 时,用数学归纳法容易证明

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

注 半可加性对可列个事件也成立.

2.2 古典概型(等可能概型)

在我们的生活中广泛存在着具有下述两个特点的随机试验:

(1) 试验的样本空间的元素只有有限个.

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有这两个特点的随机试验称为**等可能概型**.等可能概型是历史上最早计算概率的对象,因此也称为**古典概型**.

考虑一个古典概型,设其样本空间 $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_N\}$,即其样本空间有 N 个样本点.既然每个基本事件发生的可能性相同,由规范性,可得

$$P(\{e_1\})=P(\{e_2\})=\cdots=P(\{e_N\})=\frac{1}{N}$$

若事件 A 包含 M 个样本点,即 $A=\{e_{j_1},e_{j_2},\cdots,e_{j_M}\}$,则

$$P(A)=P(\{e_{j_1}\}\cup\{e_{j_2}\}\cup\cdots\cup\{e_{j_M}\})=P\{e_{j_1}\}+P\{e_{j_2}\}+\cdots+P\{e_{j_M}\}=\frac{M}{N}$$

因此古典概率的计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{事件 }A\text{ 所含样本点的个数}}{\text{样本空间 }S\text{ 所含样本点的个数}}=\frac{M}{N}$$

容易验证,如上定义的集合函数 $P(\cdot)$ 满足概率的三条公理.

计算古典概率时,要计算样本空间所含样本点的总数 N 和事件所包含的样本点数 M.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com