高职高专高等数学基础特色教材系列

高等数学基础（下）

线性代数与概率论

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

高职高专高等数学基础特色教材系列

高等数学基础（下）

线性代数与概率论

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与概率论(经济类与管理类)/周誓达编著.
北京:中国人民大学出版社,2005
高职高专高等数学基础特色教材系列.高等数学基础(下).
ISBN 7-300-06637-2

Ⅰ.线…
Ⅱ.周…
Ⅲ.①线性代数-高等学校:技术学校-教学参考资料②概率论-高等学校:技术学校-教学参考资料
Ⅳ.①O151.2②O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 068827 号

高职高专高等数学基础特色教材系列
高等数学基础(下)
线性代数与概率论
(经济类与管理类)
周誓达　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511239(出版部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东君印刷有限公司		
开　　本	787×965 毫米 1/16	**版　　次**	2005 年 7 月第 1 版
印　　张	17.75	**印　　次**	2005 年 8 月第 2 次印刷
字　　数	323 000	**定　　价**	20.00 元

目　录

线性代数部分

概率论部分

线性代数部分

第一章 行列式

§ 1.1 行列式的概念

考虑由两个线性方程式构成的二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

其中 x_1, x_2 为未知量，$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 为未知量的系数，b_1, b_2 为常数项. 用消元法解此线性方程组：第一个方程式乘以 a_{22}，第二个方程式乘以 a_{12}，然后相减；第二个方程式乘以 a_{11}，第一个方程式乘以 a_{21}，然后相减. 得到

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，此线性方程组仅有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

为了进一步揭示求解公式的规律,需要引进二阶行列式的概念.

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式,其中 a_{11},a_{12},a_{21},a_{22} 称为元素,这 4 个元素排成一个方阵,横排称为行,竖排称为列,二阶行列式共有两行两列. 每个元素有两个脚标,第一脚标指明这个元素所在行的行数,称为行标;第二脚标指明这个元素所在列的列数,称为列标. 在二阶行列式中,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线.

二阶行列式的计算,可以用画线的方法记忆,即二阶行列式等于主对角线(实线)上两个元素的乘积减去次对角线(虚线)上两个元素的乘积,如图 1—1.

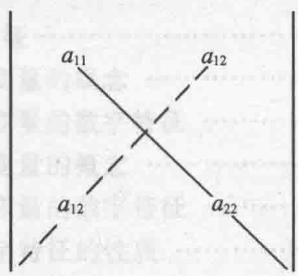

图 1—1

例 1 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = -2$$

例 2 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

例 3 填空题

若二阶行列式 $D = \begin{vmatrix} k^2 & 4 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0$,则元素 $k =$ ______.

解:计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} k^2 & 4 \\ 2 & k \end{vmatrix} = k^3 - 8$$

再从已知条件得到关系式 $k^3-8=0$,因此元素

$$k=2$$

于是应将"2"直接填在空内.

类似地,为了解由三个线性方程式构成的三元线性方程组,需要引进三阶行列式的概念.

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}$ $-a_{11}a_{23}a_{32}$,称为三阶行列式,三阶行列式共有 9 个元素,它们排成三行三列,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线.三阶行列式的计算,也可以用画线的方法记忆,如图 1—2.

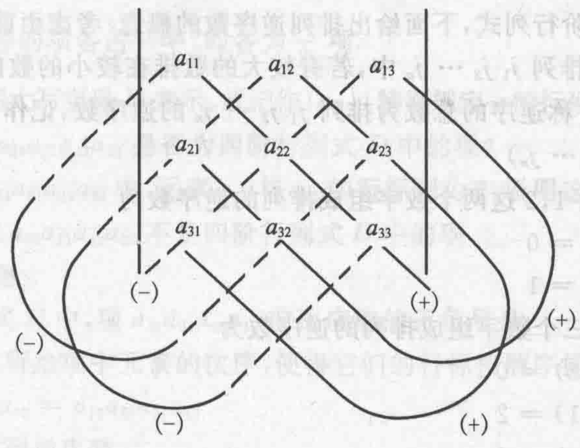

图 1—2

例 4 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$=1\times3\times5+(-1)\times(-3)\times(-4)+(-2)\times2\times4$$

$$-(-2)\times3\times(-4)-(-1)\times2\times5-1\times(-3)\times4$$

$$=15+(-12)+(-16)-24-(-10)-(-12)=-15$$

例 5 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = a_{11}a_{22}a_{33}$$

例 6 已知三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = 0$，求元素 a 的值.

解：计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 3 & 4 \\ -1 & a & 0 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 0 + (-4a) - 0 - (-3) - 0 = a^2 - 4a + 3$$

再从已知条件得到关系式 $a^2 - 4a + 3 = 0$，所以元素

$$a = 1 \text{ 或 } a = 3$$

为了讨论 n 阶行列式，下面给出排列逆序数的概念. 考虑由前 n 个自然数组成的数字不重复的排列 $j_1\, j_2 \cdots j_n$ 中，若有较大的数排在较小的数的前面，则称它们构成一个逆序，并称逆序的总数为排列 $j_1\, j_2 \cdots j_n$ 的逆序数，记作

$$N(j_1\, j_2 \cdots j_n)$$

容易知道，由 1，2 这两个数字组成排列的逆序数为

$$N(1\ 2) = 0$$
$$N(2\ 1) = 1$$

由 1，2，3 这三个数字组成排列的逆序数为

$$N(1\ 2\ 3) = 0$$
$$N(2\ 3\ 1) = 2$$
$$N(3\ 1\ 2) = 2$$
$$N(3\ 2\ 1) = 3$$
$$N(2\ 1\ 3) = 1$$
$$N(1\ 3\ 2) = 1$$

考察二阶行列式，它是 $2! = 2$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 2 个元素乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 1 项，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列，这时，若相应列标排列逆序数为零，则这项前面取正号；若相应列标排列逆序数为奇数，则这项前面取负号.

再考察三阶行列式，它是 $3! = 6$ 项的代数和，每项为来自不同行、不同列的 3 个元素乘积，前面取正号与取负号的项各占一半，即各为 3 项，可以适当交换每项中元素的次序，使得它们的行标按顺序排列. 这时，若相应列标排列逆序数为零或

偶数,则这项前面取正号;若相应列标排列逆序数为奇数,则这项前面取负号.

根据上面考察得到的规律,给出 n 阶行列式的概念.

定义 1.1 记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为 n 阶行列式,它是 $n!$ 项的代数和,每项为来自不同行、不同列的 n 个元素乘积,可以适当交换每项中元素的次序,使得它们的行标按顺序排列,这时若相应列标排列逆序数为零或偶数,则这项前面取正号;若相应列标排列逆序数为奇数,则这项前面取负号.

n 阶行列式共有 n^2 个元素,它们排成 n 行 n 列,从左上角到右下角的对角线称为主对角线,从右上角到左下角的对角线称为次对角线. 容易知道:同一行的元素不可能乘在一起,同一列的元素也不可能乘在一起. 可以证明:在 n 阶行列式中,前面取正号与取负号的项各占一半,即各为 $\frac{n!}{2}$ 项.

行列式经常用大写字母 D 表示,或记作 $|a_{ij}|$. 特别规定一阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

例 7 乘积 $a_{34}a_{21}a_{42}a_{23}$ 是否为四阶行列式 D 中的项?

解:在乘积 $a_{34}a_{21}a_{42}a_{23}$ 中,元素 a_{21} 与 a_{23} 的行标同为2,说明这两个元素皆来自第 2 行,所以乘积 $a_{34}a_{21}a_{42}a_{23}$ 不是四阶行列式 D 中的项.

例 8 填空题

在四阶行列式 D 中,项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取的正负号是______.

解:适当交换所给项中元素的次序,使得它们的行标按顺序排列,得到

$$a_{31}a_{24}a_{43}a_{12} = a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$$

这时,相应列标排列逆序数

$$N(2\ 4\ 1\ 3) = 3$$

是奇数,因而项 $a_{31}a_{24}a_{43}a_{12}$ 前面应取负号,于是应将"负号"直接填在空内.

例 9 确定元素列标 l,m 的值,使得乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 为五阶行列式 D 中前面取正号的项.

解:在乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 中,元素的行标 各不相同,说明它们来自不同行,元素的列标分别为 $1,2,m,l,3$,欲使它们也来自不同列,必须 $l = 4, m = 5$ 或 $l = 5$, $m = 4$,这时,乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 才是五阶行列式 D 中的项.

当 $l = 4, m = 5$ 时,得到

$$a_{31}a_{22}a_{55}a_{14}a_{43} = a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}a_{55}$$

相应列标排列逆序数

$$N(4\ 2\ 1\ 3\ 5) = 4$$

是偶数,因而项 $a_{31}a_{22}a_{55}a_{14}a_{43}$ 前面应取正号;

当 $l = 5, m = 4$ 时,得到

$$a_{31}a_{22}a_{54}a_{15}a_{43} = a_{15}a_{22}a_{31}a_{43}a_{54}$$

相应列标排列逆序数

$$N(5\ 2\ 1\ 3\ 4) = 5$$

是奇数,因而项 $a_{31}a_{22}a_{54}a_{15}a_{43}$ 前面应取负号.

所以当元素列标 $l = 4, m = 5$ 时,乘积 $a_{31}a_{22}a_{5m}a_{1l}a_{43}$ 为五阶行列式 D 中前面取正号的项.

定义 1.2 已知行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若将行列依次互换(第 1 行变成第 1 列,第 2 行变成第 2 列,…,第 n 行变成第 n 列)得到新的行列式,则称这个新的行列式为行列式 D 的转置行列式,记作

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 之间有什么关系?考察三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

容易看出:$D^{\mathrm{T}} = D$,可以证明这个结论对于 n 阶行列式也是成立的.

定理 1.1 转置行列式 D^{T} 的值等于行列式 D 的值，即

$$D^{\mathrm{T}} = D$$

定理 1.1 说明：在行列式中，行与列的地位是对等的. 即：凡有关行的性质，对于列必然成立；凡有关列的性质，对于行也必然成立.

最后讨论一类最基本也是最重要的行列式即三角形行列式.

定义 1.3 若行列式 D 主对角线以上或以下的元素全为零，则称行列式 D 为三角形行列式.

考虑三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

它当然等于 $n!$ 项代数和，其中含有零因子的项一定等于零，可以不必考虑，所以只需考虑可以不为零的项. 在这样的项中，必然有一个因子来自第 1 行，只能是元素 a_{11}；必然有一个因子来自第 2 行，有元素 a_{21}, a_{22} 可供选择，但元素 a_{21} 与元素 a_{11} 同在第 1 列，不能乘在一起，从而只能是元素 a_{22}…… 必然有一个因子来自第 n 行，有元素 $a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}$ 可供选择，但元素 a_{n1} 与元素 a_{11} 同在第 1 列，不能乘在一起，元素 a_{n2} 与元素 a_{22} 同在第 2 列，不能乘在一起 …… 从而只能是元素 a_{nn}. 这说明可以不为零的项只有一项，它是 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，由于列标排列逆序数

$$N(1\ 2\ \cdots\ n) = 0$$

所以项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 前面应取正号. 那么，三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

同理，另一种三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

由此可知：三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

若行列式 D 主对角线以外的元素全为零，则称行列式 D 为对角形行列式，它是三角形行列式的特殊情况，它的值当然等于主对角线上元素的乘积，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

例 10 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=1\times 2\times\cdots\times n=n!$$

例 11 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}=\underbrace{x\cdot x\cdots x}_{n\text{个}}=x^n$$

§ 1.2 行列式的性质

尽管在行列式定义中给出了计算行列式的具体方法，但工作量是很大的，因此有必要寻找计算行列式的其他方法.

根据 §1.1 的讨论可知，三角形行列式的计算非常简单，能够立即得到结果. 于是，计算行列式的思路之一就是将所计算的行列式通过恒等变形化为三角形行列式，其依据就是行列式的性质.

考虑三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

若将第 1 行与第 2 行交换，得到行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{21}a_{12}a_{33}+a_{22}a_{13}a_{31}+a_{23}a_{11}a_{32}-a_{23}a_{12}a_{31}-a_{22}a_{11}a_{33}-a_{21}a_{13}a_{32}$$

$$= -a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$= -D$$

若将第1行乘以数 k,得到行列式

$$D_2 = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= ka_{11}a_{22}a_{33} + ka_{12}a_{23}a_{31} + ka_{13}a_{21}a_{32} - ka_{13}a_{22}a_{31} - ka_{12}a_{21}a_{33} - ka_{11}a_{23}a_{32}$$
$$= kD$$

若将第1行的 k 倍加到第2行上去,得到行列式

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}(a_{22}+ka_{12})a_{33} + a_{12}(a_{23}+ka_{13})a_{31} + a_{13}(a_{21}+ka_{11})a_{32} - a_{13}(a_{22}+ka_{12})a_{31} - a_{12}(a_{21}+ka_{11})a_{33} - a_{11}(a_{23}+ka_{13})a_{32}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$
$$= D$$

从上面观察得到的结论,可以证明对于 n 阶行列式在一般情况下也是成立的,行列式具有下列性质:

性质1 交换行列式的任意两行(列),行列式变号;

性质2 行列式的任意一行(列)的公因子可以提到行列式外面;

性质3 行列式的任意一行(列)的 k 倍加到另外一行(列)上去,行列式的值不变.

自然会提出这样的问题:在什么情况下,行列式的值一定等于零.作为行列式性质的推论回答了这个问题.

推论 行列式的值一定等于零的情况:

1. 有一行(列)的元素全为零;

2. 有两行(列)的对应元素相同;

3. 有两行(列)的对应元素成比例.

例1 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 10$,求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(交换第 1 行与第 2 行)

$$= -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(交换第 2 行与第 3 行)

$$= (-1)^2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \times 10 = 10$$

例 2 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 3$,求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{vmatrix}$$

(第 1 行至第 3 行各行的公因子 2 皆提到行列式外面)

$$= 2 \times 2 \times 2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2^3 \times 3 = 24$$

例 3 已知三阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = M$,求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+kb & b+c & c \\ u+kv & v+w & w \\ x+ky & y+z & z \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+kb & b+c & c \\ u+kv & v+w & w \\ x+ky & y+z & z \end{vmatrix}$$

(第 3 列的 -1 倍加到第 2 列上去)

$$= \begin{vmatrix} a+kb & b & c \\ u+kv & v & w \\ x+ky & y & z \end{vmatrix}$$

(第 2 列的 $-k$ 倍加到第 1 列上去)

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = M$$

例 4 已知三阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$,求三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \end{vmatrix}$$

的值.

解:三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \end{vmatrix}$$

(交换第 2 行与第 3 行)

$$= -\begin{vmatrix} 4a_{11} & 4a_{12} & 4a_{13} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（第1行的公因子4提到行列式外面）

$$= -4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21}-3a_{31} & 2a_{22}-3a_{32} & 2a_{23}-3a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（第3行的3倍加到第2行上去）

$$= -4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

（第2行的公因子2提到行列式外面）

$$= -4\times 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -4\times 2\times 1 = -8$$

例5 解四阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & kx_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & kx_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & kx_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & kx_4 \end{vmatrix} = 0$$

例6 已知 n 阶行列式 D 中有 n^2-n 个以上的元素为零，证明：n 阶行列式 $D=0$

证：由于 n 阶行列式 D 中的元素共有 n^2 个，又已知其中有 n^2-n 个以上的元素