



高等教育
新形态一体化教材

微积分 基础教程

主编 李庶民

Calculus

高等教育出版社



资源索引表



高等教育
新形态一体化教材

微积分 基础教程

主 编 李庶民

副主编 陈付彬 杨波

参编人员(按汉语拼音排序)

陈付彬 郝 冰 何维刚 李建祥 李庶民

刘云涛 薛建明 杨 波 禹旺勋 张 娟

张小龙 郑治波 周旋

Wei Jifen Jichu Jiaocheng

Calculus

高等教育出版社·北京

内容提要

本书内容根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《大学数学课程教学基本要求(2014年版)》编写而成,内容深度和广度同时适合高等院校经管类和理工类各相关专业学生使用,编写时力求使这两类专业在微积分课程中的差异性内容区分度明确,组织教学时便于教师灵活取舍而不影响到对其他相关知识的教学。

本书对现行的微积分课程教学体系作了较大幅度的结构调整,将微积分课程视为两个相对独立完备的体系:微分学体系与积分学体系,即先全面系统地介绍微分学体系(一元、多元微分学有机糅合在一起,形成一个全新的单元板块),然后再系统地介绍积分学体系(定积分、重积分、曲线与曲面积分),可使学生对微分学和积分学都能有更加全面而完整的认识,且由于一元微分学与多元微分学内容相近、一元积分学与多元积分学内容相近,学生读者由一元微分学过渡到多元微分学、由一元积分学过渡到多元积分学都更容易。

本书主要内容包括空间解析几何基础、函数、极限与连续性、微分学基础、微分学的应用、定积分及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程与差分方程。书末还附有部分习题答案与提示、预备知识、常见平面曲线、常见空间曲面等内容。此外,本书精选36道习题录制视频讲解,以二维码的形式呈现。

图书在版编目(CIP)数据

微积分基础教程 / 李庶民主编. -- 北京: 高等教育出版社, 2016. 8

ISBN 978 - 7 - 04 - 046049 - 0

I. ①微… II. ①李… III. ①微积分 - 高等学校 - 教材 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 173755 号

策划编辑 吴晓丽 责任编辑 吴晓丽 封面设计 赵 阳 版式设计 马敬茹
插图绘制 杜晓丹 责任校对 高 歌 责任印制 刘思涵

| | | | |
|------|-----------------------|------|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 网 址 | http://www.hep.edu.cn |
| 社 址 | 北京市西城区德外大街4号 | | http://www.hep.com.cn |
| 邮政编码 | 100120 | 网上订购 | http://www.hepmall.com.cn |
| 印 刷 | 秦皇岛市昌黎文苑印刷有限公司 | | http://www.hepmall.com |
| 开 本 | 787 mm × 1092 mm 1/16 | | http://www.hepmall.cn |
| 印 张 | 23.75 | 版 次 | 2016年8月第1版 |
| 字 数 | 600千字 | 印 次 | 2016年8月第1次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定 价 | 36.80元 |
| 咨询电话 | 400-810-0598 | | |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究
物料号 46049-00

序

以微积分为主要内容的高等数学课程,作为理学、工程、农林、经济、管理类专业学生的重要基础课程,担负着向本科学生传授各自专业所必需的数学基础知识,培养逻辑思维能力,提高数学素养,并运用这些数学基础知识,为本专业学科的后续专业课程学习提供服务,解决将来工作中的实际问题和工作需要打下坚实的数学基础。

李庶民老师主编的《微积分基础教程》一书,根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《大学数学课程教学基本要求(2014年版)》,结合多年来对高等学校各类别各层次学生长期教学而积累的丰富经验,在长期构想和反复探讨的基础上编写而成。通读了本书书稿后,个人认为该书在以下几个方面有着较为突出的特点:

(1) 在微积分教材体系上大胆突破。教材采取先系统讲授微分学(一元微分学和多元微分学),后系统讲授积分学(定积分、重积分,曲线积分与曲面积分)的模式,令人耳目一新。其中将不定积分融入到定积分中的做法,正是一元积分学的历史再现。这有别于现行的绝大多数微积分教材体系,也是微积分教材百花齐放中的一朵有鲜明特色的小花。

(2) 教材可供理工类专业和经济管理类专业通用。教材同时兼顾了理工类专业和经济管理类专业的课程基本要求,在达到经济管理类教学基本要求的基础上,补充完善了理工类专业应掌握的内容,可满足理工类不同专业对微积分知识的特色需求。教材难度适中,对这两类专业的差异性内容区分度明确,内容编排合理,逻辑关系安排得当,组织教学时可根据需要灵活取舍。对共性内容的不同教学要求亦可通过教学侧重、深浅把握以及课后习题差异性布置做适度区分。

(3) 教材对理论知识的讲解深入浅出,适当降低了某些理论的难度,略去了部分较长或有一定难度的定理证明,而注重基本概念、基本运算、基本应用。通过一些在物理、经济、管理等方面应用的例题及少量习题,培养学生的数学建模思想,引导学生学以致用。

(4) 教学内容和课程体系的改革是教学改革的重点和难点。鼓励不同层次、不同类别、不同模式、不同侧重的各种教学改革,是当前高等教育发展的必然趋势。有感于编者们的教学探索的艰辛和执着,畅慰老怀。愿借本书付梓之际,欣然作序。

相信这本有自身鲜明特色教材的出版,能为更多更具特色的教材问世抛砖引玉。

李继彬

2016年6月

前 言

本书根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的《大学数学课程教学基本要求(2014年版)》,结合编者多年来的教学体会,在长期构想和反复探讨的基础上,针对普通高等学校各相关专业学生学习高等数学课程的需要编写而成。编者主要基于以下两点初衷:

1. 试图对现行微积分课程作较大幅度的改革与探索。根据微积分内容的特点和历史发展线索,受菲赫金哥尔茨《微积分学教程》的启发,将微积分课程视为两个相对独立完备的体系:微分学体系与积分学体系,即先全面系统地学习微分学(一元、多元微分学有机糅合在一起,形成一个大的单元板块),然后再全面系统地学习积分学(定积分、重积分、曲线与曲面积分也形成一个大的单元板块),可使学生对微分学和积分学都能有更加全面而完整的认识,且由于一元微分学与多元微分学内容相近、一元积分学与多元积分学内容相近,学生由一元微分学过渡到多元微分学、由一元积分学过渡到多元积分学都更容易,讲授时可节约一定学时。目前国内依此思路编写的教材不多,希望我们的工作会对微积分课程改革起到积极促进作用。

2. 为兼顾大多数本科学校专业设置的特点,统一教材使用及对课程更具共性的教学组织和管理,编者试图以经济管理类专业微积分课程应知应会教学基本要求为基础,在突出经济应用(如简单经济函数、微分学的经济应用、定积分的经济应用、差分方程等)的基础上,兼顾理工类专业的教学基本要求,增加了向量代数与空间直线平面方程、曲率、微分学的几何应用、方向导数与梯度、三重积分、曲线积分与曲面积分、傅里叶级数等理工类专业要求的特色内容。编写时力求做到这两类专业在微积分课程中的差异性内容区分度明确,便于教师组织教学时灵活取舍而不影响到对其他相关知识的教学。因而本书可同时供理工科类专业和经济管理类专业选用。理工科类专业可视学时多寡讲授本书部分或全部内容,经济管理类专业则可对《经济管理类专业教学基本要求》中未提及的内容不作介绍。

在编写过程中,编者主要作了以下考虑:

1. 妥善处理“一元”与“多元”相应概念、性质、方法的内在联系,把握其共性与差异性。在“糅合”一元与多元相应的内容时,注意到相应概念的思想本质是一致的,从而在基本理论和基本方法上也有着高度的相似性,同时,为了避免读者在学习过程中(尤其是在计算时)引起混淆,我们本着“概念融合,计算分离,相对独立,有机联系”的原则,将一元微分与多元微分的概念性质相对集中,便于读者学习时作比较,但在计算时则将一元微分与多元微分的计算方法独立开来,分别介绍,避免读者混淆;对定积分、二重积分、三重积分等内容也相对集中,对基础而关键的不定积分和定积分的计算,也分开处理,避免因有无积分限而引起混淆,而后紧接着介绍多元积分,并将其化为一个或多个定积分计算。另外,我们对一元积分学作了还原历史——先有定积分而后才有不定积分——的处理。以上所述既是本书的最主要的特点,同时也是本书编写过程中最棘手的环节。

2. 为支撑多元微积分的内容,将空间解析几何、多元函数、极限理论与连续性等知识先行加以介绍。

3. 根据目前大部分本科学校的实际,本着“适度、够用”的原则,在保持微积分内容的系统性和

完整性的前提下,本书适当降低了某些理论的难度,略去了部分较长或有一定难度的定理证明。但对于“教学基本要求”中的基本概念、基本理论和基本方法部分则作较详尽的阐述,力求深入浅出地引入概念,完整仔细地介绍方法,引导学生将学习重点集中到掌握基本概念和基本方法,而不刻意追求难度与技巧的学习。

4. 着力引导本科学生的“应用”意识,在引入导数、微分、定积分、重积分、曲线与曲面积分等概念时,均根据微积分发展的历史,介绍了导致这些概念产生的源问题,并精选了一些在物理、经济、管理等方面应用的例题,以培养学生数学建模的思想;既注重高等数学有关内容的阐释,又注重展示这些内容在实际问题中的应用。

为适应信息技术发展对大学数学教学的要求,本书尝试着在少数习题和例题上制作简单的解题视频演示内容,并附二维码,读者只需用手机二维码扫描软件扫描书中的二维码,就可在手机上播放视频演示内容,这一新颖的方式对读者学习有较好的辅助作用。

本书第一章由郝冰编写,第二章由薛建明编写,第三章由李庶民编写,第四章由杨波、李庶民编写,第五章由周旋、李庶民编写,第六章由张娟编写,第七章由刘云涛、郑治波编写,第八章由禹旺勋、李建祥编写,第九章由陈付彬编写,附录一由张小乐编写,附录二和附录三由何维刚编写。全书由李庶民统稿及定稿。视频制作由周旋、张晓凤、何维刚共同完成。

感谢李继彬教授百忙中欣然为本书作序。

感谢戴琳、蔡光程、郭秀清、梁林教授仔细审阅本书书稿,并提出大量细致而中肯的修订意见。

感谢昆明理工大学理学院和昆明理工大学津桥学院鼎力支持本书的编写工作。

感谢高等教育出版社为本书顺利出版而做出的大量工作,使本书得以顺利付梓。

编写教材是对一个教师专业素养、严谨性和逻辑性、教学内容熟悉程度、教学组织能力、与读者沟通的能力、乃至既精准又深入浅出的中文语言组织和表达能力等的综合考验。对微积分这样已具经典结构体系和内容的课程,想要编写出有较大改革力度的教材更为艰辛,调整知识体系结构更加困难,特别是在知识点的前后逻辑关系和衔接上容易产生因果倒置、前后不一、挂一漏万等诸多问题。尽管编者作了不懈努力,力求减少不必要的笔误,但限于编者的水平与能力,这些不妥与错误在所难免。在此,编者愿借本书出版之机抛砖引玉,求教专家和读者,不吝斧正,以便我们能不断改进,使本书得以日臻完善。

编者

2016年5月

目 录

| | |
|----------------------------|----|
| 第一章 空间解析几何基础 | 1 |
| 第一节 空间直角坐标系与空间曲面 | 1 |
| 一、空间直角坐标系 | 1 |
| 二、空间两点之间的距离 | 2 |
| 三、曲面方程的一般概念 | 3 |
| 四、常见的空间曲面 | 4 |
| 习题 1-1 | 8 |
| 第二节 空间曲线及其在坐标面上的投影 | 8 |
| 一、平面曲线的极坐标方程和参数方程 | 9 |
| 二、空间曲线的一般方程与参数方程 | 10 |
| 三、空间曲线在坐标面上的投影 | 11 |
| 习题 1-2 | 12 |
| 第三节 空间中的向量代数 | 13 |
| 一、向量的线性运算 | 13 |
| * 二、空间向量的方向角、方向余弦及其在数轴上的投影 | 15 |
| * 三、数量积、向量积、混合积 | 17 |
| 习题 1-3 | 21 |
| 第四节 空间中平面与直线的方程 | 22 |
| 一、平面的点法式方程 | 22 |
| 二、平面的一般方程 | 23 |
| 三、空间直线的一般方程与对称式方程 | 24 |
| 四、空间直线、平面间的位置关系 | 27 |
| 习题 1-4 | 29 |
| 第一章总习题 | 30 |
| 第二章 函数、极限与连续性 | 32 |
| 第一节 区间和平面区域 | 32 |
| 一、数轴上的区间与邻域 | 32 |
| 二、平面上的邻域和区域 | 33 |
| 习题 2-1 | 35 |
| 第二节 一元函数与多元函数 | 35 |
| 一、一元函数的概念 | 35 |
| 二、某些一元函数具有的特性 | 37 |
| 三、一元函数的反函数 | 38 |

| | |
|----------------------------|----|
| 四、一元初等函数 | 39 |
| 五、一元分段函数与幂指函数 | 43 |
| 六、多元函数的概念 | 44 |
| 习题 2-2 | 45 |
| * 第三节 简单的经济函数 | 46 |
| 一、单利、复利与多次付息 | 46 |
| 二、贴现 | 47 |
| 三、需求函数与供给函数 | 48 |
| 四、成本函数、收益函数和利润函数 | 49 |
| 习题 2-3 | 51 |
| 第四节 一元函数的极限 | 51 |
| 一、数列的极限 | 51 |
| 二、一元函数的极限 | 54 |
| 习题 2-4 | 56 |
| 第五节 无穷小量与无穷大量 | 57 |
| 一、无穷小量及其运算性质 | 57 |
| 二、无穷大量 | 58 |
| 三、无穷小量与无穷大量的关系 | 58 |
| 习题 2-5 | 59 |
| 第六节 极限运算 | 59 |
| 一、极限的运算法则 | 59 |
| 二、极限存在准则 两个重要极限 | 62 |
| 三、无穷小量的比较 | 65 |
| 习题 2-6 | 66 |
| 第七节 一元函数的连续性 | 67 |
| 一、连续函数的概念 | 67 |
| 二、连续函数的基本性质及初等函数的连续性 | 68 |
| 三、闭区间上连续函数的性质 | 69 |
| 四、函数的间断点及其分类 | 70 |
| 习题 2-7 | 72 |
| 第八节 二元函数的极限与连续性 | 72 |
| 一、二元函数的极限 | 72 |
| 二、二元函数的连续性 | 73 |
| 习题 2-8 | 73 |
| 第二章总习题 | 74 |
| 第三章 微分学基础 | 77 |
| 第一节 导数的概念 | 77 |
| 一、微分学产生的背景 | 77 |
| 二、一元函数的导数 | 78 |

| | | |
|-----|--|-----|
| | 三、一元函数可导与连续的关系 | 79 |
| | 四、导数的几何意义、物理意义与经济意义 | 80 |
| | 习题 3-1 | 81 |
| 第二节 | 一元函数的求导方法 | 81 |
| | 一、用定义求导数 | 81 |
| | 二、导数的四则运算法则 | 83 |
| | 三、反函数的导数 | 84 |
| | 四、一元复合函数的导数 | 85 |
| | 五、一元初等函数求导方法小结 | 87 |
| | 六、幂指函数求导与取对数求导法 | 87 |
| | 七、高阶导数 | 89 |
| | 八、由参数方程所确定的一元函数的导数 | 90 |
| | 习题 3-2 | 91 |
| 第三节 | 偏导数及其计算 | 92 |
| | 一、偏导数的概念 | 92 |
| | 二、求偏导数的基本方法 | 94 |
| | 三、高阶偏导数 | 95 |
| | 四、多元复合函数的求导法则 | 96 |
| | 习题 3-3 | 98 |
| 第四节 | 隐函数的(偏)导数 | 99 |
| | 一、隐函数的概念 | 99 |
| | 二、隐函数的求(偏)导数公式 | 99 |
| | 三、用复合函数求(偏)导法则求隐函数的(偏)导数 | 101 |
| | 习题 3-4 | 103 |
| 第五节 | 微分与全微分 | 104 |
| | 一、一元函数微分的概念及几何意义 | 104 |
| | 二、一元函数的微分公式与运算法则 | 106 |
| | 三、多元函数的全微分 | 107 |
| | 四、微分与全微分在近似计算中的应用 | 109 |
| | 习题 3-5 | 110 |
| | 第三章总习题 | 111 |
| 第四章 | 微分学的应用 | 113 |
| 第一节 | 中值定理 | 113 |
| | 一、罗尔定理 | 113 |
| | 二、拉格朗日中值定理 | 114 |
| | 三、柯西中值定理 | 115 |
| | 习题 4-1 | 116 |
| 第二节 | 洛必达法则 | 117 |
| | 一、 $\frac{0}{0}$ 型及 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限求法 | 117 |

| | | |
|-----|---|-----|
| | 二、 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, \infty^0, 0^0$ 型未定式的解法 | 119 |
| | 习题 4-2 | 121 |
| 第三节 | 一元函数的单调性与凹凸性 | 121 |
| | 一、单调性的判别法 | 122 |
| | 二、单调区间求法 | 122 |
| | 三、曲线凹凸性的概念 | 123 |
| | 四、曲线凹凸性的判定 | 124 |
| | 五、曲线的拐点及其求法 | 125 |
| | 习题 4-3 | 126 |
| 第四节 | 一元函数的极值与最值 | 126 |
| | 一、一元函数极值与最值的概念 | 126 |
| | 二、一元函数极值的求法 | 126 |
| | 三、一元函数最值的求法 | 129 |
| | 习题 4-4 | 130 |
| 第五节 | 一元函数图形的描绘 | 130 |
| | 一、渐近线 | 130 |
| | 二、一元函数作图 | 131 |
| | 习题 4-5 | 132 |
| 第六节 | 曲率 | 132 |
| | 一、弧微分 | 132 |
| | 二、曲率与曲率圆 | 133 |
| | 习题 4-6 | 135 |
| 第七节 | 微分学在几何中的应用 | 136 |
| | 一、空间曲线的切线与法平面 | 136 |
| | 二、空间曲面的切平面与法线 | 136 |
| | 习题 4-7 | 138 |
| 第八节 | 多元函数的极值与最值 | 138 |
| | 一、二元函数极值 | 138 |
| | 二、二元函数的最大值与最小值 | 140 |
| | 三、条件极值与拉格朗日乘数法 | 141 |
| | 习题 4-8 | 142 |
| 第九节 | 微分学在经济中的简单应用 | 142 |
| | 一、边际分析 | 142 |
| | 二、弹性分析 | 146 |
| | 三、经济最值问题 | 149 |
| | 习题 4-9 | 150 |
| 第十节 | 方向导数与梯度 | 150 |
| | 一、方向导数 | 150 |
| | 二、梯度 | 151 |

| | |
|-------------------------|-----|
| 习题 4-10 | 152 |
| 第四章总习题 | 153 |
| 第五章 定积分及其应用 | 154 |
| 第一节 定积分的概念与性质 | 154 |
| 一、定积分的基本思想与问题起源 | 154 |
| 二、定积分的概念 | 156 |
| 三、定积分的几何意义 | 157 |
| 四、定积分的性质 | 157 |
| 习题 5-1 | 160 |
| 第二节 微积分基本定理 | 161 |
| 一、积分上下限函数及其导数、原函数 | 161 |
| 二、牛顿-莱布尼茨公式 | 164 |
| 习题 5-2 | 165 |
| 第三节 不定积分的概念和性质 | 166 |
| 一、不定积分的概念 | 166 |
| 二、基本积分表 | 167 |
| 三、不定积分的性质 | 168 |
| 习题 5-3 | 169 |
| 第四节 不定积分的积分方法 | 170 |
| 一、不定积分的换元积分法 | 170 |
| 二、不定积分的分部积分法 | 176 |
| 三、几类特殊函数的积分法 | 179 |
| 习题 5-4 | 181 |
| 第五节 定积分的积分方法 | 182 |
| 一、定积分的换元积分法 | 182 |
| 二、定积分的分部积分法 | 185 |
| 习题 5-5 | 187 |
| 第六节 反常积分 | 188 |
| 一、无穷区间的反常积分 | 188 |
| 二、无界函数的反常积分 | 190 |
| 习题 5-6 | 191 |
| 第七节 定积分的应用 | 192 |
| 一、平面图形的面积 | 192 |
| 二、特殊的空间立体的体积 | 195 |
| 三、物理应用 | 197 |
| 四、经济学中的应用 | 198 |
| 习题 5-7 | 199 |
| 第五章总习题 | 200 |

| | |
|-------------------------|-----|
| 第六章 重积分 | 202 |
| 第一节 二重积分的概念与性质 | 202 |
| 一、二重积分的概念 | 202 |
| 二、二重积分的性质 | 205 |
| 习题 6-1 | 206 |
| 第二节 二重积分的计算 | 206 |
| 一、 X 型区域与 Y 型区域 | 207 |
| 二、直角坐标系下二重积分的计算 | 207 |
| 三、极坐标系下二重积分的计算 | 213 |
| 习题 6-2 | 218 |
| 第三节 三重积分及其在直角坐标系下的计算 | 220 |
| 一、三重积分的概念 | 220 |
| 二、空间直角坐标系下三重积分的计算方法 | 221 |
| 习题 6-3 | 225 |
| 第四节 利用柱面坐标系和球面坐标系计算三重积分 | 225 |
| 一、柱面坐标系下三重积分的计算方法 | 225 |
| 二、球面坐标系下三重积分的计算方法 | 227 |
| 习题 6-4 | 229 |
| 第五节 重积分的应用 | 229 |
| 一、空间立体的体积 | 229 |
| 二、重积分的物理应用 | 230 |
| 习题 6-5 | 233 |
| 第六章总习题 | 233 |
| 第七章 曲线积分与曲面积分 | 235 |
| 第一节 对弧长的曲线积分 | 235 |
| 一、对弧长的曲线积分的概念与性质 | 235 |
| 二、对弧长的曲线积分的计算方法 | 236 |
| 习题 7-1 | 238 |
| 第二节 对坐标的曲线积分 | 239 |
| 一、对坐标的曲线积分的概念与性质 | 239 |
| 二、对坐标的曲线积分的计算方法 | 240 |
| 习题 7-2 | 243 |
| 第三节 格林公式及其应用 | 243 |
| 一、格林公式 | 243 |
| 二、平面曲线积分与路径无关的条件 | 246 |
| 三、二元函数的全微分求积 | 247 |
| 习题 7-3 | 248 |
| 第四节 曲面积分 | 249 |
| 一、对面积的曲面积分 | 249 |

| | | |
|------|-------------------------|-----|
| | 二、对坐标的曲面积分的概念与性质 | 252 |
| | 三、对坐标的曲面积分的计算方法 | 254 |
| | 习题 7-4 | 256 |
| 第五节 | 高斯公式和斯托克斯公式 | 257 |
| | 一、高斯公式 | 257 |
| | 二、斯托克斯公式 | 258 |
| | 习题 7-5 | 259 |
| *第六节 | 场论初步 | 259 |
| | 一、数量场与向量场 | 259 |
| | 二、向量场的散度和通量 | 260 |
| | 三、向量场的环流量与旋度 | 261 |
| | 习题 7-6 | 262 |
| 第七章 | 总习题 | 262 |
| 第八章 | 无穷级数 | 264 |
| 第一节 | 常数项级数的概念与性质 | 264 |
| | 一、常数项级数的概念 | 264 |
| | 二、收敛级数的基本性质 | 266 |
| | 习题 8-1 | 268 |
| 第二节 | 常数项级数的审敛法 | 269 |
| | 一、正项级数及其审敛法 | 269 |
| | 二、任意项级数、绝对收敛、条件收敛 | 273 |
| | 习题 8-2 | 275 |
| 第三节 | 函数项级数与幂级数 | 276 |
| | 一、函数项级数 | 276 |
| | 二、幂级数及其收敛域 | 277 |
| | 三、幂级数的运算 | 281 |
| | 习题 8-3 | 282 |
| 第四节 | 函数展开成幂函数 | 283 |
| | 一、泰勒级数 | 283 |
| | 二、函数展开成幂级数 | 284 |
| | 习题 8-4 | 287 |
| 第五节 | 幂级数的应用 | 287 |
| | 一、函数值的近似计算 | 287 |
| | 二、在积分计算中的应用 | 289 |
| | 三、求极限 | 289 |
| | 四、证明欧拉公式 | 289 |
| | 习题 8-5 | 290 |
| 第六节 | 傅里叶级数 | 290 |
| | 一、三角函数系的正交性 | 290 |

| | |
|--------------------------------|-----|
| 二、周期为 2π 的函数展开为傅里叶级数 | 292 |
| 三、周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数 | 295 |
| 习题 8-6 | 296 |
| 第八章总习题 | 297 |
| 第九章 微分方程与差分方程 | 300 |
| 第一节 微分方程的基本概念 | 300 |
| 一、引言 | 300 |
| 二、基本概念 | 301 |
| 习题 9-1 | 303 |
| 第二节 微分方程的初等积分法 | 303 |
| 一、可分离变量的微分方程 | 303 |
| 二、齐次方程 | 305 |
| 三、一阶线性微分方程 | 306 |
| 四、全微分方程 | 308 |
| 五、可降阶的高阶微分方程 | 309 |
| 习题 9-2 | 311 |
| 第三节 二阶线性微分方程 | 313 |
| 一、高阶线性微分方程的概念 | 313 |
| 二、二阶线性微分方程通解的结构 | 313 |
| 三、二阶常系数齐次线性微分方程 | 315 |
| 四、二阶常系数非齐次线性微分方程 | 316 |
| 习题 9-3 | 318 |
| 第四节 差分方程的基本概念 | 319 |
| 一、差分与差分方程 | 319 |
| 二、常系数线性差分方程解的结构 | 320 |
| 习题 9-4 | 321 |
| 第五节 常系数线性差分方程 | 321 |
| 一、一阶常系数齐次线性差分方程 | 321 |
| 二、一阶常系数非齐次线性差分方程 | 321 |
| 三、二阶常系数齐次线性差分方程 | 322 |
| 四、二阶常系数非齐次线性差分方程 | 323 |
| 习题 9-5 | 325 |
| * 第六节 数学建模与微分方程应用简介 | 325 |
| 一、数学模型简介 | 325 |
| 二、微分方程的应用模型 | 327 |
| 三、差分方程的应用模型 | 330 |
| 第九章总习题 | 331 |
| 部分习题答案与提示 | 333 |

| | |
|-----------------|-----|
| 附录一 预备知识····· | 351 |
| 附录二 常见平面曲线····· | 356 |
| 附录三 常见空间曲面····· | 359 |
| 主要参考文献····· | 362 |

第一章 空间解析几何基础

空间解析几何的产生是数学史上一个划时代的成就,它通过点和坐标的对应关系,把数学研究的两个基本对象“数”和“形”统一起来,使得人们既可以用代数方法解决几何问题,也可以用几何方法解决代数问题,从而达到真正的“数形结合”。

本章我们介绍空间解析几何的一些基本概念,包括空间直角坐标系、空间曲面、空间曲线、空间向量代数、空间平面与空间直线方程等概念.这些内容是学习多元函数微积分的重要基础.

第一节 空间直角坐标系与空间曲面

一、空间直角坐标系

在平面解析几何中已经建立了平面直角坐标系,可把平面上的点和有序实数组(即点的坐标 (x,y))对应起来.同样,为了把空间中的任一点与有序实数组对应起来,我们建立空间直角坐标系.

在空间取一定点 O ,作三条以点 O 为原点的两两垂直的数轴,依次叫作 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴),统称坐标轴,这三条轴具有相同的单位长度,它们共同构成一个空间直角坐标系.

它们的正方向满足右手法则,即以右手握住 z 轴,当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 的角度指向 y 轴的正向时,竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向,如图1-1所示.

三个坐标轴中任意两条可以确定一个平面,这样确定的三个平面统称为坐标面. x 轴与 y 轴所确定的坐标面叫做 xOy 面,通常配置在水平面上,由 y 轴及 z 轴和由 z 轴及 x 轴所确定的坐标面,分别叫做 yOz 面和 xOz 面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分叫做一个卦限,含 x 轴、 y 轴与 z 轴正半轴的那个卦限叫做第一卦限.在 xOy 面上方,从第一卦限开始,按逆时针方向依次确定的三个卦限分别叫做第二、第三、第四卦限.第五至第八卦限在 xOy 面下方,由第一卦限之下的第五卦限,按逆时针方向确定,这八个卦限分别用 $I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII$ 表示,如图1-2所示.

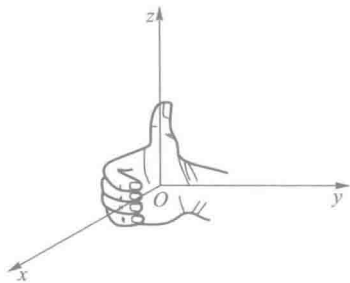


图 1-1

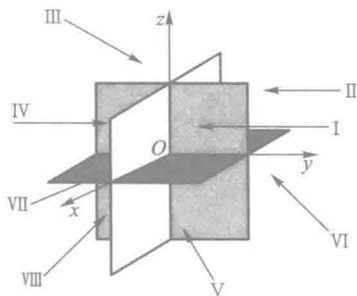


图 1-2

设 M 是空间中一点, 过点 M 作三个平面分别与三个坐标轴垂直. 它们与三个坐标轴的交点依次记作 P, Q, R (图 1-3), 这三个交点在 x 轴, y 轴, z 轴上的坐标依次为 x, y, z . 则点 M 就唯一地确定了一个有序数组 x, y, z ; 反过来, 已知一个有序数组 x, y, z , 可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R , 然后通过 P, Q, R 分别作 x 轴, y 轴, z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 x, y, z 确定的唯一的点.

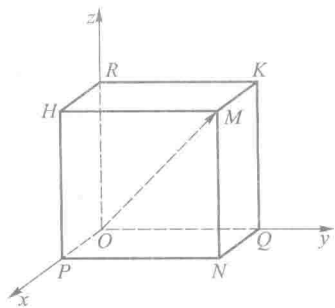


图 1-3

这样就建立了空间点 M 和有序数组 x, y, z 之间的一一对应关系. 这组数 x, y, z 叫做点 M 的坐标, x, y, z 分别称为点 M 的横坐标, 纵坐标和竖坐标, 记作 $M(x, y, z)$.

二、空间两点之间的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中的两点. 过 M_1, M_2 各作三个分别垂直于三个坐标轴的平面. 这六个平面围成一个以 M_1, M_2 为对角线的长方体, 如图 1-4 所示, 由相应的三角形勾股定理易知

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$

所以, 空间两点的距离公式为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1)$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 到坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

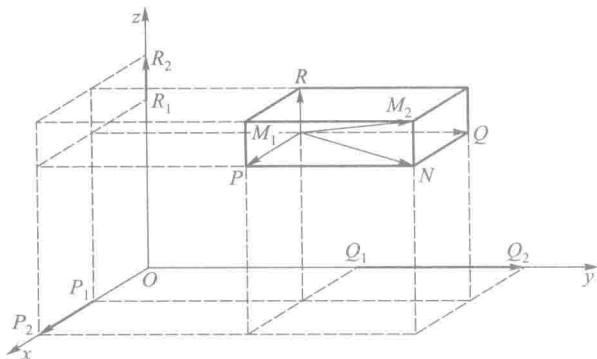


图 1-4

例 1 求点 $M(x, y, z)$ 到 x 坐标轴的距离和到 xOy 坐标面的距离.

解 点 $M(x, y, z)$ 在 x 轴上的投影, 记为 A 点, 则 A 的坐标为 $(x, 0, 0)$, 所以 $M(x, y, z)$ 到 x 轴的距离 d_1 为

$$d_1 = |MA| = \sqrt{(x-x)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

设 P 是点 M 在 xOy 面上的投影, 则 P 的坐标为 $(x, y, 0)$, 所以 M 到 xOy 面的距离 d_2 为

$$d_2 = |MP| = \sqrt{(x-x)^2 + (y-y)^2 + (z-0)^2} = |z|.$$

由对称性易知, $M(x, y, z)$ 到 y 轴的距离为 $\sqrt{x^2 + z^2}$ 和 $M(x, y, z)$ 到 z 轴的距离为 $\sqrt{x^2 + y^2}$. $M(x, y, z)$ 到 yOz 面的距离和到 xOz 面的距离分别为 $|x|$ 和 $|y|$.