最优化方法与策略

ZUIYOUHUA FANGFA YU CELüE

李卫国◎编著

东北师范大学出版社
NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS

最优化方法与策略

李卫国　编著

东北师范大学出版社
长　春

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法与策略 / 李卫国编著. —长春：东北师范大学出版社，2015.3

ISBN 978 - 7 - 5681 - 0656 - 6

Ⅰ.①最… Ⅱ.①李… Ⅲ.①最优化算法—高等职业教育—教材 Ⅳ.①O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 040907 号

□责任编辑:周虎男 □封面设计:吴晋书艺坊
□责任校对:李俊颖 □责任印制:刘兆辉

东北师范大学出版社出版发行
长春净月国家高新技术产业开发区金宝街 118 号(邮政编码:130117)
电话:0431—85687213 010—82893515
传真:0431—85691969 010—82896571
网址:http://www.nenup.com
北京市大观世纪文化传媒有限公司制版
北京市彩虹印刷有限责任公司印装
北京市顺义区顺平路南彩段 5 号(邮政编码:101300)
2015 年 3 月第 1 版 2015 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
幅面尺寸:185 mm×260 mm 印张:11.25 字数:284 千

定价:25.00 元

序

通常认为，通识教育（General Education）源于亚里士多德提出的自由教育思想，其思想的核心旨在强调对学生个性发展的重视，以及为促进这种个性发展进行的基础知识的训练。通识教育在欧美倡导了百余年，可谓高等教育理论中既经典又最具活力的部分。最有影响的通识教育思想以美国哈佛大学委员会在1945年发表的《自由社会中的通识教育》的报告书为代表，即美国高等教育史上著名的《红皮书》（The Red Book）。《红皮书》中提出通识教育的目的是培养完整的人，而这种人需要具备四种能力：（1）思考的能力；（2）沟通的能力；（3）判断的能力；（4）辨别价值的能力。在我国，蔡元培先生提倡大学本科要“融通文理两科之界限”，教育家梅贻琦先生认为大学教育应以“通识为本，专识为末”。

优化与策略课程的设置与研究正是力图融自然科学与人文科学的精髓，优化是培养人做事的最优化方向，凡事要争取做到最好，而策略正是为了达到这一目标所提供的方法和手段。当今年轻人缺乏的恰恰是这种思考的能力，缺乏最优化的思想，缺乏明确的目标和方向。最优化方法与策略这一崭新理念的提出，使年轻人做到既有思考的能力，又具备实施目标的方法和手段。

优化是思想，策略是方法，在最优化思想的指导下，寻找最佳的策略来解决学生学习和生活中的所有问题。通识教育的一个重要的目的，在于让受教育者了解不同知识的内在统一性和差别性，了解不同学科的智慧境界和思考方式，从而达到对客观对象的更高境界的把握。高等教育的重要责任是将人文学与科学衔接起来，为青年一代提供最真挚的帮助和最有效的指导；主要任务是教育学生学会思考，找到解决问题的最佳途径。在这个意义上来说，心智训练比知识传授更重要，而优化与策略课程的设置完全可以达到这一目标。

多元化的现代社会需要多样化的人才。教育必须让学生学会选择，学会规划，学会设计自己的未来。通识教育要求我们真正确立“以学生为中心”的教育观念，为学生的自由与全面发展创造有利的条件和环境。而这本身亦是对学生的一种人文精神的熏陶。最优化方法与策略，为学生营造一个科学、技术、人文相融合的成长环境，在成长中培养学生的敬业精神和诚信意识；将个人、学校与社会联系起来，培养学生的社会责任感；使学生自觉成长，在成长的过程中设计自己的最优发展道路，在潜移默化中提升人文素养和文化品位。这个社会需要高素质的能够承担民族复兴大任的年轻人才，这种人才能够在具备专业知识和技能的前提下，优化自己的人生，设计自己

的前程，达到最优的目的；能够具备优化的思想和意识，定位人生，走向成功。

最优化方法与策略的理念尝试将自然科学与人文科学的理念相融合。优化方向侧重培养的是一种最优化的思想，是人生观和价值观的一种历练和提升，在主观上有一个最优的方向，做最好的自己。策略方面侧重培养的是学生多样化地处理问题和解决问题的方式，强调培养学生思维能力的提升，强调培养学生规划人生的能力和手段。最优化方法与策略真正通过教育和教学实践活动提升学生的人文素养和综合能力。使学生通过该课程理解中外历史和文化，熟悉科学和技术，通晓人类内在动机和行为、逻辑和批判思维、感情表达等方面的基本原则。使学生在文化传承中成长，具有哲学智慧与批判性思维，能够适应当今社会的自然、科技与环境，融人社会与文化，认清自我。

通识教育不追求知识的精深，而着眼于获得足够的常识，并强调独立思考、均衡发展、追求真理与正义的价值取向。国内首创的优化与策略课程融合了以下几个方面的内容：人文科学常识；自然科学常识；社会科学常识；世界观、人生观及方法论教育；教育学及心理健康教育。

潘光旦先生指出："教育的理想是在发展整个的人格。"现代校园环境理应既是一个教育环境，又是一个文化环境。这个教育环境中，应有健康的学风、严谨的教风、奋发的校风、浓郁的学术氛围、和谐的校园文化和优美的活动场所，从而培养出具有创新精神的新时代大学生。

远离困惑，走向卓越。当代大学生应该成为一个追求理想和兴趣、终身学习的人；一个能够从思考中认识自我、从学习中寻求真理、从独立中体验自主、从计划中把握时间、从表达中锻炼口才、从交友中品味成熟、从实践中赢得价值、从兴趣中攫取快乐、从追求中获得力量的人；一个"拥有选择的智慧"，并用智慧选择成功的人；一个最好的自己。唯有更多的青年找到自信和快乐，找到真正属于自己的成功之路，中华民族才能够拥有更加辉煌的未来。

目录

Contents

方法篇

第一章　线性规划

第二章　层次分析法（AHP）

第三章　基于 Matlab 软件设计的数学实验

第四章 励志人生的最优化方法

策略篇

第五章 思维策略

第六章 营销策略

方法篇

最优化方法在国民经济的许多领域，如国防、工农业生产、交通运输、工程技术、金融、贸易、管理、科学研究和日常生活中有着广泛的应用。所谓最优化就是在众多可行的方案或方法中找到最好的方案或方法，在一系列客观或主观限制条件下，寻求使关注的某个或多个指标达到最大（或最小）的决策。例如，在确定投资项目时希望选择期望收益最大或风险最小的项目；空间飞船的设计要求在有限的空间放置尽可能多的设备；一个建筑项目在满足设计要求的条件下建筑费用应尽可能少；结构设计要在满足强度要求的条件下选择材料的尺寸，使其总重量最轻；资源分配要在有限资源约束下制定各用户的分配数量，使资源产生的总效益最大；运输方案要在满足物资需求和装载条件下安排从各供应点到各需求点的运量和路线，使运输总费用最低；生产计划要按照产品工艺流程和顾客需求，制定原料、零件、部件等订购、投产的日程和数量，尽量降低成本使利润最高。上述各种决策问题通称为优化问题。

第二次世界大战期间，在军事上首先应用了优化技术。1967年，美国的R. L. 福克斯等发表了第一篇机构最优化论文。1970年，C. S. 贝特勒等运用几何规划解决了液体动压轴承的优化设计问题后，优化设计在机械设计中得到了应用和发展。随着数学理论和电子计算机技术的进一步发展，优化设计已逐步成为一门新兴的、独立的工程学科，并在生产实践中得到了广泛的应用。通常设计方案可以用一组参数来表示，这些参数有些已经给定，有些没有给定，需要在设计中优选，称为设计变量。如何找到一组最合适的设计变量，在允许的范围内，能使所设计的产品结构最合理、性能最好、质量最高、成本最低（即技术经济指标最佳），有市场竞争能力，同时设计的时间又不要太长，这就是优化设计所要解决的问题。为应用最优化技术确定最优的方案，需要针对具体的实际问题建立相应的最优化模型，再根据模型的具体形式和特性选择适当的最优化方法求解。

第一章　线性规划

线性规划作为解决问题的最基本的优化方法，在实际生活中得以广泛运用。资源有限和目标确定的约束前提下，在生产管理和经营活动中，经常会遇到两类优化问题：一类是（资源有限）如何合理地使用现有的劳动力、设备、资金等资源，以得到最大的效益；另一类是（目标一定）为了达到一定的目标，应如何组织生产，或合理安排工艺流程，或调整产品的成分等，以使所消耗的资源（包括人力、设备台时、资金、原材料等）最少。

1.1　线性规划问题及其数学模型

一、问题的提出

(1)配载问题：某种交通工具（车、船、飞机等）的容积和载重量一定，运输几种物资，这些物资有不同的体积和重量，如何装载可以使这种运输工具所装运的物资最多？

(2)下料问题：某厂使用某种圆钢下料，制造直径相同而长度不等的三种机轴，采用什么样的下料方案可以使余料最少？

(3)物资调运：某种产品有几个产地和销售地，物资部门应该如何合理组织调运，从而既满足销售地需要，又不使某个产地物资过分积压，同时还使运输费用最省？

(4)营养问题：各种食品所含营养成分各不相同，价格也不相等，食堂应该如何安排伙食才能既满足人体对各种营养成分的需要，同时又使消费者的经济负担最少？

此外，在地质勘探、环境保护、生产经营等方面也都有与上述情况类似的问题。

【例 1.1.1】某制药厂生产甲、乙两种药品，生产这两种药品要消耗某种维生素。生产每吨药品所需要的维生素量分别为 30 千克和 20 千克，所占设备时间分别为 5 台班和 1 台班，该厂每周所能得到的维生素量为 160 千克，每周设备最多能开 15 个台班。且根据市场需求，甲产品每周产量不应超过 4 吨。已知该厂生产每吨甲、乙两种产品的利润分别为 5 万元和 2 万元。问该厂应如何安排两种产品的产量才能使每周获得的利润最大？

表 1-1　资源配置情况表

	每吨产品的消耗		每周资源总量
	甲产品	乙产品	
维生素/千克	30	20	160
设备/台班	5	1	15

解：设该厂每周安排生产甲、乙两种药品的产量分别为 x_1，x_2 吨，则有

$$\max z=5x_1+2x_2$$

$$\begin{cases}30x_1+20x_2\leqslant 160\\5x_1+x_2\leqslant 15\\x_1\leqslant 4\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

【例 1.1.2】设市场上有甲级糖和乙级糖，单价分别为 20 元/千克，10 元/千克。今要筹办一桩婚事，筹备小组计划花费不超过 200 元，使糖的总千克数不少于 10 千克，甲级糖不少于 5 千克。问如何确定采购方案，使糖的总千克数最大？

解：设采购甲、乙两种糖各 x_1, x_2 千克，则

$$\max z = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \leqslant 200 \\ x_1 + x_2 \geqslant 0 \\ x_1 \geqslant 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

二、线性规划问题的数学模型

1. 从上述两个例子可以看出，它们有 3 个共同点

(1)每个问题都有一组变量——称为决策变量。

(2)都有一个关于决策变量的函数。

(3)每个问题都有一组决策变量需满足的约束条件。

2. 线性规划问题

(1)线性约束条件：在线性规划问题中，不等式组是一组变量 x, y 的约束条件，这组约束条件都是关于 x, y 的一次不等式，故又称线性约束条件。

(2)线性目标函数：如关于 x, y 的一次式 $z = 2x + 3y$ 是欲达到最大值或最小值所涉及的变量 x, y 的一次解析式，叫线性目标函数。

(3)线性规划问题：一般地，求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题，统称为线性规划问题。

(4)可行解、可行域和最优解：满足线性约束条件的解 (x, y) 叫可行解。由所有可行解组成的集合叫可行域。使目标函数取得最大或最小值的可行解叫线性规划问题的最优解。

3. 建立线性规划问题的数学模型步骤

(1)确定问题的决策变量；

(2)确定问题的目标，并表示为决策变量的线性函数；

(3)找出问题的所有约束条件，并表示为决策变量的线性方程或不等式。

4. 线性规划的数学模型

假定线性规划问题中含 n 个变量，分别用 $x_{ij}\ (j = 1, \cdots, n)$ 表示，在目标函数中，x_j 的系数为 c_j（通常称为价值系数）。x_j 的取值受 m 项资源的限制，用 $b_i\ (i = 1, \cdots, n)$ 表示第 i 种资源的拥有量，用 a_{ij} 表示变量 x_j 的取值为一个单位时所消耗或含有的第 i 种资源的数量（通常称为技术系数或工艺系数）。则上述线性规划问题的数学模型可以表示为

$$\max(\min) z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_j \geqslant 0\ (j = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

5. 线性规划的标准型

由于目标函数和约束条件内容和形式上的差别，线性规划问题有多种表达式，为了便于讨论和制定统一的算法，规定标准形式需要满足以下条件：

(1)目标函数极大化；

(2)约束条件为等式且右端项大于等于 0；

(3)决策变量大于等于 0。

标准形式可以有如下表达方式：

(1)一般表达式。

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ x_j\geqslant 0(j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

(2) $\sum$ 记号简写式。

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i(i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

(3)矩阵形式。

$$\max z=CX$$

$$\begin{cases}AX=b\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

式中，$C=(c_1,\cdots,c_n)$，$X=(x_1,\cdots,x_n)'$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \cdots\\ b_3\end{bmatrix},0=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \cdots\\ 0\end{bmatrix}$$

(4)向量形式。

式中，$C,X,b,0$ 的含义与矩阵表达式相同，而

$$\max z=CX$$

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}p_jx_j=b\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

$p_j=[a_{1j},a_{2j}\cdots,a_{mj}](j=1,\cdots,n)$，即 $A=(p_1,p_2\cdots,p_n)$

6. 将非标准形式化为标准形式

目标函数为求极小值：$\min z=CX$，则令 $Z'=-CX$，即 $\max z'=-CX$

(1)右端项小于 0。

只需将两端同乘(−1),不等号改变方向,然后再将不等式改为等式。

例如:

$$2x_1+x_2\geqslant -6$$
$$-2x_1-x_2\leqslant 6$$
$$-2x_1-x_2+x_3=6$$

引入的变量 x_3,我们称之为松弛变量。

(2)约束条件为不等式。

当约束条件为"≤"时,在左边加上一个松弛变量,将不等式改为等式。

例如:

$$x_1-2x_2\leqslant 8$$
$$x_1-2x_2+x_3=8$$
$$x_3\geqslant 0$$

当约束条件为"≥"时,则在不等式左边减去一个松弛变量,将不等式改为等式。

例如:

$$x_1-2x_2\geqslant 8$$
$$x_1-2x_2-x_3=8$$
$$x_3\geqslant 0$$

(3)取值无约束的变量。

即可正可负,则可引入两个新变量 x',x'',令 $x=x'-x''$,其中 $x'\geqslant 0$,$x''\geqslant 0$,将其代入线性规划模型即可。

(4)$x\leqslant 0$ 的情况。

令 $x'=-x$,显然 $x'\geqslant 0$。

【例 1.1.3】将下列线性规划模型化为标准形式。

$$\min z=x_1-2x_2+3x_3$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3\leqslant 7\\ x_1-x_2+x_3\geqslant 2\\ -3x_1+x_2+2x_3=-5\\ x_1,x_2\geqslant 0\\ x_3\text{ 无约束}\end{cases}$$

解:令 $z'=-z=-x_1+2x_2-3x_3$,$x_3=x_4-x_5$,第一个约束条件左边加上松弛变量 x_6,第二个左边减去剩余变量 x_7,第三个两边同乘(−1),则得到标准形式

$$\max z'=-x_1+2x_2-3(x_4-x_5)+0\cdot x_6+0\cdot x_7$$
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_4-x_5+x_6=7\\ x_1-x_2+x_4-x_5-x_7=2\\ 3x_1-x_2-2x_3=5\\ x_{1-7}\geqslant 0\end{cases}$$

【例 1.1.4】央视为改版后的《非常 6+1》栏目播放两套宣传片。其中,宣传片甲播映时间为 3 分 30 秒,广告时间为 30 秒,收视观众为 60 万人;宣传片乙播映时间为 1 分钟,广告时间为 1 分钟,收视观众为 20 万人。广告公司规定每周至少有 3.5 分钟广告,而电视台每

周只能为该栏目宣传片提供不多于 16 分钟的节目时间。电视台每周应播映两套宣传片各多少次,才能使得收视观众最多?

分析:将已知数据列成表,如表 1-2 所示。

表 1-2　时间分配及要求

	播放片甲	播放片乙	节目要求	
片集时间(min)	3.5	1		≤16
广告时间(min)	0.5	1	≥3.5	
收视观众(万)	60	20		

解:设电视台每周应播放片甲 x 次,片乙 y 次,总收视观众为 z 万人。

$$\begin{cases} 4x+2y\leqslant 16 \\ 0.5x+y\geqslant 3.5 \\ x,y\in N \end{cases} \qquad z=60x+20y$$

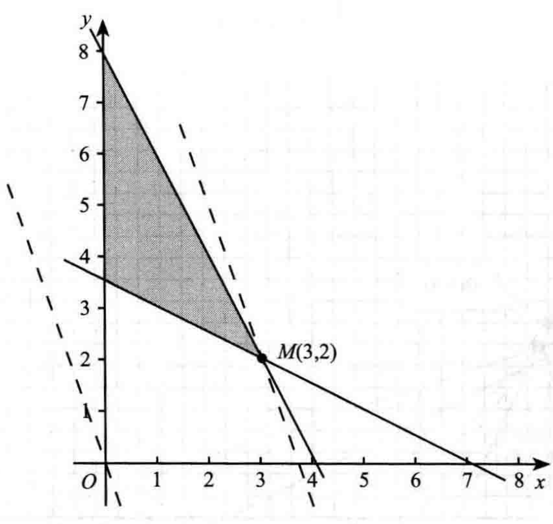

图 1-1　图解法示例

列约束条件时,要注意讲清 $x\in N, y\in N$。

列出了约束条件和目标函数后,应用问题转化为线性规划问题,可用图解法求解。

【例 1.1.5】某校高一(1)班举行元旦文艺晚会,布置会场要制作“中国结”。班长购买了甲、乙两种颜色不同的彩绳,把它们截成 A、B、C 三种规格。甲种彩绳每根 8 元,乙种彩绳每根 6 元,已知每根彩绳可同时截得三种规格彩绳的根数如表 1-3 所示。

表 1-3　三种规格彩绳的根数分配

规　格	A 规格	B 规格	C 规格
甲种彩绳	2	1	1
乙种彩绳	1	2	3

今需要 A、B、C 三种规格的彩绳各 15、18、27 根,问各截这两种彩绳多少根,可得所需三种规格彩绳且花费最少?

分析：将已知数据列成表，如表 1－4 所示。

表 1－4 三种规格彩绳的相关数据

规 格	甲种彩绳	乙种彩绳	所需条数
A 规格	2	1	15
B 规格	1	2	18
C 规格	1	3	27
彩绳单价	8	6	

解：设需购买甲种彩绳 x 根、乙种彩绳 y 根，共花费 z 元。则

$$\min z=8x+6y$$

$$\begin{cases}2x+y\geqslant 15\\ x+2y\geqslant 18\\ x+3y\geqslant 27\\ x,y\in N\end{cases}$$

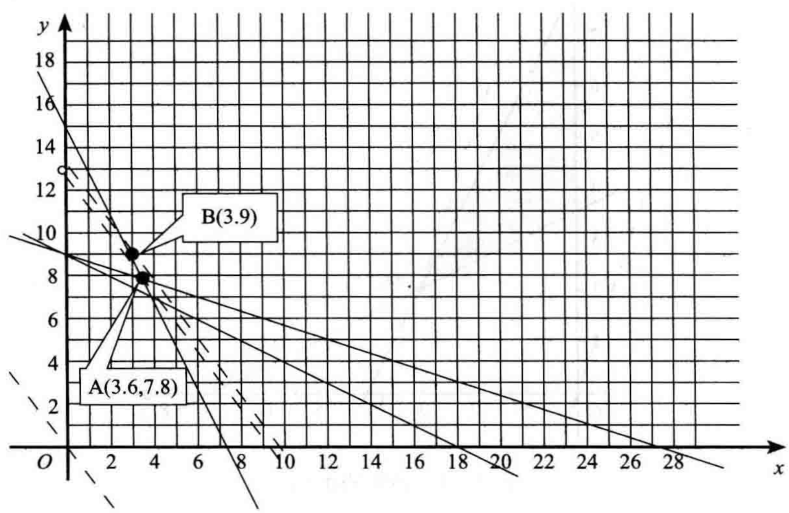

图 1－2 图解法示例

1.2 两个变量问题的图解法

图解法简单直观，对于两个变量的线性规划问题，可以通过在平面上作图的方法求解。而且可以从中得到有关线性规划问题的许多重要结论，有助于我们理解线性规划问题求解方法的基本原理。图解法虽然只能用来求解只具有两个变量的线性规划问题，但其解题思路和几何上直观得到的一些概念判断，对将要学习的单纯形法有很大启示。

命题 1 线性规划问题的可行解集是凸集。因为可行解集由线性不等式组的解构成，两个变量的线性规划问题的可行解集是平面上的凸多边形。

命题 2 线性规划问题的最优解一定在可行解集的某个极点上达到。

命题 3　当两个变量的线性规划问题的目标函数取不同的目标值时，构成一族平行直线，目标值的大小描述了直线离原点的远近。

于是穿过可行域的目标直线组中最远离(或接近)原点的直线所穿过的凸多边形的顶点，即为取得极值的极点——最优解。

图解法从集合论的角度形象化地介绍了线性规划问题解的关系，如图 1－3 所示。

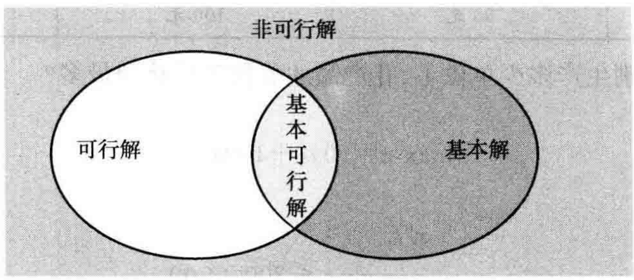

图 1－3　解的关系示意图

图解法的要求是：解两个变量的线性规划问题，在平面上画出可行域，计算目标函数在各极点处的值，经比较后，取最值点为最优解。

1. 线性规划图解法的基本步骤

(1)建立以 x_1，x_2 为坐标轴的直角坐标系，画出线性规划问题的可行域；

(2)求目标函数 $Z=c_1x_1+c_2x_2$ 的梯度 $\nabla Z=(c_1,c_2)$；

(3)任取等值线 $c_1x_1+c_2x_2=Z_0$，沿梯度 ∇Z 正方向平移(若是极小化问题，则沿负梯度方向 $-\nabla Z$ 平移)，求直线将离未离可行域时与可行域的交点；

(4)若交点存在，则该点坐标就是最优解。

【例 1.2.1】试用图解法求解下列线性规划问题。

$$\min Z=-3x_1-2x_2$$
$$\begin{cases}-2x_1+x_2\leqslant 2\\ x_1-3x_2\leqslant 3\\ x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

图解法解此题的主要过程如图 1－4 所示。

【例 1.2.2】某工厂在计划期内要安排Ⅰ、Ⅱ两种产品的生产，已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗、资源的限制，如表 1－5 所示。

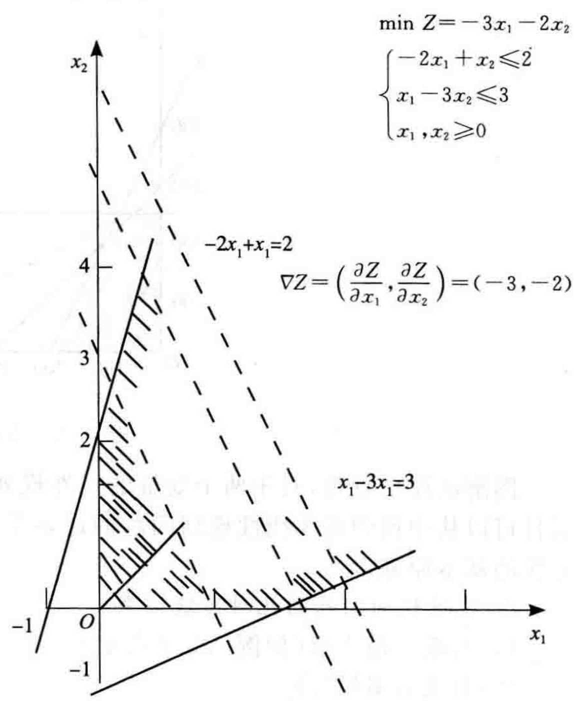

图 1－4　图解法示意图

表 1-5 A、B 两种原材料的相关数据表

	Ⅰ产品	Ⅱ产品	资源限制
设　备	1	1	300 台时
原料 A	2	1	400 千克
原料 B	0	1	250 千克
单位产品获利	50 元	100 元	

问题：工厂应分别生产多少单位Ⅰ、Ⅱ产品才能使工厂获利最多？

目标函数：

$$\max z = 50x_1 + 100x_2$$

约束条件：

$$\begin{aligned} s.t.\quad & x_1 + x_2 \leqslant 300 \quad (A) \\ & 2x_1 + x_2 \leqslant 400 \quad (B) \\ & x_2 \leqslant 250 \quad (C) \\ & x_1 \geqslant 0 \quad (D) \\ & x_2 \geqslant 0 \quad (E) \end{aligned}$$

利用图解法（如图 1-5 所示）得到最优解：$x_1=50, x_2=250$。

最优目标值 $z=27\ 500$。

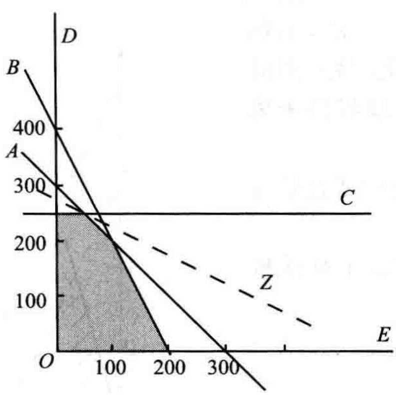

图 1-5　图解法示例

图解法简单直观，对于两个变量的线性规划问题，可以通过在平面上作图的方法求解。而且可以从中得到有关线性规划问题的许多重要结论，有助于我们理解线性规划问题求解方法的基本原理。

2. 线性规划问题的几种可能结果

(1)有唯一最优解（如例 1.2.2 所示）。

(2)有无穷多最优解。