高职基础课系列教材

经济应用数学学习指导

主编　高继文

中国科学技术大学出版社

经济应用数学学习指导

JINGJI YINGYONG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

主　编　高继文
副主编　訾化影　李　茂
编写人员（以姓氏笔画为序）
王祝园　文　平　杜　鹃
李　茂　张先平　高继文
訾化影

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书以国家教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》为依据，结合目前该门课程的实际教学情况编写，凝结了编写组教师的教学经验.本书与中国科学技术大学出版社出版的《经济应用数学》教材同步，共分11章，每章均由学习目标、知识脉络、重点和难点、疑难问题与分析、典型例题解析、同步习题及解答(附近几年专升本试题）6个部分组成.本书以基本题为主，侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练，突出重点，分析难点，既可以帮助学生解决教材中的一些重点难点问题，又能使学生学会举一反三、触类旁通，提高分析问题与解决问题的能力.

本书是经济应用数学学习指导书，可作为经济、管理和工程类专业高职学生的学习指导书或专升本的参考书，也可以作为相关课程教学人员的教学参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

经济应用数学学习指导/高继文主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-312-03293-6

Ⅰ. 经…　Ⅱ. 高…　Ⅲ. 经济数学　Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第177108号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　11
字数　216千
版次　2013年8月第1版
印次　2013年8月第1次印刷
定价　19.00元

前　言

“高等数学”是理工、经管类专业一门重要的基础课，它对学生综合素质的培养及后续课程的学习起着极其重要的作用. 随着科学技术的迅速发展，高职院校各个专业对数学的要求不断提高，数学日益渗透到了各个专业领域，已成为人们学习和研究各门专业知识的重要工具. 掌握好数学的基础知识、基本理论及基本技能和分析方法，对学生后续课程的学习有很大帮助. 同时，高等数学也是工科、经管类专业专升本入学考试的必考科目. 由于高等数学的内容繁多，习题浩如烟海，对于初学者来说有一定的难度. 为了克服这种困难，我们组织了具有丰富教学经验的教师，以国家教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》为参考依据，结合目前高职数学课程的实际教学情况，编写了《经济应用数学学习指导》一书. 本书将一些典型例题及解题方法与技巧融入其中，它将会成为学生学习“经济应用数学”的良师益友. 本书以基本题为主，侧重基本概念、基础知识和基本技能的训练，突出重点，分析难点，既可帮助学生解决教材中的一些难点内容，又能使学生学会举一反三、触类旁通，提高分析问题与解决问题的能力. 全书各章分为6个部分.

(1) 学习目标：根据教育部工科数学课程指导委员会制定的《高等数学课程教学的基本要求》，明确指出对各章教学内容的要求，使学生了解教学目标.

(2) 知识脉络：指出本章知识的结构和内在联系，以及与其他知识点的联系，同时指出本章要掌握的主要内容以及学习这些内容的方法.

(3) 重点和难点：给出该章的教学重点与难点.

(4) 疑难问题与分析：对学生在学习过程中遇到的疑难问题及常见错误用例题或问答方式进行分析和解答，以帮助学生加深对概念的理解和对运算方法的掌握.

(5) 典型例题解析：列举该章的重点题型，并归纳总结各种题型的解决方法、技巧和注意问题，以帮助学生提高分析问题和解决问题的能力.

(6) 同步习题及解答：每章最后都给出与教学内容同步的练习题及详细的解答，以帮助学生巩固内容，检查学习效果. 后附该章近几年专升本试题，供读者参考.

本书第1、2章由李茂编写，第3章由张先平编写，第4章由高继文编写，第5章由王祝园编写，第6、7章由訾化影编写，第8章由杜鹃编写，第9、10、11章由文平编写，全书由高继文统稿、修改、定稿. 另外，本书的编写工作得到了合肥财经职业学院教务处领导和中国科学技术大学出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，书中如有不妥之处，敬请专家、同行和读者批评指正，以便不断完善.

编　者

2013年4月

目　　录

第 1 章　极限与连续

1.1 学 习 目 标

(1) 理解函数的极限定义与连续定义及其性质；
(2) 掌握求极限的两个重要极限；
(3) 了解并会应用连续函数在闭区间上的性质.

1.2 知 识 脉 络

函数极限与连续

1. 函数极限定义
   - $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$；
   - $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$；$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$
2. 性质：唯一性、有界性、不等式性、保号性、四则运算
3. 判断函数极限存在的准则：夹逼定理，单调有界定理
4. 定理关系
   - 单侧极限与双侧极限
   - 函数极限与数列极限——归结原则
   - 函数极限无穷小
   - 无穷大与无穷小
5. 无穷小的阶：高阶、同阶、等价
6. 函数连续定义：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$
7. 间断分类
   - 第一类间断点：可去间断点，跳跃间断点
   - 第二类间断点
8. 闭区间上连续函数的性质：初等函数在其定义域内的闭区间上连续
   - 最大(小)值定理
   - 零值点定理(根的存在定理)
   - 介值定理

1.3 重点和难点

1. 重点

数列、函数的极限,无穷小量与无穷大量的概念,间断点的分类.

2. 难点

两个重要极限,连续性的概念,等价无穷小量替换.

1.4 疑难问题与分析

1.4.1 函数的复合运算

我们可以这样理解复合函数的概念:一个函数的自变量用另一个函数的因变量代替,就可能产生复合函数,例如在函数 $y=\lg x$ 中,用 $u=\varphi(x)=1-x^2$ 替换 x,即得

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]=\lg(1-x^2)$$

这里的函数 $y=\lg(1-x^2)$ 可以看成是由函数 $\lg x$ 和函数 $1-x^2$ 复合而成的.但是要注意,不是任何两个函数都可以构成复合函数的,例如,由 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 和 $\varphi(x)=1-x^2$ 就不能构成复合函数,因为 $f[\varphi(x)]=\sqrt{(1-x^2)-1}=\sqrt{-x^2}$,而负数“$-x^2$”开方是没有意义的.

复合函数的复合环节可以多于两个,例如,$y=u^2,u=\sin v,v=1-2x$ 可复合为函数.通过课程的学习我们知道,由若干个简单函数,经过有限次的四则运算和复合步骤可以产生许许多多的函数——初等函数.反过来,对于一个比较复杂的函数,在对它进行研究时,常常要将其分解成若干个组成它的函数.例如

$$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

可以分解为 $y=\ln u,u=x+\sqrt{v},v=1+x^2$.

1.4.2 极限的定义

极限概念作为微积分的基础,在高等数学中占有很重要的地位,本章中连续性

的概念和第2章中导数的概念都是用极限来定义的. 在我们的课程中对于极限概念只要求从几何上的直观描述来理解，即极限是描述函数在自变量的某个变化过程中，函数和某一个确定的常数无限地靠近，而且要多近就有多近.

理解极限的定义要弄清楚，函数在自变量的某个变化过程中，是否有极限存在决定于在自变量的这个变化过程中函数是否有固定的变化趋势，而且这个变化趋势与自变量的变化趋势和求极限的函数有关，而与函数在该点处是否有定义无关. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad （第一个重要极限）$$

其中函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义. 又如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

即当 $x\to\infty$ 时，为无穷小量乘以有界变量等于无穷小量.

注意到这个极限式中的函数与前式相同，但自变量的变化趋势不同，则极限不同.

在极限概念中，我们介绍了七种极限形式.

数列极限：

$$x_n\to A \quad (n\to\infty)$$

函数极限：

$$f(x)\to A \quad (x\to\infty)$$
$$f(x)\to A \quad (x\to+\infty)$$
$$f(x)\to A \quad (x\to-\infty)$$
$$f(x)\to A \quad (x\to x_0)$$

左、右极限：

$$f(x)\to L \quad (x\to x_0^-)$$
$$f(x)\to R \quad (x\to x_0^+)$$

且有结论：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \iff \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A$$

由于极限是一个局部概念，函数在某点处是否有极限决定于在该点附近的函数值，因此对于分段函数在分段点处的极限问题必须考虑其左、右极限.

1.4.3　函数的连续性

根据连续性的定义，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是，函数 $f(x)$

在点 x_0 处同时满足下列三个条件：

(1) $f(x)$在点 x_0 处有定义；

(2) $f(x)$在点 x_0 处有极限；

(3) $f(x)$在点 x_0 处的极限值为该点处的函数值，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

上述三个条件之一不满足，则 $f(x)$在点 x_0 处间断.

连续函数的曲线是一笔画成的，如果函数在某处发生间断，则函数的曲线一定在此处断开.

1.5 典型例题解析

1.5.1 函数的复合运算

例 1.1 将下列函数分解为基本初等函数的四则运算或复合运算：

(1) $y=\tan\sqrt{2^x-1}$；　　(2) $y=e^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sin x^2$.

分析 任意一个初等函数都可以分解为基本初等函数的四则运算或复合运算. 分解的方法是从最外层开始，如果是四则运算就将运算的每一项设为中间变量，然后再考察每个中间变量；若不是四则运算，则一定是某一类基本初等函数，此时将这个基本初等函数的自变量位置上的表达式设为一个中间变量，然后再考察这个中间变量. 将这个方法向内层反复使用.

解 (1) $y=\tan u, u=\sqrt{v}, v=2^x-1$.

(2) $y=e^u\cdot\sin v, u=\sqrt{w}, w=x^2+1, v=x^2$.

1.5.2 求函数极限的方法

1. 利用极限存在的充分必要条件求极限

例 1.2 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x^2-4}$；

(2) $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}+a, & x<0 \\ 1+x^2, & x>0 \end{cases}$，当 a 为何值时，$f(x)$在 $x=0$ 处的极限存在？

解　(1)

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2-x}{(x-2)(x+2)}=-\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{4}$$

因为左极限不等于右极限,所以极限不存在.

(2) 由于函数在分段点 $x=0$ 处,两边的表达式不同,因此一般要考虑在分段点 $x=0$ 处的左极限与右极限. 于是,有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}+a\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0^-}a=a$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(1+x^2)=1$$

为使 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在,必须有

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)$$

因此,当 $a=1$ 时,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

小结　对于求含有绝对值的函数及分段函数分界点处的极限,要用左右极限来求,只有左右极限存在且相等时极限才存在,否则,极限不存在.

2. 利用极限运算法则求极限

例 1.3　求下列函数的极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3}{x+1}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}\right)$;　　(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{5x}-1}{\sqrt{x+2}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3}{x+1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=-\dfrac{1}{2}$.

(2) 当 $x\to 3$ 时,分子、分母极限均为零,呈现 $\dfrac{0}{0}$ 型,不能直接用商的极限法则,可先分解因式,约去使分子、分母为零的公因子,再用商的运算法则. 于是

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=6$$

(3) 当 $x\to 1$ 时,$\dfrac{2}{1-x^2}$,$\dfrac{1}{1-x}$ 的极限均不存在,式 $\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{1}{1-x}$ 呈现 $\infty-\infty$ 型,不能直接用"差的极限等于极限的差"的运算法则,可先进行通分化简,再用商的运算法则. 于是

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2-(1+x)}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}$$

(4) 当 $x\to+\infty$时，分子、分母均无极限，呈现$\frac{\infty}{\infty}$形式. 需分子、分母同时除以$\sqrt{x}$，将无穷大的$\sqrt{x}$约去，再用法则求. 于是

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5x}-1}{\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\sqrt{5}$$

小结 （Ⅰ）应用极限运算法则求极限时，必须注意每项极限都存在（对于除法，分母极限不为零）才能适用.

（Ⅱ）求函数极限时，经常出现$\frac{0}{0}$，$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$等情况，都不能直接运用极限运算法则，必须对原式进行恒等变换、化简，然后再求极限. 常使用的有以下几种方法.

（ⅰ）对于$\infty-\infty$型，往往需要先通分，化简，再求极限；

（ⅱ）对于无理分式，分子、分母有理化，消去公因式，再求极限；

（ⅲ）对分子、分母进行因式分解，再求极限；

（ⅳ）对于当 $x\to\infty$时的$\frac{\infty}{\infty}$型，可将分子、分母同时除以分母的最高次幂，然后再求极限.

3. 利用无穷小的性质求极限

例 1.4 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}$； (2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^3}}$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，而$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)\neq 0$，求该式的极限需用无穷小与无穷大关系定理解决. 因为$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+1}=0$，所以当 $x\to 1$ 时，$\frac{x-1}{x^2+1}$是无穷小量，因而它的倒数是无穷大量，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1}=\infty$$

(2) 不能直接运用极限运算法则，因为当 $x\to+\infty$时分子极限不存在，但 $\sin x$ 是有界函数，即$|\sin x|\leqslant 1$ 而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+1}}=0$$

因此当$x\to+\infty$时，$\dfrac{x}{\sqrt{1+x^3}}$为无穷小量. 根据有界函数与无穷小乘积仍为无穷小定理，即得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+x^3}}=0$$

小结　利用无穷小与无穷大的关系，可求一类函数的极限(分母极限为零，而分子极限存在且不为0的函数极限)；利用有界函数与无穷小的乘积仍为无穷小定理可得一类函数的极限(有界量与无穷小之积的函数极限).

4. 利用两个重要极限求函数的极限

例1.5　求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

解　(1) 分子先用和差化积公式变形，然后再用重要极限公式求极限. 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\sin 2x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\left(4\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\right)=1\times4=4\end{aligned}$$

(2) **解一**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\cdot\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-1}=1\end{aligned}$$

解二

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{-x^2}\right]^{-\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1$$

小结　(Ⅰ) 利用$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$求极限时，函数的特点是$\dfrac{0}{0}$型，满足$\lim\limits_{u(x)\to0}\dfrac{\sin u(x)}{u(x)}$的形式，其中$u(x)$为同一变量；

(Ⅱ) 用$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$求极限时，函数的特点是$1^\infty$型幂指函数，其形式为$[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}$型，$\alpha(x)$为无穷小量，而指数为无穷大，两者恰好互为倒数；

(Ⅲ) 用两个重要极限公式求极限时，往往用三角公式或代数公式进行恒等变形或作变量代换，使之成为重要极限的标准形式.

5. 利用等价无穷小代换求极限

常用等价无穷小有($x\to0$)：

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1$$

$$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,\quad 2x \sim \sin 2x \sim \tan 2x$$

例 1.6 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$ $\left(x\to 0, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2\right)$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$ ($x\to 0$, $\tan x\sim x$).

小结 利用等价无穷小可代换整个分子或分母，也可代换分子或分母中的因式，但当分子或分母为多项式时，一般不能代换其中一项. 否则会出错.

如上题 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，即得错误结果.

6. 利用函数的连续性求极限

例 1.7 求下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$； (2) $\lim\limits_{x\to +\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 (1) 因为 $\dfrac{x^2+\sin x}{e^x\sqrt{1+x^2}}$ 是初等函数，在 $x=2$ 处有定义，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+\sin x}{e^2\sqrt{1+x^2}}=\frac{4+\sin 2}{e^2\sqrt{5}}$$

(2) 函数 $\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)$ 可看成由 $y=\sin u$，$u=\sqrt{x^2+x}-x$ 复合而成，利用分子有理化，得

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

然后利用复合函数求极限的法则来运算，得

$$\lim_{x\to+\infty}\arcsin(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$=\arcsin\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}$$

$$=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$$

小结　利用"连续函数的极限值即为函数值"可求连续函数的极限. 求一定条件下复合函数的极限时,极限符号与函数符号可交换次序.

1.5.3　函数连续性

例 1.8　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解　由于函数在分段点 $x=0$ 处两边的表达式不同,因此,一般要考虑在分段点 $x=0$ 处的左极限与右极限. 因而有

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x=0,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x}=0$$

而 $f(0)=0$,即

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=0$$

由函数在一点连续的充要条件知 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

例 1.9　设 $f(x)=\begin{cases}(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,求常数 a.

解　由于

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=a,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=e^{-1}$$

由 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续得

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$$

故 $a=e^{-1}$.

例 1.10　讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x-1, & 0\leqslant x<1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=0$ 及 $x=1$ 处的连续性. 若间断,指出间断点的类型.

解　因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1,\quad \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x-1)=-1$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$的跳跃间断点,属于第一类.

因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x-1)=0,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)=0$$