高等院校“十三五”规划教材

经济数学

Economic Mathematics

主编　刘家春　杨德彬

南京大学出版社

高等院校“十三五”规划教材

经济数学

Economic Mathematics

主　编　刘家春　杨德彬

副主编　张志维　关　明

编　者　王　双　张晓楠　于佳彤

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学 / 刘家春，杨德彬主编. -- 南京 ：南京大学出版社，2016.7

高等院校"十三五"规划教材

ISBN 978-7-305-17099-7

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①刘… ②杨… Ⅲ. ①经济数学一高等学校一教材 Ⅳ. ①F224

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 132085 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

丛 书 名 高等院校"十三五"规划教材
书　　名 经济数学
主　　编 刘家春　杨德彬
责任编辑 刘　洋　耿士祥　　编辑热线 025-83592146

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京新洲印刷有限公司
开　　本 787×960　1/16　印张 12　字数 207 千
版　　次 2016 年 7 月第 1 版　2016 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-17099-7
定　　价 28.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

前　言

应用型教育是高等教育的重要组成部分，其目的是为国家现代化建设培养高层次应用型人才. 随着高校转型发展的不断深入，应用型教育发挥着越来越重要的作用. 经济数学不仅是应用型院校经济和管理类专业的核心课程之一，也是一门解决实际问题和广泛应用的基础学科，它对于培养学生的逻辑思维能力、分析问题和解决问题的能力以及提高综合素质都有很大帮助.

本书是在充分研究当前我国应用型人才培养发展的需要的基础上，按照经济管理类各专业的教学要求和教学特点编写而成. 根据我们多年教学工作的体会和教学实践，以满足应用型院校经济管理类专业经济数学教学需要为目标，在尊重数学的完整性和系统性的前提下，对部分内容做了删减，减少了一些定理的证明和推导过程，从而适当降低了难度，并对有些问题进行了处理(如极限的定义用了定性的描述). 本书以实例引入概念、讲解理论，用理论知识解决实际问题；精选例题和习题，注重贯彻由浅入深的教学原则；注重数学概念与实际问题的联系，特别是与经济问题的联系，注意讲清用数学知识解决经济问题的基本思想和方法. 本书符合认知规律，语言浅显易懂、易于理解、方便自学，富有启发性，有利于激发学生学习兴趣及各种能力的培养. 根据各校教学的区别，个别内容加了“*”号，以便于教师在教学中进行取舍.

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用，共六章. 本书第一章、第二章、第三章由杨德彬编写，第四章由张志维编写，第五章、第六章由刘家春编写. 书中习题答案及部分图表由王双、关明、张晓楠、于佳彤等协助完成. 全书由刘家春统稿. 书后附有习题答案与提示. 本书适用于应用型院校经济管理类专业.

鉴于我们的经验和水平有限，书中难免有不足之处，恳请同仁和广大读者给予批评指正，以便我们进一步修改完善.

编　者

2016 年 5 月

目　录

第一章　函　数 …… 1

第一节　函数 …… 1

第二节　函数的性质 …… 7

第三节　初等函数 …… 10

第四节　常用经济函数简介 …… 16

总习题一 …… 21

第二章　极限与连续 …… 22

第一节　极限的概念 …… 22

第二节　无穷小量与无穷大量 …… 28

第三节　极限的运算法则 …… 31

第四节　极限存在准则与两个重要极限 …… 35

第五节　无穷小的比较 …… 44

第六节　函数的连续与间断 …… 46

总习题二 …… 53

第三章　导数与微分 …… 55

第一节　导数的概念 …… 55

第二节　函数的求导法则 …… 63

第三节　复杂函数的求导法则 …… 70

第四节　高阶导数 …… 74

第五节　函数的微分 …… 77

总习题三 …… 83

第四章　中值定理与导数的应用 …… 85

第一节　微分中值定理 …… 85

第二节　洛必达法则 …… 89

第三节　函数的单调性与函数图形的凹凸性 …… 94

第四节　函数的极值与最值 …… 99

*第五节　函数图像的描绘 …… 104

第六节　导数在经济中的应用…………………………………………………… 108
*第七节　泰勒公式　…………………………………………………………… 112
总习题四……………………………………………………………………… 116
第五章　不定积分………………………………………………………… 118
第一节　不定积分的概念与性质……………………………………………… 118
第二节　换元积分法…………………………………………………………… 124
第三节　分部积分法…………………………………………………………… 132
*第四节　几种特殊类型函数的积分　………………………………………… 136
总习题五……………………………………………………………………… 139
第六章　定积分及其应用………………………………………………… 141
第一节　定积分的概念和性质………………………………………………… 141
第二节　微积分基本公式……………………………………………………… 146
第三节　定积分的计算方法…………………………………………………… 150
第四节　广义积分……………………………………………………………… 156
*第五节　定积分的几何应用　………………………………………………… 159
第六节　定积分在经济上的应用……………………………………………… 169
总习题六……………………………………………………………………… 172
课后习题答案……………………………………………………………… 175

第一章　函　数

本章难题详解

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分学的主要研究对象. 所谓函数关系就是变量之间的关系，而极限方法是研究变量的一种基本方法，连续性又是函数的重要性质之一. 本章将介绍函数基本知识和它们的一些性质，为今后的学习打下必要的基础.

第一节　函　数

一、区间和邻域

1. 区间(Interval)

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$. 数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为**开区间**(Open Interval)，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

数集

$$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**(Closed Interval)，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

类似的还有，

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$和$(a,b]$都称为**半开半闭区间**(Semi-open Interval or Semi-closed Interval).

以上所述都是有限区间，除此之外，还有无限区间，例如：

$$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\},$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}.$$

注：其中$-\infty$和$+\infty$，分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们不是数，仅

仅是记号,因此,不能参与数的运算.全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也记作$(-\infty,+\infty)$,它也是无限的开区间.以后如果遇到所作的论述对不同类型的区间(有限的,无限的,开的,闭的,半开的)都适用,为了避免重复,就用“区间 I”代表各种类型的区间.

2. 邻域(Neighborhood)

以点 a 为中心的任何开区间称为**点 a 的邻域**,记作 $U(a)$.

设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$.满足不等式$\{x\mid |x-a|<\delta\}$的实数 x 的全体称为**点 a 的 δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

其中点 a 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**.

因为$|x-a|<\delta$ 相当于$-\delta<x-a<\delta$,即

$$a-\delta<x<a+\delta,$$

所以

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此看出,$U(a,\delta)$也就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$,这个开区间以点 a 为中心,而长度为 2δ.

在数轴上,$|x-a|$表示点 x 与点 a 之间的距离.因此,点 a 的 δ 邻域

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

在数轴上表示与点 a 距离小于 δ 的点 x 的全体,这正是开区间$(a-\delta,a+\delta)$(如图 1-1-1).

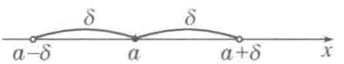

图 1-1-1

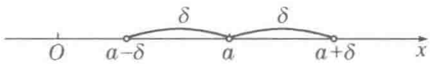

图 1-1-2

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的**去心的 δ 邻域**,记作$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},$$

这里 $0<|x-a|$就表示 $x\neq a$(如图 1-1-2).

二、函数的概念

1. 函数的定义

简单地说,函数是变量间的一种单值对应关系(或对应法则).具体有如下定义.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个非空数集.如果按照某个法则

f，对于每个数 $x\in D$，变量 y 都有唯一确定的值和它相对应，则称 y 是 x 的**函数**(Function). 数集 D 称为这个函数的**定义域**(Domain). 通常 x 称为**自变量**(Independent Variable)，y 称为**因变量**(Dependent Variable)，当 x 取遍定义域 D 中的所有数值时，对应的全体函数值所组成的集合 $W=\{y|y=f(x), x\in D\}$称为函数的**值域**(Range).

按照上述定义，记号 f 和 $f(x)$的含义是有区别的：前者表示自变量 x 与因变量 y 之间的函数关系，而后者表示与自变量 x 对应的函数值，习惯上常用记号 $f(x)$或 $y=f(x)$来表示函数.

函数的记号 f 也可改用其他字母来表示，例如 φ, F 等. 相应的函数可记作 $y=\varphi(x)$，$y=F(x)$等. 有时还可以直接利用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$. 这时字母 y 既表示因变量，又表示函数.

从函数定义上看，函数概念有三要素：定义域、对应法则和值域. 如果两个函数三要素对应相同，那么这两个函数就是相同的函数；否则就是不同的. 实际上两个函数只要定义域和对应法则相同，则值域一定相同，所以有时也称函数概念有两要素：定义域和对应法则.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 例如，圆面积公式 $A=\pi r^2$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$；某天一昼夜温度 T 随时间 t 变化的规律 $T=T(t)$的定义域 $D=[0,24]$.

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数. 这时我们约定：函数的定义域就是自变量所能取的使算式有意义的一切实数所组成的集合(这样约定的定义域有时也称为函数的**自然定义域**).

例 1　判别下列每组函数是否为同一个函数.

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$；

(2) $f(x)=\ln(x^2)$ 与 $g(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=1+\cos 2x$ 与 $g(x)=2\cos^2 x$.

解　(1) 由于函数 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $g(x)=1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$ 不是同一函数；

(2) 由于函数 $f(x)=\ln(x^2)$的定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而函数 $g(x)=2\ln x$ 的定义域 $D=(0,+\infty)$，所以 $f(x)=\ln(x^2)$与 $g(x)=2\ln x$ 不是同一函数；

(3) 由于两个函数的定义域和值域都相同，所以 $f(x)=1+\cos 2x$ 与

$g(x)=2\cos^2 x$ 是同一函数.

例 2 确定函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-1)}$ 的定义域.

解 要使函数有意义,则要求 $\begin{cases}3x-1>0,\\3x-1\neq 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x>\dfrac{1}{3},\\x\neq\dfrac{2}{3},\end{cases}$ 所以函数定义域

$$D=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right).$$

函数的表示方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).

表格法:将一系列的自变量值与对应的函数值列成表来表示函数关系的方法即表格法. 例:在实际应用中,我们经常会用到的平方表、三角函数表等都是用表格法表示的函数.

图形法:用坐标平面上的曲线来表示函数的方法即图形法. 一般用横坐标表示自变量,纵坐标表示因变量. 在平面直角坐标系 xOy 中,点集

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的**图形**(如图 1-1-3). 如在直角坐标系中,半径为 r、圆心在原点的圆用图形法表示为(如图 1-1-4):

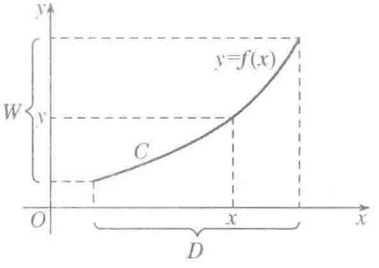

图 1-1-3

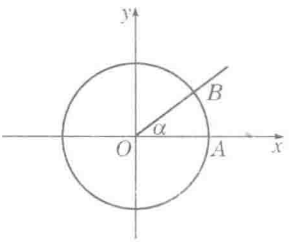

图 1-1-4

解析法(公式法):用数学式子表示自变量和因变量之间的对应关系的方法即解析法. 根据函数的解析表达式的形式不同,函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种.

2. 分段函数

有些函数在其定义域内无法用一个统一的表达式来表示,而是随自变量的取值范围不同而采用不同的表达式来表示,这种形式的函数称为**分段函数**(Piecewise Function).

注:1. 虽然分段函数用几个式子表达,但它表示的是一个函数而不是几个函数.

2. 分段函数的定义域是各段定义域的并集.

以下给出几个分段函数的例子.

例 3　绝对值函数(Absolute Function)

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,图形如图 1-1-5 所示.

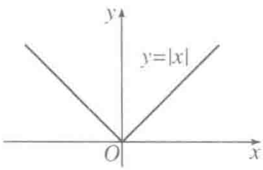

图 1-1-5

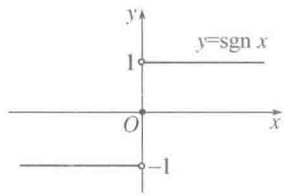

图 1-1-6

例 4　符号函数(Sign Function)

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$. 图形如图 1-1-6 所示.

例 5　取整函数(Integer Part Function)

$$y=\operatorname{int}x=[x],$$

其中,$[x]$表示不超过 x 的最大整数,如$[\pi]=3$,$[-3.2]=-4$,$[\sqrt{3}]=1$,易见,取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=Z$. 图形如图 1-1-7 所示.

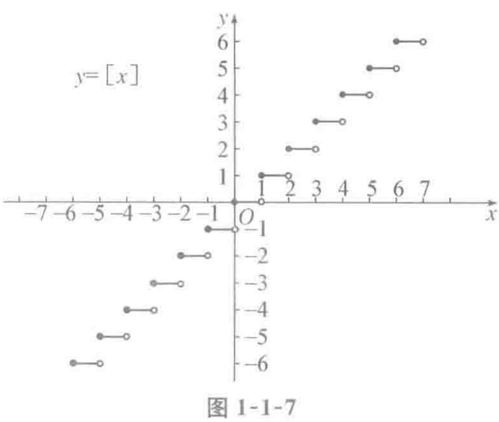

图 1-1-7

例 6 狄利克雷函数(Dirichlet Function)

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时}.\end{cases}$$

易见,狄利克雷函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{0,1\}$,但没有直观的图形表示.

3. 隐函数

常见的函数都是 $y=f(x)$的形式,即 y 是由 x 的表达式来表示的.这种形式的函数称为**显函数**(Explicit Function).

如果将 $y=f(x)$看作一个含有两个变量的二元方程 $y-f(x)=0$,那么对任意的 x,按照“使方程成立”这一规则,有唯一 y 与之对应,因此,这个方程就确定了一个函数.

这种由二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 称为隐函数(Implicit Function).亦即“函数 $y=f(x)$‘隐藏’在方程 $F(x,y)=0$ 中”之意.

例如,$y=3x^3+2x+1$ 为显函数;而方程 $x^2+e^{xy}=1$ 确定的一个函数 $y=f(x)$为隐函数.

注:1. 有时一个隐函数可以显化为显函数,称之为隐函数的显化.

2. 关于隐函数的存在性,有相关的定理做基础,此处不再叙述.

4. 建立应用问题的函数举例

利用相关的数学知识解决实际问题时,首先需要将实际问题转化为数学问题,建立函数关系式,然后才能进行分析和计算.因此,在实际应用中建立函数关系式是十分重要的.

例 7 某公司生产一种设备,每年的总产量为 a 台,分成若干批生产,每一批的生产准备费为 b 元.设产品均匀投放市场(即常年平均库存量保持为每一批产量的一半),且库存费用为 c 元/(年·台).试求一年中总费用(库存费与生产准备费的总和)与每一批的产量间的函数关系.

解 显然,每批产量大,则库存费高,反之,每批产量小,则批数多,生产准备费增加.

设每一批的产量为 x,则每年的总批数为$\dfrac{a}{x}$,库存量为$\dfrac{x}{2}$.故总费用

$$f(x)=b\cdot\frac{a}{x}+c\cdot\frac{x}{2}=\frac{ab}{x}+\frac{cx}{2},x\in(0,a].$$

在实际中,产量 x 为一个 0 到 a 之间的整数,批数应调整为一个整数.

例 8 某市出租车按如下规定收费:当行驶里程不超过 3 公里时,一律收

起步费 8 元;当行驶里程超过 3 公里时,除起步费外,超出部分按每 600 米 1 元计费. 试建立车费 y 元与行驶里程 x 公里之间的函数关系.

解　根据题意可列出函数关系如下:

$$y=\begin{cases}8, & 0<x\leqslant 3,\\ 8+\frac{5}{3}(x-3), & x>3,\end{cases}\quad 即\ y=\begin{cases}8, & 0<x\leqslant 3,\\ \frac{5}{3}x+3, & x>3.\end{cases}$$

习题 1－1

1. 求下列函数的自然定义域.

(1) $y=\sqrt{x^2-9}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

(3) $y=\arcsin(x-5)$;　　(4) $y=\ln(x^2-1)$.

2. 判断下列函数是否为相同函数,为什么?

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(2) $f(x)=|x|, g(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

(3) $f(x)=x+1, g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

(4) $f(x)=2\sin x, g(x)=\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\leqslant -1,\\ \sqrt{1+x^2}, & -1<x\leqslant 1,\\ 0, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(-2), f(0), f(2)$.

4. 设 $f(x)=2x-3$,求 $f[f(a)]$.

5. 设 $f(x-1)=x^2$,求 $f(x)$.

第二节　函数的性质

为了研究函数的变化规律,还需要了解函数及其图像的一些特性. 下面是某些函数可能具有的几个性质.

一、函数的单调性

设函数的定义域为 D,如果对于区间 $I(I\subset D)$内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<$

x_2 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调增加**的(Increased Function);如果对于区间 $I(I\subset D)$ 内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是**单调减少**的(Decreased Function).

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的,在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的;在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的(如图 1-2-1).而在 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^3$ 是单调增加的(如图 1-2-2).

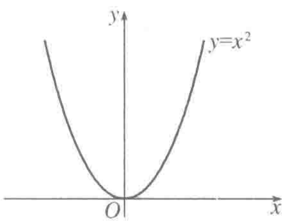

图 1-2-1

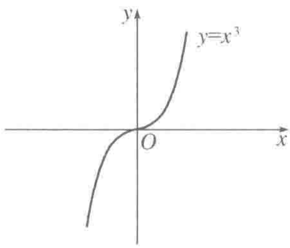

图 1-2-2

二、函数的奇偶性

设函数的定义域为 D,D 关于原点对称(即若 $x\in D$,则必有 $-x\in D$).如果对于任一 $x\in D$,$f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**奇函数**(Odd Function);如果对于任一 $x\in D$,$f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为**偶函数**(Even Function).

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,$f(x)=x^3$ 是奇函数,而 $f(x)=\sin x+\cos x$ 是非奇非偶函数.

注:偶函数的图形关于 y 轴对称(如图 1-2-3),奇函数的图形关于原点对称(如图 1-2-4).

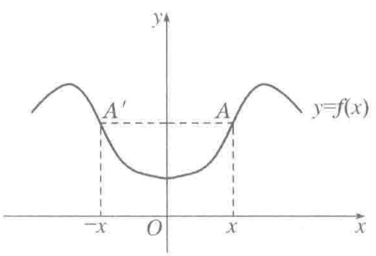

图 1-2-3

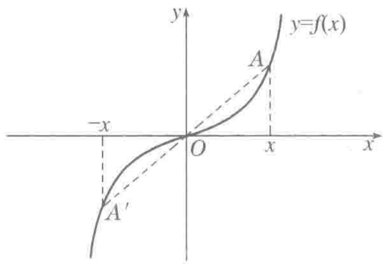

图 1-2-4

三、函数的周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在一个不为零的数 T，使得对于定义域内任何 x 值，$x+T$ 仍在定义域内，且关系式 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则 $f(x)$ 称为**周期函数**(Periodic Function)，T 称为 $f(x)$ 的**周期**(Period). 通常周期函数的周期是指**最小正周期**(Minimal Positive Period)，但并非每个周期函数都有最小正周期.

例如：函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数；常函数 $y=c$ 是一个周期函数，任何正有理数都是它的周期，因为不存在最小的正有理数，所以它没有最小正周期，狄利克雷函数亦如此.

根据周期函数的图形的特点，只要作出函数在长度为周期 T 的一个区间上的图形，就可通过图形的平移画出整个函数的图形.

四、函数的有界性

设函数的定义域为 D，数集 $X\subset D$，如果存在正数 M，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**(Bounded)，或称 $f(x)$ 是 X 上的有界函数. 每一个具有上述性质的正数 M，都是该函数的界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**(Unbounded).

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为无论 x 取任何实数，$|\sin x|\leqslant 1$ 都成立. 这里 $M=1$(当然也可取大于 1 的任何数作为 M，而 $|\sin x|\leqslant M$ 成立)；函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对于 $(0,1)$ 内的一切 x 都成立. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，取 $M=1$，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$ 对于区间 $(1,2)$ 内的一切 x 值都成立.

习题 1－2

1. 判断下列函数的单调性.

(1) $y=10^x$；　　(2) $y=2x+\ln x$.

2. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$；　　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $f(x)=x\cos x$；　　(4) $y=e^{|x|}$；

(5) $f(x)=e^x+1$;　　　　(6) $y=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0,\\ 2+x, x>0.\end{cases}$

第三节　初等函数

一、反函数与复合函数

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域是数集 D，值域是数集 W. 若对每一个 $y\in W$，都有唯一的 $x\in D$ 适合关系 $f(x)=y$，那么就把此 x 值作为取定的 y 值的对应值，从而得到一个定义在 W 上的新函数，这个新函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$. 这个函数的定义域为 W，值域为 D，相应于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 来说，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

我们可以用示意图（如图 1-3-1）把 f 和 f^{-1} 的关系形象地表示出来. 在函数式 $x=f^{-1}(y)$ 中，字母 y 表示自变量，字母 x 表示因变量. 但习惯上用 x 表示自变量，而用 y 表示因变量，因此，常把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.

例如，函数 $y=\sqrt{x-1}(x\geqslant 1)$ 的反函数是 $x=y^2+1(y\geqslant 0)$，可改写为 $y=x^2+1(x\geqslant 0)$.

注： 函数 $y=f(x)$ 的图形与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的. 例如指数函数 $y=e^x$ 和它的反函数对数函数 $y=\ln x$ 的图形关于直线 $y=x$ 是对称的（如图 1-3-2）.

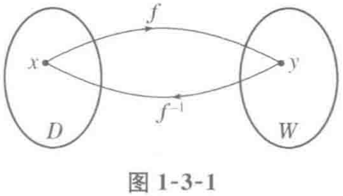

图 1-3-1

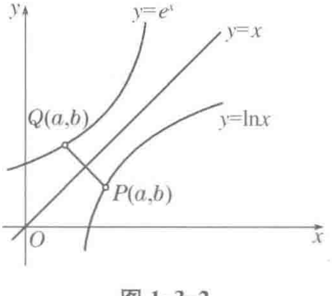

图 1-3-2

下面来讨论什么样的函数存在反函数？先看例子，设函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$，由此式解出 x，得到 $x=\pm\sqrt{y}(y\geqslant 0)$. 这就表明，对于每个 $y>0$，x 有两个不同的对应值 $\pm\sqrt{y}$，x 的值并不唯一确定. 因此，按照反函数的定义，函数 $y=x^2$

$(x\in\mathbf{R})$不存在反函数，但如果考虑函数 $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$，可解得 $x=\sqrt{y}(y\geqslant 0)$，这时对于每个 $y\geqslant 0$，有唯一确定的值$\sqrt{y}$与之对应. 因此，函数 $y=x^2$ $(x\geqslant 0)$存在反函数 $x=\sqrt{y}(y\geqslant 0)$（或写成 $y=\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$），此时函数 $y=x^2(x\geqslant 0)$在其定义域 $D=[0,+\infty)$上是单调（增加）的，而函数 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$在其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$上不是单调的（如图 1-3-3）.

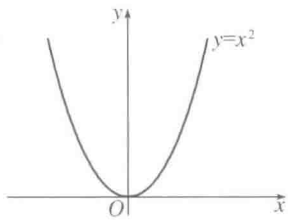

图 1-3-3

一般地，有如下的关于反函数存在性的充分条件：若函数 $y=f(x)$定义在某个区间 I 上并在该区间上单调（增加或减少），则它必存在反函数.

例 9　求函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$的反函数.

解　第一步　反解，由 $y=\dfrac{x}{1+x}$，解得 $x=\dfrac{y}{1-y}$，

第二步　互换，$y=\dfrac{x}{1-x}$，

第三步　写定义域，$(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 1)$.

注：定义域从原函数的值域中获得.

2. 复合函数

先举一个例子. 设 $y=\sqrt{u}$，$u=1+x^2$，

将 $u=1+x^2$ 代入第一式，得 $y=\sqrt{1+x^2}$. 称函数 $y=\sqrt{1+x^2}$是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1+x^2$ 复合而成的**复合函数**.

一般地，设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，而函数 $u=\varphi(x)$的值域为 W_φ，若 $D_f\cap W_\varphi\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的**复合函数**（Composite Function），其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，u 称为**中间变量**（Intermediate Variable）.

注：(1) 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数.

例如，$y=\lg u$，$u=\cos x-1$，因前者定义域 $D_f=(0,+\infty)$，而后者值域 $W_\varphi=[-2,0]$，显然 $D_f\cap W_\varphi=\varnothing$，故这两个函数不能复合成复合函数.

(2) 复合函数可以由两个以上的函数经过复合而成.

例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\cos\nu$，$\nu=\dfrac{x}{2}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\cos\dfrac{x}{2}}$，这里 u 及 ν 都是中间变量.