普通高等教育“十二五”规划教材
经济数学基础丛书

线性代数及其应用

(第二版)

刘吉定　罗　进　刘任河　主　编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十二五”规划教材

经济数学基础丛书

线性代数及其应用

（第二版）

刘吉定　罗　进　刘任河　主编

科学出版社

北　京

内容简介

线性代数是大学理工科和经管类学生的必修课程，在培养学生的计算能力和抽象思维能力方面起着非常重要的作用. 本书以线性方程组为出发点，逐步展开论述矩阵、行列式、向量组及其相关性等概念，并引入许多实例供读者了解线性代数在实际应用中的独特作用，每章后还附有 MATLAB 实验，供读者学习使用数学软件解决线性代数问题.

本书为高等学校理工科和经管类各专业线性代数课程教材，同时也可供教师、考研人员及工程技术人员参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数及其应用/刘吉定，罗进，刘任河主编. —2 版—北京：科学出版社，2016

（经济数学基础丛书）

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-049051-3

Ⅰ.①线… Ⅱ.①刘… ②罗… ③刘… Ⅲ.③线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 141747 号

责任编辑：王雨舸 / 责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超 / 封面设计：蓝　正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：B5（720×1000）

2016 年 6 月第　二　版　印张：13 1/2

2016 年 6 月第一次印刷　字数：270 000

定价：33.80 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版前言

本书是在《线性代数及其应用》(经管类)的基础上修订而成. 从第一版教材使用的反馈情况来看,普遍认为本教材具有通过逐步剖析实例而引入线性代数基本原理的特点,注重引导学生在应用的背景下,逐步掌握基本概念,学会使用这些理论解决实际问题,没有过分强调抽象而严格的逻辑体系,也不过分追求计算技巧,而是通过对 MATLAB 计算方法的掌握达到实用的计算目的. 因此,本版内容与结构体系,较第一版未作大的变更,此次修订,在内容上,将数学与经济学更加融为一体,更面向开放的视野,注重创新与应用,同时对第一版在编写与排版中的疏漏进行了修正,使得本书更趋于完善.

参加本次修订工作的有刘吉定、罗进、刘任河、谭文. 全书由刘吉定统稿、定稿. 本书的编写过程,得到了相关教学管理部门的大力支持,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免还存在缺点和不足,恳请读者批评指正.

编　者

2016 年 4 月

前　言

线性代数是大学理工科和经管类学生的必修课程，它在培养学生的计算能力和抽象思维能力方面起着十分重要的作用. 本书的编写，借鉴和吸收了国内外同类型优秀教材的长处，并结合编者多年的教学经验，在内容组织上，依据教育部工科数学课程委员会对线性代数课程提出的基本要求，本着加强基础，注重计算与应用的原则，并安排了一些选学内容，供教师和读者灵活选用.

对线性代数课程，学生普遍感到内容抽象、计算复杂，加上非数学专业的线性代数课程的学时数偏少，学习这门课程较为吃力，而学习后又不知道如何应用. 其实，多数抽象的概念，是来源于一些简单的实例，本书通过逐步剖析实例中所包含的普遍原理，引导和建立矩阵、向量、线性方程组及线性问题的一些基本概念，让学生掌握和了解这些理论，学会使用这些理论解决实际问题，因此，我们不宜过分强调抽象而严格的逻辑体系，应该引导学生在应用的背景下，逐步掌握基本概念. 本书将以线性方程组为出发点，逐步展开论述矩阵、行列式、向量组及其相关性等概念，还引入了许多应用实例，让读者了解线性代数在解决实际问题中的独特作用，另外还安排了一个应用章节，供有关专业的学生选学. 每章都附有实验内容，目的是让读者学会使用 MATLAB 软件做线性代数的计算. 因为在实际问题中，所面临的数据往往是大量的，单靠做练习的笔头功夫是难以解决实际问题的，MATLAB 软件在解决线性代数的计算问题上，具有独特的优越性，花点时间粗略了解这个软件将会受益匪浅.

本书的主要内容及主要特点：

第 1 章　首先通过介绍解线性方程组的高斯消元法引入了矩阵及初等变换的概念，然后对矩阵作了比较详尽的讨论. 矩阵是线性代数的核心内容，较早建立矩阵的理论，有利于利用矩阵的概念引入线性代数中其他的概念.

第 2 章　用递归的方法定义了 n 阶行列式，这比用逆序方法定义行列式更便于学生理解和掌握. 本章还介绍了利用行列式解线性方程组的克拉默法则.

第 3 章　介绍矩阵的秩和 n 维向量及 n 维向量空间. 向量组的线性相关性是一个难点，通过向量组合成的矩阵进行初等变换可求得矩阵的秩，从而较好地解决了向量组的线性相关性的判断.

第 4 章　讨论了线性方程组解的存在性及解的结构. 本书将线性方程组视为一个向量被另一组向量线性表示的问题，利用上一章的结论，能很容易地建立线性

方程组的基本理论. 本章还介绍了投入产出模型.

第 5 章　建立了特征值与特征向量的理论，介绍矩阵对角化的方法，并介绍如何应用这些方法将二次型化为标准形.

本书每一章都配置了大量的习题，习题分(A)、(B)两类，(A)类为基础题，(B)类的题较难，供读者选做.

本教材由刘吉定、罗进、刘任河主编，谭文参编第一、三章，刘吉定统稿. 在本书的编写过程中，得到了相关教学管理部门的大力支持，在此表示衷心的感谢!

限于编者水平，书中难免存在不足之处，恳请读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第1章 矩　　阵

求解线性方程组是线性代数的一个基本问题，线性代数的许多理论是从解线性方程组的过程中发展起来的. 本章通过介绍用消元法解简单的线性方程组来引入矩阵的概念. 在线性代数里，矩阵是研究的主要对象，矩阵是数量关系的一种表现形式，矩阵将一个有序数表作为一个整体研究，使问题变得简洁明了，矩阵有着广泛的应用，是研究线性方程组和线性变换的有力工具，也是研究离散问题的基本手段.

1.1　线性方程组的消元法

1.1.1　二元和三元线性方程组的求解

例 1.1　解方程组

$$\begin{cases} x+y=3 & (1) \\ x-y=-1 & (2) \end{cases}$$

解　由(1)+(2)，得 $2x=2$，即 $x=1$. 再由(1)−(2)，得 $2y=4$，即 $y=2$. 所以方程组的解为 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

例 1.2　解方程组

$$\begin{cases} x-2y+2z=1 & (3) \\ 3x+2y+2z=7 & (4) \\ 2x-3y-3z=-4 & (5) \end{cases}$$

解　由(4)−(3)×3，得 $8y-4z=4$，化简为

$$2y-z=1 \tag{6}$$

由(5)−(3)×2，得

$$y-7z=-6 \tag{7}$$

由(7)×2−(6)，得

$$-13z=-13 \tag{8}$$

解得 $z=1$，代入(7)，解得 $y=1$. 再将 $y=1$，$z=1$ 代入(3)，解得 $x=1$，所以方

程组的解为$\begin{cases}x=1,\\y=1,\\z=1.\end{cases}$

以上两例,均是将方程组进行变形,逐步消去方程中未知变元的个数.当方程中未知变元只剩一个时,便可直接得到解,再将解依次代入方程,从而求得其他变元的解.

1.1.2 n元线性方程组简介

对于n元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1-1}$$

是否同样可以用消元法求解?

如果n元线性方程组具有如下的形式:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\\qquad\quad a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\cdots\cdots\\\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\tag{1-2}$$

其中,$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$均不为零,则可以由下到上依次得到方程组的解

$$x_n=\frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1}=\frac{b_{n-1}}{a_{n-1,n-1}}-\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}x_n$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_1=\frac{b_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\cdots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

形如式(1-2)的方程组称为三角形方程组,这是n元线性方程组的一种特殊形式,求解比较容易,对一般的形如式(1-1)的n元线性方程组,是否可以化为三角形方程组?在例1.2中,把一个三元线性方程组化成了三角形方程组,从而得到了方程组的解,这种方法启发我们用某些变换将方程组化为三角形方程组以便于求解.但必须保证,对方程组进行变换所得到的新方程组,必须和原方程组有同样的解.以下的变换能保持方程组的解不变(由读者自己证明):

(1) 将第i个方程与第j个方程交换位置.

(2) 将第 i 个方程乘以一个非零常数 k.

(3) 将第 j 个方程加上第 i 个方程乘以一个常数 k.

对方程组实施上述变换时,方程组改变的仅仅是未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的系数与常数项. 因此,我们可以把方程组(1-1) 的系数与常数项列一个表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

这个表和方程组(1-1) 是一一对应的,称为对应方程组(1-1) 的矩阵,方程组的特性都可以在这个矩阵中得到体现,当对方程组做出以上 3 种变换时,方程组所对应的矩阵也会有相应的变换. 变换(1) 相当于矩阵第 i 行与第 j 行对换,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;变换(2) 相当于矩阵第 i 行的每一个元都乘以非零常数 k,记为 kr_i;变换(3) 相当于矩阵第 j 行的所有元都加上第 i 行相应元的 k 倍,记为 $r_j + kr_i$. 矩阵的这 3 种变换称为矩阵的初等行变换,对方程组进行的 3 种变换就可视为对矩阵做初等行变换,而矩阵通过有限次初等行变换得到的矩阵所对应的方程组,与原矩阵所对应的方程组是同解方程组. 我们只需解变换后的较为简单的方程组,就可得到原方程组的解.

方程组(1-2) 所对应的矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

其中,$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 均不为零. 这种矩阵所对应的方程组是很容易求解的. 由此推想,一般线性方程组所对应的矩阵,能否通过初等变换化为上面的矩阵形式?或者得到其他所对应的方程组容易求解的矩阵形式?用高斯消元法,我们可以将方程组化为最简形式. 下面通过例题介绍高斯消元法.

例 1.3 用高斯消元法求解方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 20, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

解 方程组对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 2 & 4 & -3 & -1 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \overset{r_2-2r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ -3 & 7 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{r_3+3r_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \\ 0 & -2 & 23 & 67 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_3\leftrightarrow r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & -2 & 23 & 67 \\ 0 & 10 & -17 & -41 \end{pmatrix} \overset{r_3+5r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & -2 & 23 & 67 \\ 0 & 0 & 98 & 294 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1$$

$$\overset{\frac{1}{98}r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & -2 & 23 & 67 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_2-23r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{2}r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{r_1+3r_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{r_1-7r_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_2$$

变换所得的矩阵对应的方程组为$\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 3, \end{cases}$这就是原方程组的解.

例 1.3 中形如 $\boldsymbol{A}_1$ 的矩阵,称为行阶梯形矩阵. 其特点是:可画出一条阶梯线,线的下方全为 0;每个台阶只有一行,台阶数即是非零行的行数,阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面第一个元素为非零元,也就是非零行的第一个非零元. 形如 $\boldsymbol{A}_2$ 的矩阵称为行最简形矩阵,其特点是非零行的第一个非零元为 1,所在列的其他元素都为零.

用高斯消元法解线性方程组,就是用初等行变换将方程组所对应的矩阵化为行最简形矩阵,从而得到方程组的解.

事实上,对于线性方程组(1-1),我们并不能保证它一定有解,即使有解,也不能保证解是唯一的.

例 1.4 解下列方程组.

(1) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+3y=3 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x-2y=-1 \\ -x+2y=1 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \\ -x+2y=-3 \end{cases}$

解 二元方程组的解的几何意义是直线的公共交点，分别绘出 4 个方程的直线图(图 1-1).

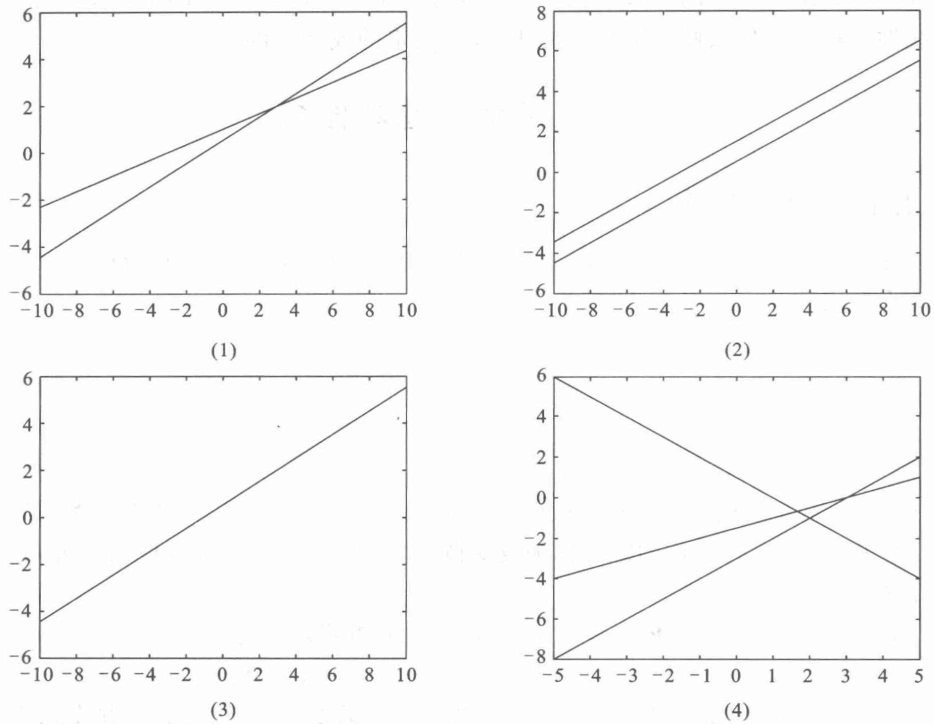

图 1-1

从图中可以看出，方程组(1) 对应的两条直线有唯一交点，从而有唯一解 $x = 3, y = 2$；方程组(2) 对应的两条直线平行，无交点，从而没有解；方程组(3) 对应的两条直线重合，直线上的点都是解，从而有无穷多个解；方程组(4) 对应的 3 条直线没有共同的交点，也没有解.

方程组(1) 对应的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$，$r_2 + r_1$，得$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$；$r_1 + 2r_2$，得$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，所以，方程组的解为$\begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$

方程组(3) 对应矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$r_2 + r_1$，得$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 变换后的矩阵只对应一个方程 $x - 2y = -1$，即 $x = 2y - 1$，y 可取任意值. 故方程组(3) 有无穷多个解.

方程组(2)、(4) 无解.

如果线性方程组(1-1) 有唯一的解,称线性方程组是适定的;如有无穷个解,称线性方程组是欠定的;如没有解,称线性方程组是超定的. 在第 4 章中,我们将解决线性方程组在什么样的情况下是适定的、欠定的或超定的.

1.2 矩阵的基本概念

1.2.1 矩阵的定义

定义 1.1 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的矩形数表称为 $m \times n$ 矩阵,记为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中,a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素,也称为矩阵的(i,j) 元. 元素是实数的矩阵称为实矩阵,元素是复数的矩阵称为复矩阵,本书中的矩阵除特别说明者外,都指实矩阵.

通常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵. $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 简记为

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{A} = (a_{ij}) \quad \text{或} \quad \boldsymbol{A}_{m\times n}$$

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数都等于 n,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,或称为 n 阶方阵. n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $\boldsymbol{A}_n$.

只有一行的矩阵称为行矩阵,或称为行向量. 记为

$$\boldsymbol{A} = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

只有一列的矩阵称为列矩阵,或称为列向量. 记为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

两个矩阵的行数相等、列数也相等,就称它们是同型矩阵. 若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij} = b_{ij} \quad (i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n)$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

1.2.2　几种特殊矩阵

零矩阵　所有元素均为 0 的矩阵称为零矩阵,记为 $\boldsymbol{O}$.

对角矩阵　主对角线以外的元全为零,即 $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$ 的 n 阶方阵(方阵中元素 a_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 所示的位置称为主对角线)

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

称为对角矩阵. 记为 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

数量矩阵　n 阶方阵

$$\lambda\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}$$

称为数量矩阵或纯量矩阵.

单位矩阵　n 阶方阵

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

称为 n 阶单位矩阵,简称单位阵.

上三角形矩阵　主对角线以下的元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为上三角形矩阵.

下三角形矩阵　主对角线以上的元素全为零的 n 阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

称为下三角形矩阵.

矩阵的应用十分广泛,许多实际问题都可以化为矩阵来研究.

例如,一个公司有 3 个销售点甲、乙、丙,销售 5 种产品 A,B,C,D,E,每天的销售量可用表 1-1 表示。

表 1-1

	A	B	C	D	E
甲	3	5	4	9	2
乙	4	3	6	7	3
丙	0	3	4	5	6

也可以用一个矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&5&4&9&2\\4&3&6&7&3\\0&3&4&5&6\end{pmatrix}$ 来表示每天各个销售点的销售量.用矩阵表示销售量,便于进行各种统计与数学处理.

1.3 矩阵的运算

1.3.1 矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

定义 1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 都是 $m\times n$ 矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,规定为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})$,即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

例如,设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&5&7\\2&0&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&1&5\end{pmatrix}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3+1&5+3&7+2\\2+2&0+1&4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8&9\\4&1&9\end{pmatrix}$$

显然,两个矩阵只有当它们是同型矩阵时才能相加.

矩阵加法的运算规律(设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵):

(1) 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(2) 结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$，称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵. 显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$$

由此规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

2. 数与矩阵相乘

定义 1.3 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定为 $\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})$. 即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

例如，设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，则

$$3\boldsymbol{A}=3\begin{pmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times3 & 3\times5 & 3\times7 & 3\times2\\ 3\times2 & 3\times0 & 3\times4 & 3\times3\\ 3\times0 & 3\times1 & 3\times2 & 3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 15 & 21 & 6\\ 6 & 0 & 12 & 9\\ 0 & 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 是数）：

(1) 结合律 $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$， $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$

矩阵的加法运算与数乘运算统称矩阵的线性运算.

例 1.5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 6 & 4 & 8\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解

$$\begin{aligned}3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}&=3\begin{pmatrix}3 & 5 & 7 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 6 & 4 & 8\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}9 & 15 & 21 & 6\\ 6 & 0 & 12 & 9\\ 0 & 3 & 6 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 10 & 14\\ 0 & 12 & 8 & 16\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}9-2 & 15-6 & 21-4 & 6-0\\ 6-4 & 0-2 & 12-10 & 9-14\\ 0-0 & 3-12 & 6-8 & 9-16\end{pmatrix}\end{aligned}$$