

青少年应该知道的百科知识

引领中国孩子走向未来

青少年应该知道的 数学知识

张斌/编著



本套丛书是专为中国儿童量身定做的一套全方位知识图书。全套书涵盖了儿童成长过程中不可或缺的各类百科知识。这一系列图书将会引领广大的中国孩子收获最全面系统的百科知识，本丛书将全面吸引孩子的好奇心和求知欲。引领中国孩子走向未来。

 云南大学出版社

张斌 郝兆吉 编著

应该知道的数学知识

有一段时间,手指数曾被扩展到包括出现在商业交易中的最大的数,并且在19世纪就已为国际通用。发展到后来,1,2,……和10,20……90这些数用左手来表示,100,200……900和1,000,……9,000,这些数用右手来表示。用这种方法,10,000以内的任何数都能用两只手表示。

手指数的样式,在文艺复兴时期的算术书上有记载。例如,用左手,部分屈折的小指表示1,部分屈折的小指和无名指表示2,部分屈折的小指、无名指和中指表示3,屈折中指和无名指表示4,屈折的中指表示5,屈折的无名指表示6,完全屈折的小指表示7,完全屈折的小指和无名指表示8,完全屈折的小指、无名指和中指表示9。

记录工具的出现

数字的记录和长期保存离不开记录的工具。但是,记录工具的发明和改进是一个非常漫长的过程。我们现在常用的机器制造的纸张只有 100 多年的历史。以前的手工制作的纸是非常昂贵和难以得到的,即使是这种纸也是在 12 世纪才传到欧洲,虽然聪明的中国古人早在一千多年前,就已经掌握了这一门技术。

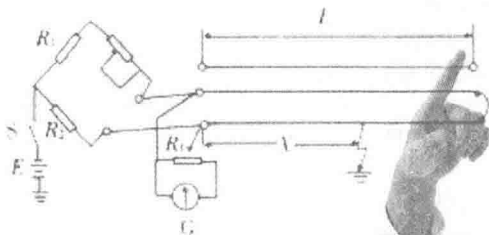
但是,古人为了满足自己记录的需要,也想办法创造了一些工具。一种早期类似纸的书写材料,称为纸草片(papyrus),是古代埃及人发明的。而且,公元前650年左右,已经传入希腊。它是一种叫作纸草(papir)的芦苇做的。将芦苇的茎切成一条一条细长的薄片,并排成一张,一层层地往上放,完全用开水浸湿,再将水挤压出来,然后放到太阳底下晒干。也许由于植物中天然胶质,几层粘到一起了。在纸草片干掉了以后,再用圆的硬东西用力把它们压平衡,这样就能书写了。用纸草片打草稿,就是一小片,也要花不少钱。

另一种早期的书写材料是羊皮纸,是用动物(通常是羊和羔)皮做成的。自然,这是稀有和难得的。更昂贵的一种是用牛犊皮做的仿羊皮纸,称做犊皮纸。事实上,羊皮纸已经是非常昂贵的,以致中世纪出现一种习惯:洗去老羊皮手稿上的墨迹,然后再用。这样的手稿,现在被称为重写羊皮纸。有这样的情况:在若干年后,重写羊皮文件上最初写的原稿又模糊地出现了。一些有趣的“修复”就是这样的做法。

印度和阿拉伯数系

我们现在常用的数字符号系统,是印度—阿拉伯数系。之所以用印度和阿拉伯命名,是因为它可能是印度人发明的,又由阿拉伯人传到西欧的。

目前,保存下来现在所用的数字符号的最早样品是印度的一些石柱上发现的,这些石柱是公元前250左右乌孙奈库王建造的。至于其它在印度的早期样品,如果解释正确的话,则是从大约公元前100年在纳西克窟洞中刻下的一些碑文中发现。这些早期样本中既没有零,也没有采用位置记号。但是,考古学家推测,位置值(positional value)和零,必定有公元一本中的某个时期传到印度的,因为波斯数学家花拉子密在公元825年写的一本书中描述过这样一个完整的印度数系。



云南大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

青少年应该知道的数学知识 / 张斌编著. —昆明: 云南大学出版社, 2010
ISBN 978 - 7 - 5482 - 0137 - 3

I. ①青… II. ①张… III. ①数学 - 青少年读物 IV. ①01 - 49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 105331 号

青少年应该知道的数学知识

张 斌 编著

责任编辑: 于 学

封面设计: 五洲恒源设计

出版发行: 云南大学出版社

印 装: 北京市业和印务有限公司

开 本: 710mm × 1000mm 1/16

印 张: 15

字 数: 200 千

版 次: 2010 年 6 月第 1 版

印 次: 2010 年 6 月第 1 次印刷

书 号: 978 - 7 - 5482 - 0137 - 3

定 价: 28.00 元

地 址: 云南省昆明市翠湖北路 2 号云南大学英华园

邮 编: 650091

电 话: 0871 - 5033244 5031071

网 址: <http://www.ynup.com>

E - mail: market@ynup.com

序言

“寓教于乐”的概念对于时下的青少年读物来说，早已不再陌生，甚至有点儿陈词滥调。但如何从本质上了解数学的发展和数学的真谛，此书会给你呈现一个真正的数学世界。引领你走进课本，进入课堂，轻松有效的展开学习。

这本书，会让你领悟到数学的真正艺术，欣赏到“数学，另一种大自然的言语”的活力，聆听到一个个绘声绘色的数学故事，重温从古希腊到21世纪的许多数学轶事，了解数学发展史上有趣而深奥的难解之谜，浏览17世纪至21世纪一个个数学的革命性变化和大事。展望数学的发展和未来，让你走进数学的殿堂，探寻数学的奥秘。

走近她，你也会收获多多，快乐多多。打开这本书，我将带你到数学的王国里去漫步。也许你已经学了不少数学知识，但这些知识都在数学花园的大门口，或者在进门不远的地方徘徊。进入她，你可以用你学过的数学知识，作为建筑的基础，来修建美丽的花坛花棚，盖起数学的高楼大厦。

这一次，让我们细细品味，尽可能走得远一些，去观赏一下数学王国的新景色！

目 录

数学发展大解密	1
第一章 数学学科的发展	3
第一节 西方数学发展史	3
第二节 中国数学发展史	5
第二章 数系的发展	9
第一节 计数的出现	9
第二节 负数及其运算的引入	13
第三节 生活能离开有理数吗?	14
第四节 惨痛的代价——无理数的发现	16
第五节 迄今为止范围最大的数系——四元数	18
第三章 数学学科的发展与前景展望	19
第一节 数学史上的三次危机	19
第二节 数学的概念、特征和作用	21
第三节 世界之最的中国数学成就早知道	27

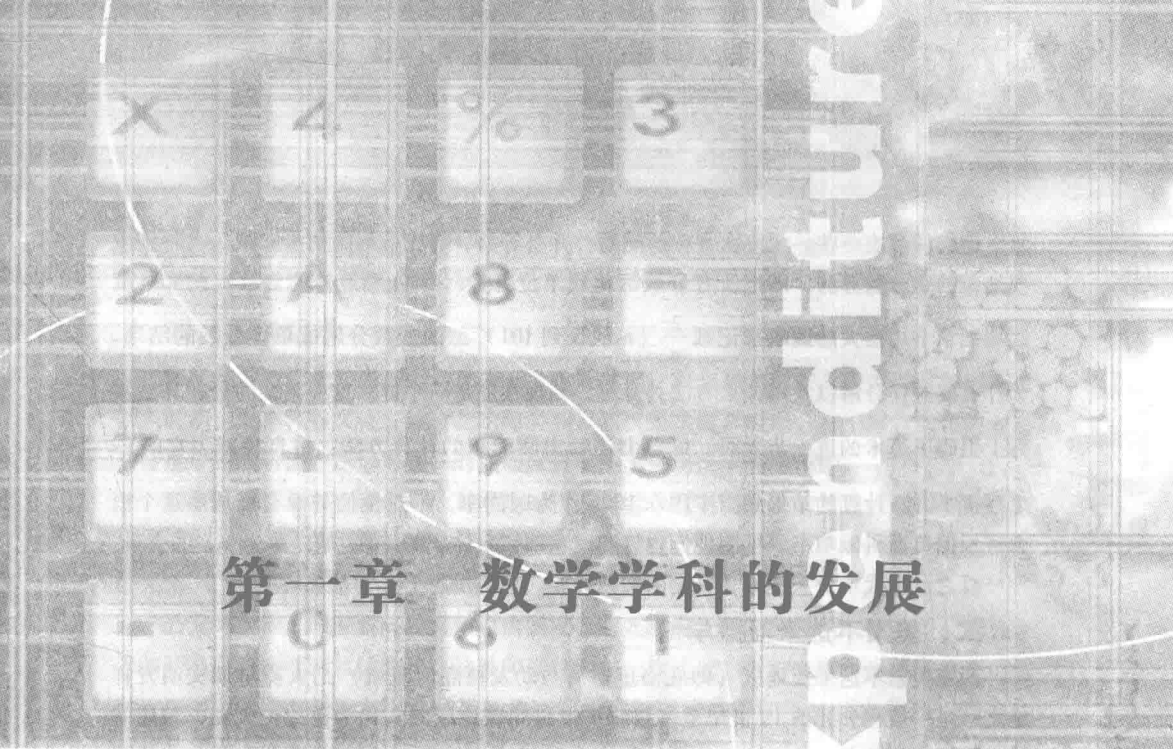
第四节	数学发展的展望	30
数学知识大观园		35
第一章	低级部分	37
第一节	奏响学习数学的序曲	37
第二节	如何培养婴幼儿的数学思维能力	38
第三节	从生活中开始培养宝宝思考数学的能力	39
第二章	初级部分	41
第一节	神奇的数“0”	41
第二节	可爱的质数	42
第三节	小数点的作用	44
第三章	中级部分	48
第一节	七年级数学大讲堂	48
第一讲	数的家族“增员”了	48
第二讲	“相反数”、“绝对值”做客兄长“数轴”家	51
第三讲	请周博士讲讲“三式四数”吧	55
第四讲	故事两则：财主的鱼——鸡兔同笼	58
第五讲	如何数角和线段（善于借鉴一石数鸟）	60
第六讲	马小虎透视“同位角、内错角、同旁内角” ...	62
第七讲	马小虎也能判断两直线平行吗？	64
第八讲	小兔子走哪条路吃菜最多	67
第九讲	马小虎做《三角形》题又出错了	69
第十讲	名著中的方程思想	70
第十一讲	长相略有不同——学习不等式与方程	75
第十二讲	几种常见统计图的比较与选择	78

第二节	八年级数学知识大讲堂	82
第一讲	玩过跷跷板吧! 感受“全等”	82
第二讲	这些图案是如何得到的	83
第三讲	孪生姊妹——平方根与立方根	85
第四讲	“龟兔赛跑”、“乌鸦喝水”与函数图象	86
第五讲	李老汉吃亏了吗——乘法公式“三字诀”	89
第六讲	类比分数学分式	90
第七讲	亮亮预习——反比例函数	92
第八讲	电梯里放得下吗? ——勾股定理	94
第九讲	如何确定全等三角形的对应关系	96
第十讲	矩形、菱形争雄	98
第十一讲	小虎学“三数”	99
第三节	九年级知识大讲堂	103
第一讲	对比同类项学习同类二次根式	103
第二讲	小虎学二次根式	104
第三讲	配方法、公式法和因式分解法争雄	105
第四讲	竹竿进屋——一元二次方程应用	107
第五讲	小虎误入圆王国	109
第六讲	聪聪观月	110
第七讲	这……可能吗?	113
第八讲	一个大骰子能代替两个骰子吗?	114
第九讲	几何图形漫游“对称岛”	116
第十讲	唐僧的三个徒弟 a 、 b 、 c	118
第十一讲	小虎学找对应关系	120
第十二讲	小虎喜欢“三角函数”	122
第十三讲	物体的三视图与影子	124

第四章	高级部分	127
第一节	高一数学知识大讲堂	127
第一讲	衔接初高中的桥梁——集合	127
第二讲	使不少同学感到有些棘手的——函数	130
第三讲	指数函数与对数函数	140
第四讲	三角函数的图像和性质	142
第五讲	两角和与差的三角函数	147
第六讲	浅谈利用二分法求方程的近似解的学习	150
第二节	高二知识展示	155
第一讲	丰富有趣的数列	155
第二讲	不等式问题	159
第三讲	把图形与数联系起来的纽带——向量问题	163
第四讲	向量质的三级跳——由平面向量到空间	171
第五讲	中奖解密组合与概率	174
第六讲	解析几何知识大盘点——直线	176
第七讲	直线与圆的方程	181
第八讲	椭圆的形式及性质	182
第九讲	双曲线所都独有的性质——渐近线	184
第十讲	直线与圆锥曲线的位置关系	186
第十一讲	空间想象——立体几何	188
第三节	高三数学大讲堂	195
第一讲	基本算法语句	195
第二讲	透视导数知识在生活中的应用	200
第三讲	不规则图形面积求解的万能钥匙	203

数学思想大考验	205
第一章 数学思想观	207
第一节 中级数学思想大汇集	207
第二节 中级数学解题方法早知道	210
第三节 常见数学思想方法应用举例	214
第二章 学习方法论	219
第一节 尖子生数学学习方法集锦	219
第二节 数学学习方法大采撷	222
第三节 数学学习方法大攻略	226

数学发展大解密



第一章 数学学科的发展

第一节 西方数学发展史

一、古埃及数学

埃及是世界上文化发达最早的几个地区之一，位于尼罗河两岸，公元前 3200 年左右，形成一个统一的国家。尼罗河定期泛滥，淹没全部谷地，水退后，要重新丈量居民的耕地面积。由于这种需要，多年积累起来的测地知识便逐渐发展成为几何学。

公元前 2900 年以后，埃及人建造了许多金字塔，作为法老的坟墓。从金字塔的结构，可知当时埃及人已懂得不少天文和几何的知识。例如建筑场基底直角的误差与底面正方形两边同正北的偏差都非常小。

现今对古埃及数学的认识，主要根据两卷用僧侣文写成的纸草书；一卷藏在伦敦，叫做莱因德纸草书，一卷藏在莫斯科。埃及最古老的文字是象形文字，后来演变成一种较简单的书写体，通常叫僧侣文。除了这两卷纸草书外，还有一些写在羊皮上或用象形文字刻在石碑上和木头上的史料，藏于世界各地。两卷纸草书的年代在公元前 1850 ~ 前 1650 年之间，相当于中国的夏代。埃及很早就用十进记数法，但却不知道位值制，每一个较高的单位是用特殊的符号来表示的。埃及算术主要是加法，而乘法是加法的重



复。他们能解决一些一元一次方程的问题，并有等差、等比数列的初步知识。占特别重要地位的是分数算法，即把所有分数都化成单位分数（即分子是1的分数）的和。莱因德纸草书用很大的篇幅来记载 $\frac{2}{n}$ （ n 从5到101）型的分数分解成单位分数的结果。

为什么要这样分解以及用什么方法去分解，到现在还是一个谜。这种繁杂的分数算法实际上阻碍了算术的进一步发展。纸草书还给出圆面积的计算方法：将直径减去它的 $\frac{1}{9}$ 之后再平方。计算的结果相当于用3.1605作为圆周率，不过他们并没有圆周率这个概念。根据莫斯科纸草书，推测他们也许知道正四棱台体积的计算方法。

总之，古代埃及人积累了一定的实践经验，但还没有上升为系统的理论。

二、美索不达米亚数学

西亚美索不达米亚地区（即底格里斯河与幼发拉底河流域）是人类早期文明发祥地之一。一般称公元前19世纪至公元前6世纪间该地区的文化为巴比伦文化，相应的数学属巴比伦数学。这一地区的数学传统上溯至约公元前2000年的苏美尔文化，后续至公元1世纪基督教创始时期。对巴比伦数学的了解，依据于19世纪初考古发掘出的楔形文字泥板，有约300块是纯数学内容的，其中约200块是各种数表，包括乘法表、倒数表、平方和立方表等。大约在公元前1800~前1600年间，巴比伦人已使用较系统的以60为基数的数系（包括60进制小数）。由于没有表示零的记号，这种记数法是不完善的。

巴比伦人的代数知识相当丰富，主要用文字表达，偶尔使用记号表示未知量。

在公元前1600年前的一块泥板上，记录了许多组毕达哥拉斯三元数组（即勾股数组）。据考证，其求法与希腊人丢番图的方法相同。巴比伦人还讨论了某些三次方程和可化为二次方程的四次方程。

巴比伦的几何属于实用性质的几何，多采用代数方法求解。他们有三角形相似及对应边成比例的知识。用公式 c 为圆的周长求圆面积，相当于取 $\pi=3$ 。

巴比伦人在公元前世纪已较频繁地用数学方法记载和研究天文现象，如记录和推算月球与行星的运动，他们将圆周分为360度的做法一直沿用至今。

三、玛雅数学

对于玛雅数学的了解，主要来自一些残剩的玛雅时代石刻。对这些石刻上象形文字的释读表明：玛雅人很早就创造了位值制的记数系统，具体记数方式又分两种：第一种叫横点记数法；第二种叫头形记数法。横点记数法以一点表示1，以一横表示5，以一介壳状表示0，但不是0符号。

迄今所知道的玛雅数学知识就是如此，其中只显示加法和进位两种。关于形的认





识，只能从玛雅古建筑中体会到一些。这些古建筑从外形看都很整齐划一，可以判断当时玛雅人对几何图形已有一定的知识。

四、印度数学

印度数学的数学发展可以划分为三个重要时期，首先是雅利安人入侵以前的达罗毗荼人时期，史称河谷文化；随后是吠陀时期；其次是悉檀多时期。由于河谷文化的象形文字至今不能解读，所以对这一时期印度数学的实际情况了解得很少。

印度数学最早有文字记录的是吠陀时代，其数学材料混杂在婆罗门教和印度教的经典《吠陀》当中，年代很不确定，今人所考定的年代出入很大，其年代最早可上溯到公元前 10 世纪，最晚至公元前 3 世纪。

公元 773 年，印度数码传入阿拉伯国家，后来欧洲人通过阿拉伯人接受了，成为今天国际通用的所谓阿拉伯数码。这种印度数码与记数法成为近世欧洲科学赖以进步的基础。中国唐朝印度裔天文学家瞿昙悉达于 718 年翻译的印度历法《九执历》当中也有这些数码，可是未被中国人所接受。

由于印度屡被其他民族征服，使印度古代天文数学受外来文化影响较深，除希腊天文学外，也不排除中国文化的影响，然而印度数学始终保持东方数学以计算为中心的实用化特色。与其算术和代数相比，印度人在几何方面的工作显得十分薄弱，最具特色与影响的成就是其不定分析和对希腊三角术的推进。

第二节 中国数学发展史

中国古代是一个在世界上数学领先的国家，用近代科目来分类的话，可以看出无论在算术、代数、几何和三角各方而都十分发达。现在就让我们来简单回顾一下初等数学在中国发展的历史。

一、属于算术方面的材料

大约在 3000 年以前中国已经知道自然数的四则运算，这些运算只是一些结果，被保存在古代的文字和典籍中。乘除的运算规则在后来的“孙子算经”（公元 3 世纪）内有了详细的记载。中国古代是用筹来计数的，在我们古代人民的计数中，已利用了和我们现在相同的位率，用筹记数的方法是以纵的筹表示单位数、百位数、万位数等；用横的筹表示十位数、千位数等，在运算过程中也很明显的表现出来。“孙子算经”用十六字来表明它，“一从十横，百立千僵，千十相望，万百相当。”和其他古代国家一样，





乘法表的产生在中国也很早。乘法表中国古代叫九九，估计在 2500 年以前中国已有这个表，在那个时候人们便以九九来代表数学。现在我们还能看到汉代遗留下来的木简（公元前 1 世纪）上面写有九九的乘法口诀。

现有的史料指出，中国古代数学书“九章算术”（约公元一世纪前后）的分数运算法则则是世界上最早的文献，“九章算术”的分数四则运算和现在我们所用的几乎完全一样。

古代学习算术也从量的衡量开始认识分数，“孙子算经”（公元 3 世纪）和“夏侯阳算经”（公元 6~7 世纪）在论分数之前都开始讲度量衡，“夏侯阳算经”卷上在叙述度量衡后又记着：“十乘加一等，百乘加二等，千乘加三等，万乘加四等；十除退一等，百除退二等，千除退三等，万除退四等。”这种以十的方幂来表示位率无疑地也是中国最早发现的。

小数的记法，元朝（公元 13 世纪）是用低一格来表示，如 13.56 作 1356 在算术中还应该提出由公元三世纪“孙子算经”的物不知数题发展到宋朝秦九韶（公元 1247 年）的大衍求一术，这就是中国剩余定理，相同的方法欧洲在 19 世纪才进行研究。宋朝杨辉所著的书中（公元 1274 年）有一个 1~300 以内的因数表，例如 297 用“三因加一损一”来代表，就是说 $297 = 3 \times 11 \times 9$ ，（ $11 = 10 + 1$ 叫加一， $9 = 10 - 1$ 叫损一）。杨辉还用“连身加”这名词来说明 201~300 以内的质数。

二、属于代数方面的材料

从“九章算术”卷八说明方程以后，在数值代数的领域内中国一直保持了光辉的成就。

“九章算术”方程章首先解释正负术是确切不移的，正象我们现在学习初等代数时从正负数的四则运算学起一样，负数的出现便丰富了数的内容。

我们古代的方程在公元前一世纪的时候已有多元方程组、一元二次方程及不定方程几种。

一元二次方程是借用几何图形而得到证明。

不定方程的出现在二千多年前的中国是一个值得重视的课题，这比我们现在所熟知的希腊丢番图方程要早三百多年。

11 世纪的贾宪已发明了和霍纳（1786—1837）方法相同的数字方程解法，我们也不能忘记十三世纪中国数学家秦九韶在这方面的伟大贡献。

在世界数学史上对方程的原始记载有着不同的形式，但比较起来不得不推中国天元术的简洁明了。天元术是天元术发展的必然产物。

级数是古老的东西，2000 多年前的“周髀算经”和“九章算术”都谈到算术级数和几何级数。14 世纪初中国元代朱世杰的级数计算应给予很高的评价，他的有些工作





欧洲在 18~19 世纪的著作内才有记录。11 世纪时代，中国已有完备的二项式系数表，并且还有这表的编制方法。

历史文献揭示出在计算中有名的盈不足术是由中国传往欧洲的。

内插法的计算，中国可上溯到六世纪的刘焯，并且 7 世纪末的僧一行有不等间距的内插法计算。14 世纪以前，属于代数方面许多问题的研究，中国是先进国家之一。就是到 18~19 世纪由李锐（1773—1817），汪莱（1768—1813）到李善兰（1811—1882），他们在这一方面的研究上也都发表了很多的名著。

三、属于几何方面的材料

自明朝后期（16 世纪）欧几里德“几何原本”中文译本一部分出版之前，中国的几何早已在独立发展着。应该重视古代的许多工艺品以及建筑工程、水利工程上的成就，其中蕴藏了丰富的几何知识。

中国的几何有悠久的历史，可 * 的记录从公元前 15 世纪谈起，甲骨文内已有规和矩二个字，规是用来画圆的，矩是用来画方的。

汉代石刻中矩的形状类似现在的直角三角形，大约在公元前 2 世纪左右，中国已记载了有名的勾股定理（勾股二个字的起源比较迟）。

在圆周率的计算上有刘歆（？—3）、张衡（78—139）、刘徽（263）、王蕃（219—257）、祖冲之（429—500）、赵友钦（公元十三世纪）等人，其中刘徽、祖冲之、赵友钦的方法和所得的结果举世闻名。祖冲之所得的结果 $\pi = 355/113$ 要比欧洲早 1000 多年。

在刘徽的“九章算术”注中曾多次显露出他对极限概念的天赋。

四、属于三角方面的材料

三角学的发生由于测量，首先是天文学的发展而产生了球面三角，中国古代天文学很发达，因为要决定恒星的位置很早就有了球面测量的知识；平面测量术在“周髀算经”内已记载若用矩来测量高深远近。

刘徽的割圆术以半径为单位长求圆内正六边形，十二二边形等的每一边长，这答数是和 $2\sin A$ 的值相符（ A 是圆心角的一半），以后公元十二世纪赵友钦用圆内正四边形起算也同理，我们可以从刘徽、赵友钦的计算中得出 7.5° 、 15° 、 22.5° 、 30° 、 45° 等的正弦函数值。

在古代历法中有计算二十四个节气的日晷影长，地面上直立一个八尺长的“表”，太阳光对这“表”在地面上的射影由于地球公转而每一个节气的影长都不同，这些影长和“八尺之表”的比，构成一个余切函数表（不过当时还没有这个名称）。

13 世纪的中国天文学家郭守敬（1231—1316）曾发现了球面三角上的三个公式。





现在我们所用三角函数名词：正弦，余弦，正切，余切，正割，余割，这都是我国16世纪已有的名称，那时再加正矢和余矢二个函数叫做八线。

在17世纪后期中国数学家梅文鼎（1633—1721）已编了一本平面三角和一本球面三角的书，平面三角的书名叫“平三角举要”，包含下列内容：（1）三角函数的定义；（2）解直角三角形和斜三角形；（3）三角形求积，三角形内容圆和容方；（4）测量。这已经和现代平面三角的内容相差不远，梅文鼎还著书讲到三角上有名的积化和差公式。18世纪以后，中国还出版了不少三角学方面的书籍。

