普通高等学校工科类 · 经管类数学深化训练与考研辅导丛书

考研首轮基础复习优选图书

线性代数
深化训练与考研指导

刘强 丛书主编

孙阳 郭文英 刘强 孙激流 编著

一书在手 考试不愁

知识要点梳理，方便温习知识
典型例题分析，掌握解题技巧
深化训练讲解，做到融会贯通
后附考研真题，模拟考试不慌

中国工信出版集团 电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书
考研首轮基础复习优选图书

线性代数
深化训练与考研指导

（工科类·经管类）

刘　强　丛书主编
孙　阳　郭文英　刘　强　孙激流　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的. 全书共分为 6 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练. 本书编写的主要目的有两个：一是为了满足学生报考研究生的需要；二是帮助学有余力的在校学生更好地学习“线性代数”课程，开阔学习视野，拓展解题思路。本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类，详略得当，帮助考生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果.

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“线性代数”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数深化训练与考研指导 / 孙阳等编著. —北京：电子工业出版社，2017.4

ISBN 978-7-121-31150-5

I. ①线… II. ①孙… III. ①线性代数－高等学校－教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 057524 号

策划编辑：王二华
责任编辑：王二华
印　　刷：三河市华成印务有限公司
装　　订：三河市华成印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编　100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：12　　字数：310 千字
版　　次：2017 年 4 月第 1 版
印　　次：2017 年 4 月第 1 次印刷
定　　价：36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010)88254532。

前　　言

为了更好地帮助普通高等学校工科类、经管类本科生学好大学数学，同时为了满足众多学生考研的需要，我们结合多年的考研辅导经验，编写了“高等学校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书”，该丛书包括微积分、高等数学、线性代数和概率论与数理统计四门数学课程的辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编．

本书为线性代数分册，内容涵盖了考研“数学一”和“数学三”的全部考点．本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“线性代数”课程，以开阔学习视野，拓展解题思路；二是为了满足学生报考研究生的需要．本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴切考试实际，做到分门别类、详略得当，使考生能在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，综合分析问题、解决问题的能力得到有效提升，达到融会贯通、举一反三的学习效果．

全书共分为 6 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练．具体模块内容介绍如下．

一、**知识要点**：本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容．

二、**典型例题分析**：本模块是作者在多年来考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧．

三、**深化训练**：本模块精心选编了部分具有代表性的习题及历年的考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通和举一反三．

四、**深化训练详解**：本模块对深化训练习题给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维．

五、**综合提高训练**：本模块的例题综合性较强，有较高的难度和较强的灵活性，通过本模块的学习，提升读者的综合能力和应变能力．

为了便于读者阅读本书，书中的“数学一”要求、“数学三”不要求的内容将用“*”标出，有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出．另外为了方便读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，例如【2010（1）】表示该题是 2010 年硕士研究生入学考试“数学一”考题，【2010（1，3）】表示该题是 2010 年“数学一”和“数学三”考题等．

本丛书在编写过程中，得到了北京工商大学曹显兵教授，北京工业大学李高荣教授，北方工业大学刘喜波教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授及同事们的大力支持，电子工业出版

社高等教育分社的谭海平社长和王二华编辑也为丛书的出版付出了很多的努力，在此表示诚挚的感谢.

由于作者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错误之处，恳请读者和同行们不吝指正. 邮件地址为：cuebliuqiang@163.com.

作　者

2017 年 3 月

目　录

第 1 章　行　列　式

1.1　知 识 要 点

1.1.1　排列

把 n 个不同的元素排成一排，叫做这 n 个元素的**全排列**，简称**排列**，n 个不同元素的所有的排列的种数为 $n!$.

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有个标准次序（常用的标准是从小到大），于是 n 个不同元素的任一排列中，某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就称它们构成一个**逆序**，排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**；逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

特别地，由 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序的数组称为一个 **n 级排列**. 规定 n 级排列的标准次序为从小到大，也称为**自然序**，n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$；n 级排列的种数共有 $n!$ 个，其中奇排列、偶排列各占一半.

1.1.2　对换

将一个排列中的两个数对调，其余的数不动，就会得到一个新排列，称这样的一个变动为**对换**.

对换的性质：

（1）排列经一次对换奇偶性发生改变；

（2）任意一个 n 级排列与排列 $1,2,\cdots,n$ 都可以经过有限次对换互变，并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

1.1.3　n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和. n 阶行列式也可以简记为 $D=\left|a_{ij}\right|_n$ 或 $\det(a_{ij})$，其中 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 称为行列式的**元素**. 显然二阶、三阶行列式是 n 阶行列式的特例.

注　规定一阶行列式等于行列式中元素，即 $|a|=a$，注意不要与绝对值的记号混淆.

n 阶行列式的等价定义：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} .$$

1.1.4 行列式的性质

（1）**转置** 记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

D^{T} 称为 D 的**转置行列式**，则行列式与其转置行列式相等，即有 $D = D^{\mathrm{T}}$.

（2）**换行（列）** 交换行列式的两行（列），行列式变号.

（3）**数乘** 用数 k 乘行列式等于将 k 乘到行列式的某一行（列）中所有元素，反过来一个行列式可以按行（列）提取公因式. 特别的，若行列式中有一行元素为零，则行列式为零.

（4）**倍加** 将行列式某一行（列）的所有元素乘以一个数对应加到另一行（列）的元素上，行列式值不变.

（5）**分解** 行列式某一行（列）的元素均为两数之和，可按这一行（列）将其分解为两个行列式相加.

（6）**成比例** 一个行列式中若有两行（列）的元素对应成比例，则行列式的值为零. 特别的，一个行列式中若有两行（列）元素相同，则行列式的值为零.

1.1.5 余子式、代数余子式

将行列式 $D = |a_{ij}|_n$ 的第 i 行、第 j 列元素去掉，剩余元素按原顺序构成的 $n-1$ 阶行列式，称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

在 n 阶行列式 D 中任选 k 行 k 列，交叉位置的元素按原顺序构成的 k 阶行列式 D_k 称为 D 的一个 **k 阶子式**，去掉选定的 k 行 k 列元素后余下的元素按原顺序构成的 $n-k$ 阶行列式称为子式 D_k 的**余子式**，记为 M_k. 若选定的 k 行 k 列元素的行标为 $i_1, i_2, \cdots i_k$，列标为 $j_1, j_2, \cdots j_k$，则 $(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} M_k$ 称为子式 D_k 的**代数余子式**.

1.1.6 行列式展开定理

（1）（**按行列展开定理**） 行列式等于它任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和；行列式任意一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式乘积之和为零. 即若 $D = \left|a_{ij}\right|_n$，则

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

*（2）（**拉普拉斯定理**） 行列式等于它任意选定 k 行（列）的全部 k 阶子式与其代数余子

式乘积之和. 若在 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行后得到的子式为 $M_1, M_2, \cdots, M_t$，它们的代数余子式分别为 $A_1, A_2, \cdots, A_t$，则

$$D = M_1A_1 + M_2A_2 + \cdots + M_tA_t .$$

1.1.7　特殊的行列式的计算

（1）上三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} .$$

（2）下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} .$$

（3）对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} .$$

（4）分块上三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & y_{11} & \cdots & y_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & y_{k1} & & y_{km} \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} .$$

（5）分块下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & & 0 \\ y_{11} & \cdots & y_{1k} & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & y_{mk} & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} .$$

（6）分块对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{m1} & \cdots & z_{mm} \end{vmatrix}.$$

（7）范德蒙德行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(a_i - a_j).$$

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一、排列问题

例 1.2.1　若7级排列$2\,1\,4\,i\,5\,k\,6$是偶排列，确定i,k的值.

解　由题意，当$i=3,k=7$时，

$$N(2143576)=1+0+1+0+0+1+0=3,$$

排列为奇排列，由对换的性质必有排列$2\,1\,4\,7\,5\,3\,6$为偶排列，故$i=7,k=3$.

例 1.2.2　若规定排列$a_1 a_2 \cdots a_n$的逆序数为k，求排列$a_n a_{n-1} \cdots a_1$的逆序数.

解　若两个元素a_i和a_j在排列$a_1 a_2 \cdots a_n$中产生逆序，则在排列$a_n a_{n-1} \cdots a_1$中就不产生逆序，反之亦然．因此排列$a_1 a_2 \cdots a_n$的逆序数与排列$a_n a_{n-1} \cdots a_1$的逆序数之和等于n个元素中取2个元素的组合数C_n^2，从而排列$a_n a_{n-1} \cdots a_1$的逆序数为$C_n^2 - k$.

1.2.2　题型二、利用定义计算行列式

例 1.2.3　用行列式的定义计算$D_4=\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & x-1 \\ 1 & 0 & x-2 & -1 \\ 2 & x-3 & -2 & 1 \\ x-4 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$中$x^4$与$x^3$的系数.

解　x^4与x^3来自行列式D_4展开中的$(-1)^{N(4321)}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$项，故$x^4$前的系数为$(-1)^{N(4321)}=1$，$x^3$前的系数为$(-1)^{N(4321)}(-1-2-3-4)=-10$.

例 1.2.4　【1991（4）】n阶行列式$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}=$________.

解 由行列式定义有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{N(12\cdots n)}a^n + (-1)^{N(23\cdots n1)}b^n = a^n + (-1)^{n-1}b^n .$$

例 1.2.5 【1990（4）】设 $\boldsymbol{A}$ 为 10×10 矩阵，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

计算行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为10阶单位矩阵，λ 为常数.

解 由题意，由行列式定义有

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{N(12\cdots 10)} \times (-\lambda)^{10} + (-1)^{N(23\cdots 10\ 1)} \times 1^9 \times 10^{10}$$

$$= \lambda^{10} - 10^{10}.$$

例 1.2.6 若行列式 $D_n(n\geqslant 2)$ 中每个元素只取1或 -1，证明：行列式的值为偶数.

证 由行列式的定义，D_n 表示 $n!$ 个一般项的和，当 $n\geqslant 2$ 时，$n!$ 为偶数. 再由 D_n 中每个元素只取1或 -1，从而其一般项的值也只为1或 -1. 进而，若一般项中1的个数为奇数，则 -1 也为奇数，此时和为偶数；若1的个数为偶数，则 -1 也为偶数，此时和也为偶数，故命题成立.

1.2.3 题型三、利用性质计算行列式

例 1.2.7 已知 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 2$，求行列式 $D = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix}$ 的值.

解法 1

$$D = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2(x_1+y_1+z_1) & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ 2(x_2+y_2+z_2) & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ 2(x_3+y_3+z_3) & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} x_1+y_1+z_1 & y_1+z_1 & z_1+x_1 \\ x_2+y_2+z_2 & y_2+z_2 & z_2+x_2 \\ x_3+y_3+z_3 & y_3+z_3 & z_3+x_3 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1} 2\begin{vmatrix} x_1+y_1+z_1 & -x_1 & -y_1 \\ x_2+y_2+z_2 & -x_2 & -y_2 \\ x_3+y_3+z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3} 2\begin{vmatrix} z_1 & -x_1 & -y_1 \\ z_2 & -x_2 & -y_2 \\ z_3 & -x_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -2\begin{vmatrix} -x_1 & z_1 & -y_1 \\ -x_2 & z_2 & -y_2 \\ -x_3 & z_3 & -y_3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3} 2\begin{vmatrix} -x_1 & -y_1 & z_1 \\ -x_2 & -y_2 & z_2 \\ -x_3 & -y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$=2\times 2=4$.

解法 2 用行列式按列分解的性质，可将行列式 D 分解为 $C_2^1\times C_2^1\times C_2^1=8$ 个行列式相加，但其中只有 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 及 $\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}$ 的值不为零，其余的行列式都有两列元素相同，值为零．故

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & x_1 \\ y_2 & z_2 & x_2 \\ y_3 & z_3 & x_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=2+2=4.$$

例 1.2.8 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$.

解 根据行列式的性质，有

$$D_4 \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} a+3b & a+3b & a+3b & a+3b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} =(a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-br_1]{\substack{r_2-br_1 \\ r_3-br_1}} (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} =(a+3b)(a-b)^3.$$

注 在行列式的计算中，一个常用的技巧是“扫”的方法，即首先构造出一个基本行（或基本列），然后利用基本行（或基本列）将其余行（或列）中相同元素化为0，其核心思想是构造出尽量多的0元素．本题的另一种解法见例 1.2.14.

例 1.2.9 【1989（4）】计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$________.

解 由题意，由行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} x & -1 & 1 & x-1 \\ x & -1 & x+1 & -1 \\ x & x-1 & 1 & -1 \\ x & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4+c_1]{\substack{c_2+c_1 \\ c_3-c_1}} x\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x(-1)^{N(4321)}x^3 = x^4 .$$

例 1.2.10 【2014（1,3）】行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = ($　　$)$.

（A）$(ad-bc)^2$；　　（B）$-(ad-bc)^2$；

（C）$a^2d^2-b^2c^2$；　　（D）$b^2c^2-a^2d^2$.

解 根据行列式的性质，有

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & c \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}\begin{vmatrix} d & c \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= (cb-ad)(da-cb) = -(ad-cb)^2 ,$$

故答案选（B）.

例 1.2.11 （爪形行列式）计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

解 根据行列式的性质，有

$$D_4 \xlongequal[r_1-\frac{1}{4}r_1]{\substack{r_1-\frac{1}{2}r_2 \\ r_1-\frac{1}{3}r_3}} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times 2\times 3\times 4 = -2 .$$

例 1.2.12 计算行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & -b & b \end{vmatrix}$.

解

$$D_4 \xlongequal{c_4+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} \xlongequal{c_2+c_3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2} \begin{vmatrix} a_1+a_2+a_3+a_4 & a_2+a_3+a_4 & a_3+a_4 & a_4 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$=(a_1+a_2+a_3+a_4)b^3.$$

注　在行列式的计算中，一个常用的技巧是“**滚动**”的方法，即按照一定的顺序用前一行（或前一列）的结果处理后一行（或后一列），如本题中首先利用第 4 列处理第 3 列，然后再利用第 3 列处理第 2 列，最后再利用第 2 列处理第 1 列.

1.2.4　题型四、行列式按行或列展开

行列式按行（列）展开的性质建立了一个行列式与较之低一阶行列式之间的关系，使用公式对行列式进行升、降阶再进行计算. 利用该方法计算行列式时，需要记清按行（列）展开的性质及推论中的元素乘**代数余子式**的形式.

例 1.2.13　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 5 & -2 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ -3 & -5 & -24 & 3 \end{vmatrix}$.

解　根据行列式的性质，有

$$D_4 \xlongequal[r_4-3r_1]{\substack{r_2+2r_1 \\ r_3+r_1}} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 \\ 7 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & -9 & 0 \\ -6 & -4 & -9 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第4列展开}} -\begin{vmatrix} 7 & 4 & -3 \\ 3 & 4 & -9 \\ -6 & -4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3+r_2]{r_1-r_2} -\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -9 \\ -3 & 0 & -18 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第2列展开}} (-4)\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -18 \end{vmatrix}$$

$$=(-4)\times(-72+18)=216.$$

例 1.2.14　计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$（其中 $a\neq b$）.

解　首先将行列式升阶，然后利用行列式的性质进行求解：