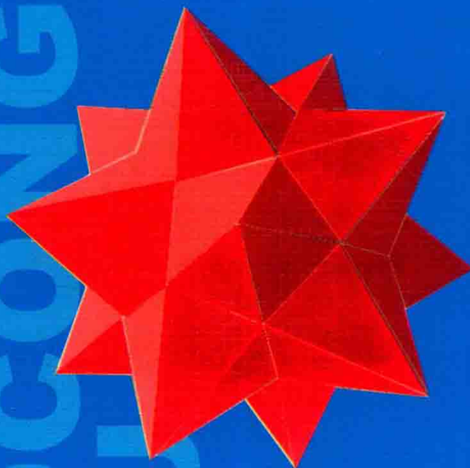
数学奥林匹克小丛书

初中卷 6

Shuxue Aolinpike XIAOCONG SHU



三角形：从全等到相似

沈文选 编著

华东师范大学出版社

Shuxue A

Xiao

Congshu

Shuxue

olinpike

数学奥林匹克小丛书

初中卷 6

三角形：从全等到相似

linpike Xiao Congshu

沈文选 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目（C I P）数据

数学奥林匹克小丛书．初中卷．三角形：从全等到相似／沈文选编著．—上海：华东师范大学出版社，2005.3

ISBN 7-5617-4074-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.沈…　Ⅲ.数学课－初中－教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第016384号

数学奥林匹克小丛书·初中卷

三角形：从全等到相似

编　　著　沈文选
策划组稿　倪　明
责任编辑　审校部编辑工作组
特约编辑　陈信漪
封面设计　高　山
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
　　　　　市场部　电话　021-62865537
　　　　　门市(邮购)　电话　021-62869887
　　　　　门市地址　华东师大校内先锋路口
业务电话　上海地区　021-62232873
　　　　　华东　中南地区　021-62458734
　　　　　华北　东北地区　021-62571961
　　　　　西南　西北地区　021-62232893
业务传真　021-62860410　62602316
http://www.ecnupress.com.cn
社　　址　上海市中山北路3663号
　　　　　邮编　200062

印 刷 者　商务印书馆上海印刷股份有限公司
开　　本　787×960　16开
印　　张　12
字　　数　206千字
版　　次　2005年4月第一版
印　　次　2005年4月第一次
印　　数　16 000
书　　号　ISBN 7-5617-4074-3/G·2314
定　　价　13.00元

出 版 人　朱杰人

本书导读

三角形是平面几何中最简单的多边形，是平面几何中最基本的图形，而平面几何是数学竞赛中的重要内容．本书全面、系统地介绍了一般三角形与特殊三角形以及三角形之间的基本性质，利用大量的竞赛题说明这些性质的应用，并且介绍了非三角形问题如何通过转化为三角形问题加以解决，其中不少内容是作者多年从事数学竞赛教学和研究的体会和总结．每一单元配有一定量的习题，供读者进行实战训练．本书对提高数学竞赛的水平有很大帮助．

沈文选　湖南师大数学与计算机科学学院教授、硕士生导师、奥林匹克数学研究所负责人，中国数学奥林匹克高级教练，全国初等数学研究协调组成员，全国高师数学教育研究会常务理事，《数学教育学报》编委，湖南省数学会初等数学委员会副主任．长期从事数学教育和数学竞赛研究，出版著作有《单形论导引——三角形的高维推广研究》、《矩阵的初等应用》、《竞赛数学教程》、《初等数学研究教程》等30种，发表论文200多篇，曾参与数学冬令营、全国高中联赛、全国初中联赛等竞赛的命题工作．

数学奥林匹克小丛书

冯志刚	第44届IMO中国队副领队 上海中学特级教师
葛　军	中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任 南京师范大学副教授
冷岗松	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 浙江大学教授、博士生导师
李伟固	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 北京大学教授、博士生导师
刘诗雄	中国数学奥林匹克委员会委员 武钢三中校长、特级教师
倪　明	数学奥林匹克小丛书总策划 华东师范大学出版社副总编辑
单　墫	第30、31届IMO中国队领队 南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席 第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编
熊　斌	第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员 华东师范大学副教授
余红兵	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 苏州大学教授、博士生导师
朱华伟	中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练 广州大学软件所常务副所长、研究员

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J.W.Milnor)、芒福德(D.B.Mumford)、奎伦(D.Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A.Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L.Fejér)、里斯(M.Riesz)、舍贵(G.Szegö)、哈尔(A.Haar)、拉多(T.Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意．这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动．

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版．这套书，规模大、专题细．据我所知，这样的丛书还不多见．这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书．

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队．他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动．华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血．我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好．

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席．

目　录

1 三角形的基本概念和性质

1.1 三角形的构成与内角和定理

由三条线段首尾顺次连结所组成的封闭图形（顺次连结所组成的重合线段，有的书中称为退化三角形或面积为零的三角形，那是另一意义上说的）叫做三角形.

每个三角形都有三条边和三个角，它们是互相联系、互相制约的，这体现在以下方面：

(1) 边与边之间的关系：两边之和大于第三边，或两边之差小于第三边.

(2) 角与角之间的关系：三个内角的和等于 $180°$，即在 $\triangle ABC$ 中有 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

例 1 已知三角形的两边长分别为 7 和 2.

(1) 如果这个三角形有两边相等，求它的周长；

(2) 如果周长是奇数，求第三边的长.

解 (1) 由题意知这个三角形的第三边长是 7 或 2，由于 $2+2<7$，所以第三边只能是 7，因此三角形的周长是 16.

(2) 设第三边长为 x，则 $7-2<x<7+2$，所以 $x=6$、7 或 8. 由于周长是奇数，所以第三边长是 6 或 8.

例 2 试证：对于正数 a、b、c，若方程 $c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2=0$ 无实根，则以 a、b、c 为长的线段可组成一个三角形（面积非 0）.（1980 年北京市竞赛题）

证明 由题设知，二次方程的判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= (a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2\\ &=-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)<0.\end{aligned}$$

而 $$a+b+c>0,$$

所以 $$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0.$$

不妨设 $a \geqslant b$, $a \geqslant c$, 显然

$$a+b-c>0, \quad c+a-b>0,$$

从而 $$b+c-a>0.$$

亦即有 $$a+b>c, \quad c+a>b, \quad b+c>a.$$

综上,以 a、b、c 为长的线段可组成一个三角形(面积非 0).

例 3 已知:用长度为 a、b、c 的线段可以作三角形. 试证:用长度为 $\frac{1}{a+c}$、$\frac{1}{b+c}$、$\frac{1}{a+b}$ 的线段也可以作成三角形.(第 37 届莫斯科数学奥林匹克题)

证明 由题设可知

$$a+b>c, \quad b+c>a, \quad c+a>b.$$

因此

$$\frac{1}{a+c}>\frac{1}{(a+b)+(a+b)}=\frac{1}{2(a+b)},$$

$$\frac{1}{b+c}>\frac{1}{(a+b)+(a+b)}=\frac{1}{2(a+b)},$$

故 $$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b}.$$

同理,

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{b+c},$$

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}.$$

所以,可用 $\frac{1}{a+c}$、$\frac{1}{b+c}$、$\frac{1}{a+b}$ 的线段作成三角形.

例 4 点 C_1、A_1、B_1 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 和 CA 上,且满足 $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1:3$. 求证:$\triangle ABC$ 的周长 p 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长 p' 之间有不等式:

$$\frac{1}{2}p<p'<\frac{3}{4}p.$$

(第 15 届全苏奥林匹克题)

证明 如图 1-1,注意到三角形两边之差小于第三边,故有

$$A_1C-CB_1<A_1B_1,$$
$$B_1A-AC_1<B_1C_1,$$
$$C_1B-BA_1<C_1A_1.$$

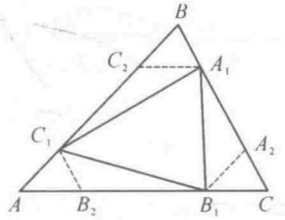


图 1-1

设 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $B_1C_1=a_1$, $C_1A_1=b_1$, $A_1B_1=c_1$, 则

$$\frac{3}{4}a-\frac{1}{4}b<c_1,$$

$$\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}c<a_1,$$

$$\frac{3}{4}c-\frac{1}{4}a<b_1.$$

三式相加,得 $$\frac{1}{2}(a+b+c)<a_1+b_1+c_1,$$

即 $$\frac{1}{2}p<p'.$$

再在△ABC 各边上截取 $A_1A_2=\frac{1}{2}a$, $B_1B_2=\frac{1}{2}b$, $C_1C_2=\frac{1}{2}c$, 易证

$$A_2B_1=\frac{1}{4}c,\quad B_2C_1=\frac{1}{4}a,\quad C_2A_1=\frac{1}{4}b.$$

又注意到三角形两边之和大于第三边,有

$$\frac{2}{4}a+\frac{1}{4}c>c_1,\quad \frac{2}{4}b+\frac{1}{4}a>a_1,\quad \frac{2}{4}c+\frac{1}{4}b>b_1.$$

三式相加,得 $$\frac{3}{4}(a+b+c)>a_1+b_1+c_1,$$

即 $$p'<\frac{3}{4}p.$$

故 $$\frac{1}{2}p<p'<\frac{3}{4}p.$$

例 5 如图 1-2, $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4+\angle5+\angle6+\angle7$ 的度数为( ).

A. $450°$　　B. $540°$

C. $630°$　　D. $720°$

(1997 年安徽部分地市联赛题)

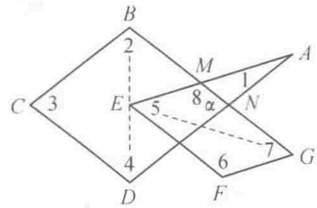


图 1-2

解　选 B. 理由:记$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$、$\angle 5$、$\angle 6$、$\angle 7$ 的顶点分别为 A、B、C、D、E、F、G,设 AE 交 BG 于 M,AD 交 BG 于 N. 记$\angle EMN=\angle 8$, $\angle DNM=\alpha$, 则

$$\alpha=180°-\angle MNA=180°-\angle 8+\angle 1.$$

即

$$\alpha+\angle 8-\angle 1=180°.$$

连 BD、EG,则

$$\angle 2+\angle 3+\angle 4+\alpha=360°,$$

$$\angle 5+\angle 6+\angle 7+\angle 8=360°.$$

从而

$$\begin{aligned}&\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6+\angle 7\\=&\angle 1+(\angle 2+\angle 3+\angle 4)+(\angle 5+\angle 6+\angle 7)\\=&\angle 1+(360°-\alpha)+(360°-\angle 8)\\=&720°-(\alpha+\angle 8-\angle 1)\\=&720°-180°=540°.\end{aligned}$$

习 题 1.1

1 有长度为下列数值的几组线段:

(i)3, 4, 5;(ii)3^2, 4^2, 5^2;(iii)$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$;(iv)$\frac{1}{3^2}$, $\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{5^2}$.

其中能组成三角形的有(　　).

A. 1 组　　B. 2 组　　C. 3 组　　D. 4 组

2 已知三角形的两边长分别为 3 和 5,则第三边 a 的取值范围是(　　).

A. $3<a<5$　　B. $3<a<8$

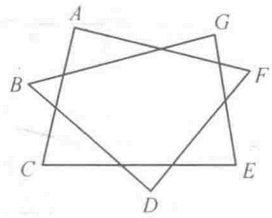
C. $2<a<5$　　D. $2<a<8$

3 如图，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G$的值等于(　　).

A. $360°$　　B. $450°$

C. $540°$　　D. $720°$

(2003年"TRULY信利杯"联赛题)



(第3题)

4 如图，$\angle CGE=\alpha$，则$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=$(　　).

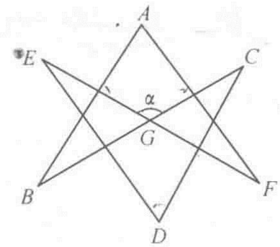
A. $360°-\alpha$

B. $270°-\alpha$

C. $180°+\alpha$

D. 2α

(1999年山东省竞赛题)



(第4题)

5 求证：任意三角形的边长a、b、c满足不等式：

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

(1972年匈牙利奥林匹克题)

1.2 三角形的重要线段

三角形的角平分线　三角形一个角的平分线与这个角的对边相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的角平分线.

三角形的中线　在三角形中，连结一个顶点和它的对边中点的线段叫做三角形的中线.

三角形的高　从三角形一个顶点向它的对边所在直线画垂线，顶点和垂足间的线段叫做三角形的高线，简称三角形的高.

三角形的中位线　连结三角形两边中点的线段叫做三角形的中位线. 中位线平行于底边且等于底边的一半.

三角形的外角平分线　三角形一个内角的邻补角的平分线与这个角的对边的延长线相交，这个角的顶点和交点之间的线段叫做三角形的外角平分线.

三角形的内角平分线上的点到这个角的两边的距离相等. 同一个三角形中，大角的角平分线长短于小角的角平分线长.

三角形中任何一边上的中线都把三角形分成面积相等的两部分. 同一个三角形中，大边上的中线短于小边上的中线.

三角形的任何一边上的高都垂直于该边. 三角形的三条高未必都在三角形的内部.

三角形的内角平分线、中线和高又有相同之处:在同一个三角形中,无论是三条中线,还是三条高,或者三条内角平分线,它们分别相交于一点.

在不混淆的情况下,有时,三角形的角平分线、中线和高也指它们所在的直线.

例1 在$\triangle ABC$中,$\angle B$的平分线与$\angle C$的外角平分线相交于点D. 如果$\angle A=27^\circ$,那么,$\angle BDC=$________. (2002年我爱数学夏令营竞赛题)

解 填13.5°. 理由:如图1-3,因为$\angle A=27^\circ$,$\angle BCE=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)$,则

$$\begin{aligned}\angle BDC&=\angle BCE-\angle CBD\\&=\frac{1}{2}(\angle A+\angle ABC)-\frac{1}{2}\angle ABC\\&=\frac{1}{2}\angle A=13.5^\circ.\end{aligned}$$

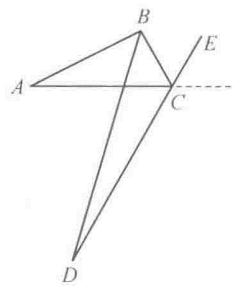


图 1-3

例2 如图1-4,AA'、BB'分别是$\angle EAB$、$\angle DBC$的平分线. 若$AA'=BB'=AB$,则$\angle BAC$的度数为________. (2003年全国联赛题)

解 填12°. 理由:设$\angle BAC$的度数为x.

因$AB=BB'$,故$\angle B'BD=2x$,$\angle CBD=4x$. 又$AB=AA'$,则

$$\angle AA'B=\angle ABA'=\angle CBD=4x.$$

因为$\angle A'AB=\frac{1}{2}(180^\circ-x)$,故

$$\frac{1}{2}(180^\circ-x)+4x+4x=180^\circ.$$

解得

$$x=12^\circ.$$

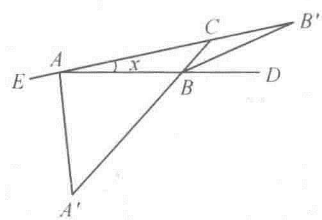


图 1-4

例3 $\triangle ABC$的边AB和BC上的高线(分别)不短于边长,试求该三角形的各个角度数. (第27届莫斯科奥林匹克题)

解 如图1-5,设AD、CE分别是BC和AB上的高线,则