



金榜图书

JINBANG BOOKS · SINCE 1997

考研数学决胜篇

考研数学

大题满分技巧

数学一

揭秘

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组·编

实用
分析思路

经典
解题范例

典型
解答题

评分
标准

阅卷人
评析

- ✓ 本书可让曾想放弃的同学得高分!
- ✓ 本书可让能得高分的同学得满分!
- ✓ 抓住攻克考研数学最后一次机遇!

双色印刷

Yes, we can!



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



考研数学

数学一

大题满分技巧

便携记忆版
揭秘

金榜考研数学命题研究组·编

本书专属：_____

我要认真、独立地学完本书内容。



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学一/金榜考研数学
命题研究组编. —西安: 西安交通大学出版社, 2014. 12
ISBN 978-7-5605-6900-0

I. ①考… II. ①金… III. ①高等数学—研究生—入学
考试—题解 IV. ①O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 287287 号

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学一

主 编:金榜考研数学命题研究组
责任编辑:王宁 荣西
封面设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地 址:西安市兴庆南路 10 号(邮编:710049)
电 话:(029)82668315(总编办)
(029)82668357 82667874(发行部)
印 刷:保定市 中画美凯印刷有限公司
开 本:850mm×1168mm 1/32
印 张:6.75
字 数:168 千字
版 次:2015 年 10 月第 1 版
印 次:2015 年 10 月第 1 次印刷
书 号:ISBN 978-7-5605-6900-0/O·485
定 价:29.80 元

图书如有印装质量问题,请联系调换 电话:(010)51906740
版权所有 侵权必究

金榜图书编辑部电话:(010)51906740
金榜图书天猫店网址:<http://sdjlts.tmall.com/>
新浪微博:@金榜图书官方微博

前 言

考研最后冲刺阶段,利用这宝贵时间提高数学答题能力,是考生至关重要的任务。数学是考研中的重中之重,而考研数学解答题 94 分,超过总分的一半。这些题目综合性强、抽象,解答起来需要严谨的推理和准确的计算。从以往考生的成绩来看,考生在解答题部分得分差距很大,直接导致数学成为最能在分数上拉开距离的考试科目。很多同学说,很想做好解答题,但就是做题无从下笔,或者做了也这错那错。

因此,我们为大家编写了这本《考研数学大题满分技巧揭秘》,以使同学们在考试中会解大题,能得高分,会做的题目力求不失分,部分理解的题目力争多得分。

本书中的题目经典,解答规范,适合考生综合复习使用。

书中的体例设计如下:

[读题联想] 如果目前为止同学们还对题中的基本概念、方法和原理不清楚,解题时肯定会碰到各种各样的问题,容易丢失一些基本分,所以同学们务必在最后完全吃透基础理论知识,深入理解基本概念、公式、定理和图表,掌握知识点。

[解题范例] 拓展解题方法,提高解题能力,规范答题格式。同学们要提高做题质量,每做完一题,就要总结其所覆盖的知识面并且归纳其所属题型,做到举一反三。希望同学们认真领会解题方法及其实质,并做到活学活用。同时,也要注意答题的方式、步骤,关键内容要写出来,一些简单过程可省略。

[阅卷者按] 帮助同学们寻找考试的感觉,使同学们保持清晰的复习思路,做题的同时感受真实考场上的氛围,尽快进入临考状态。

由于编者水平有限,本书中的不足与疏漏之处恳请读者批评指正。

祝大家复习顺利,进入理想的学校!

编 者

2015 年 10 月

2016 年金榜图书·书目

考研政治系列

书名	作者	出版时间
思想政治理论超级红宝书	徐之明	2016年1月
思想政治理论红宝书逻辑图解	徐之明	2016年1月
考研报考知识大揭秘	徐之明	2016年1月
思想政治理论红宝书超级900题	徐之明	2016年3月
思想政治理论近年真题心解	徐之明	2016年3月
思想政治理论新增考点暨核心考点精学精练	徐之明	2016年9月
形势与政策以及当代世界经济与政治	徐之明	2016年10月
思想政治理论红宝书背诵精华掌中宝	徐之明	2016年10月
思想政治理论分析题核心预测	徐之明	2016年11月
思想政治理论金榜题名压轴四套卷	徐之明	2016年11月
思想政治理论大纲命题解析	米 鹏	2016年7月
思想政治理论精雕细刻1000题	米 鹏	2016年8月
思想政治理论大串讲	米 鹏	2016年9月
思想政治理论最后20天必背20题	米 鹏	2016年11月

考研数学系列

书名	作者	出版时间
数学复习全书(基础篇)(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安	2016年1月
数学基础过关660题(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安	2016年1月
数学复习全书(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安	2016年1月
数学历年真题权威解析(数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安	2016年1月
数学历年真题权威解析(试卷版) (数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安	2016年3月
李永乐数学决胜冲刺6+2 (数学一/数学二/数学三)	李永乐 王式安	2016年7月
线性代数辅导讲义	李永乐	2016年2月
概率论与数理统计辅导讲义	王式安	2016年3月
高等数学辅导讲义	武忠祥	2016年3月
数学公式的奥秘	单立波	2016年3月

概率论与数理统计辅导讲义	曹显兵	2016年3月
高等数学(微积分)辅导讲义	曹显兵 刘喜波	2016年3月
高数不过如此	章纪民	2016年7月
大题满分技巧揭秘(数学一/数学二/数学三)	金榜考研 数学命题研究组	2016年8月

考研英语系列

书名	作者	出版时间
石春祯考研英语阅读理解220篇(基础篇)	石春祯	2016年1月
石春祯考研英语阅读理解220篇(提高篇)	石春祯	2016年7月
考研英语语法大揭秘	王国清	2016年5月
考研英语长难句大揭秘	刘晓艳	2016年5月
考研英语词汇强记忆	刘博强	2016年3月
考研英语作文完美思路	刘博强	2016年6月
考研英语高分思维	刘博强	2016年7月
命题人历年考研英语真题解析及复习思路(试卷版) (英语一)	金榜考研 英语命题研究中心	2016年6月
命题人历年考研英语真题解析及复习思路(试卷版) (英语二)	金榜考研 英语命题研究中心	2016年6月
命题人新万能作文(英语一)	金榜考研 英语命题研究中心	2016年6月
命题人新万能作文(英语二)	金榜考研 英语命题研究中心	2016年6月
命题人考研英语词汇全集	金榜考研 英语命题研究中心	2016年12月
命题人考研英语阅读11讲(英语一)	金榜考研 英语命题研究中心	2016年3月
命题人考研英语阅读11讲(英语二)	金榜考研 英语命题研究中心	2016年3月
命题人考研英语语法18讲	金榜考研 英语命题研究中心	2016年3月

考研专业课系列

书名		主编	出版时间
西 医	刘应科考研西医综合辅导讲义(上、下册)	刘应科	2016年1月
	刘应科考研西医综合核心考点突破与速记(口袋版)	刘应科	2016年3月
	刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2016年4月
	刘应科考研西医综合历年真题精析及复习思路(试卷版)	刘应科	2016年4月
	刘应科考研西医综合配套3000题	刘应科	2016年8月
	刘应科考研西医综合终极预测试卷	刘应科	2016年11月
中 医	刘应科考研中医综合辅导讲义(上、下册)	刘应科	2016年1月
	刘应科考研中医综合核心考点突破与速记(口袋版)	刘应科	2016年3月
	刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路	刘应科	2016年4月
	刘应科考研中医综合历年真题精析及复习思路(试卷版)	刘应科	2016年4月
	刘应科考研中医综合配套3000题	刘应科	2016年8月
	刘应科考研中医综合终极预测试卷	刘应科	2016年11月

国家执业医师资格考试系列

书名		主编	出版时间
临 床	刘应科临床执业医师实践技能应试指南	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业医师综合笔试预测试卷	刘应科	2016年12月

中 医	刘应科中医执业医师实践技能应试指南	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中医执业医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中医执业医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业医师综合笔试预测试卷	刘应科	2016年10月
中 西 医 结 合	刘应科中西医结合执业医师实践技能应试指南	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业医师综合笔试预测试卷	刘应科	2016年10月

国家执业助理医师资格考试系列

书名		主编	出版时间
临 床	刘应科临床执业助理医师实践技能应试指南	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业助理医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2016年12月
	刘应科临床执业助理医师综合笔试预测试卷	刘应科	2016年12月

中 医	刘应科中医执业助理医师实践技能应试指南	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业助理医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2016年10月
	刘应科中医执业助理医师综合笔试预测试卷	刘应科	2016年10月
中 西 医 结 合	刘应科中西医结合执业助理医师实践技能应试指南	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业助理医师实践技能通关掌中宝	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试应试指南(上、下册)	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试基础过关3000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试强化特训2000题	刘应科	2016年11月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试历年真题精析	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试历年真题精析(试卷版)	刘应科	2016年10月
	刘应科中西医结合执业助理医师综合笔试预测试卷	刘应科	2016年10月

国家教师资格考试系列

书名	作者	出版时间
综合素质(幼儿园)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年3月
保教知识与能力(幼儿园)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年3月
终极预测试卷(幼儿园)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年7月
综合素质·6天熟背重点(幼儿园)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年10月
保教知识与能力·6天熟背重点(幼儿园)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年10月

综合素质(小学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年3月
教育教学知识与能力(小学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年3月
终极预测试卷(小学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年7月
综合素质·6天熟背重点(小学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年10月
教育教学知识与能力·6天熟背重点(小学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年10月
综合素质(中学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年3月
教育知识与能力(中学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年3月
终极预测试卷(中学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年7月
综合素质·6天熟背重点(中学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年10月
教育知识与能力·6天熟背重点(中学)	国家教师资格考试 命题研究中心	2016年10月

大学英语四、六级系列

书名	作者	出版时间
命题人大学英语四级新题型预测试卷(基础篇)	金榜大学英语四级 命题研究中心	2016年7月
命题人大学英语四级新题型预测试卷(预测篇)	金榜大学英语四级 命题研究中心	2016年7月
命题人大学英语六级新题型预测试卷(基础篇)	金榜大学英语六级 命题研究中心	2016年7月
命题人大学英语六级新题型预测试卷(预测篇)	金榜大学英语六级 命题研究中心	2016年7月
命题人大学英语四级核心2000词	金榜大学英语四级 命题研究中心	2016年12月
命题人大学英语六级核心3000词	金榜大学英语六级 命题研究中心	2016年12月

英语口语系列

书名	作者	出版时间
英语口语终极会话宝典(日常篇)	[美] 马修·曼宁	2016年1月
英语口语终极会话宝典(习语篇)	[美] 马修·曼宁	2016年1月
英语口语终极会话宝典(亲子篇)	[美] 马修·曼宁	2016年1月
英语口语终极会话宝典(商务篇)	[美] 马修·曼宁	2016年1月
英语口语终极会话宝典(购物篇)	[美] 马修·曼宁	2016年1月
英语口语终极会话宝典(电影篇)	[美] 马修·曼宁	2016年1月

世界文学名著系列

书名	作者	出版时间
简·爱	[英] 夏洛蒂·勃朗特	2016年9月
小王子	[法] 圣埃克苏佩里	2016年9月
了不起的盖茨比	[美] 菲茨杰拉德	2016年9月
瓦尔登湖	[美] 亨利·戴维·梭罗	2016年9月
呼啸山庄	[英] 艾米莉·勃朗特	2016年9月
双城记	[英] 狄更斯	2016年9月

中小幼阅读系列

书名	作者	出版时间
亲子睡前微童话 100 篇(爸爸卷)	谭旭东	2016年1月
亲子睡前微童话 100 篇(妈妈卷)	谭旭东	2016年1月
作文方法大百科·记叙文法门	刘再平	2016年4月
作文方法大百科·说明文法门	刘再平	2016年4月
作文方法大百科·议论文法门	刘再平	2016年4月
作文方法大百科·想象作文法门	刘再平	2016年4月
朝花夕拾	鲁迅	2016年10月
爱丽丝梦游仙境	[英] 刘易斯·卡罗尔	2016年10月
飞鸟集	[印] 泰戈尔	2016年10月

海底两万里	[法] 凡尔纳	2016年10月
假如给我三天光明	[美] 海伦·凯勒	2016年10月
昆虫记	[法] 法布尔	2016年10月
名人传	[法] 罗曼·罗兰	2016年10月
木偶奇遇记	[意] 卡尔洛·科洛迪	2016年10月
伊索寓言	[古希腊] 伊索	2016年10月
老人与海	[美] 海明威	2016年10月

以上图书书名及出版时间仅供参考,以实际出版物为准。

以上图书均属北京时代巨流文化有限公司!

目 录

高等数学	(1)
线性代数	(103)
概率论与数理统计	(150)

高等数学

1 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{3}{n}} - 3 \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2}$.

读题联想 本题是求“ 1^∞ ”型未定式数列的极限,除利用极限的四则运算法则、洛必达法则以及等价无穷小代换外,还需要首先把数列极限转化为适当的函数极限.

解题范例

【解】 设函数 $f(x) = (e^{3x} - 3 \tan x)^{\frac{1}{x^2}}$ 和数列 $x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, 3, \dots)$,

则

$$f(x_n) = \left(e^{\frac{3}{n}} - 3 \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0^+.$$

计算可得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{3x} - 3 \tan x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{3x} - 3 \tan x)}{x^2}} = e^J, \quad 1 \text{ 分}$$

其中

$$\begin{aligned} J &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(e^{3x} - 3 \tan x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - 3 \tan x - 1}{x^2} \quad 3 \text{ 分} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} - \sec^3 x}{x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x} \cos^2 x - 1}{x} \\ &= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} (3e^{3x} \cos^2 x - 2e^{3x} \cos x \sin x) = \frac{9}{2}. \quad 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{3}{n}} - 3 \tan \frac{1}{n} \right)^{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^J = e^{\frac{9}{2}}. \quad 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

阅卷者按 本题满分 10 分,难度不大.

(I) 一般来说,对于 1^∞ 型未定式 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \ln f(x)}$,利用等价无穷小代换 $\ln f(x) \sim f(x) - 1$ 化为求极限 $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)[f(x)-1]}$,常能简化计算.

(II) 利用函数极限与洛必达法则求数列极限的理论根据是:

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则对任何数列 $\{x_n\}$, 只要它满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 就有

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 则对任何数列 $\{x_n\}$, 只要它满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$, 就有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.



左脑休息室



20 个影响你一生的小改变(一)

Small, simple life changes can be powerful. Implementing some of these changes can literally change your entire life.

How do you change? Take on one change at a time, and go slowly. Implement each change consistently so that it becomes a habit. Don't do too much too fast. What follows is a list of changes that are simple, yet incredibly powerful. Some are obvious and some aren't. I hope they serve as reminders of useful changes.

生活中一些细微简单的改变有着不可低估的作用。一些改变甚至可以改变你的整个生活。

如何改变呢?一次做出一种改变,慢慢来,并始终如一地坚持,形成一种习惯。不要贪多求快。下面列出一些改变,虽然简单,作用却难以置信。有些作用明显,而有的不易觉察。我希望下列条目能提醒你去做一些有益身心的改变。

1. Walk daily / 每天散步

We humans aren't supposed to be sedentary human beings. We are born to run, but even more so to walk.

人类不适于久坐。我们生来善跑,走路更不在话下。

Walking every day is good for your physical health. But more importantly, it's good for your mind. Walking is a joy. You are outside without distractions. You may even see people. And there's few better ways to boost your mood.

每天散步有益于身体健康。更重要的是,它还有助于心理健康。在室外散步,令人愉快,远离烦恼,还可以接触人群。没有什么更好的方法比散步更能带给你好心情。

2 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+n^6} \right]$.

读题联想 数列极限, 转化成求函数极限.

解题范例

【解】 先求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right]$

2分

令 $t = \frac{1}{x}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0^+$,

4分

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{1+x^6} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{2t} \right) e^t - \sqrt{1 + \frac{1}{t^6}} \right]$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(1-t + \frac{1}{2}t^2)e^t - \sqrt{1+t^6}}{t^3}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}t^2 e^t - \frac{3t^5}{\sqrt{1+t^6}}}{3t^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}e^t - \frac{3t^3}{\sqrt{1+t^6}}}{3} = \frac{1}{6}.$$

9分

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(n^3 - n^2 + \frac{n}{2} \right) e^{\frac{1}{n}} - \sqrt{1+n^6} \right] = \frac{1}{6}$.

10分

阅卷者按 本题满分10分. 难点是想到将数列转化成函数来求极限, 利用“倒代换”, 洛必达法则求出极限后, 不要忘了将结果代回数列极限, 这样的失分很可惜.



左脑休息室



雨打梨花深闭门, 忘了青春, 误了青春. 赏心乐事共谁论? 花下销魂, 月下销魂. 愁聚眉峰尽日颦, 千点啼痕, 万点啼痕. 晓看天色暮看云, 行也思君, 坐也思君.

——唐寅《一剪梅·雨打梨花深闭门》

3 设常数 $p > 0$, 求极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$$

并证明: 当 $n = 1, 2, 3, \cdots$ 时

$$\left| \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I \right| \leq \frac{1}{n}.$$

读题联想 n 项和的数列极限要注意考虑定积分的定义,

注意 I 与 $\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ 之间的差别.

解题范例

【解】

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n},$$

其中 $f(x) = x^p$.

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n}$ 可以看成是函数

$f(x) = x^p$ 在区间 $[0, 1]$ 被 n 等分, 并取 $\xi_k = \frac{k}{n}$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) 时的积分和. 由函数 $f(x) = x^p$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续知 $f(x) = x^p$ 在区间 $[0, 1]$ 上可积, 故

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}, p > 0.$$

又因

$$\begin{aligned} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n} - \int_0^1 x^p dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^p dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n}\right)^p dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} x^p dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^p - x^p \right] dx, \end{aligned}$$

且对于 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$, 有

$$0 \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^p - x^p \right] dx$$

1分

3分

5分