应用型本科院校特色教材

高等数学

下册

■ 主编　叶海江　孙晓祥

GAODENG SHUXUE

中国人民大学出版社

应用型本科院校特色教材

高等数学
（下册）

主　编　叶海江　孙晓祥
副主编　杜凤娥　陈晓弟　张书欣

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下册）/叶海江，孙晓祥主编. —北京：中国人民大学出版社，2016.8
ISBN 978-7-300-23238-6

Ⅰ.①高… Ⅱ.①叶…②孙… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 185458 号

应用型本科院校特色教材
高等数学（下册）
主　编　叶海江　孙晓祥
副主编　杜凤娥　陈晓弟　张书欣
Gaodeng Shuxue（Xiace）

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　次**	2016 年 8 月第 1 版
印　张	10.75	**印　次**	2016 年 8 月第 1 次印刷
字　数	248 000	**定　价**	26.00 元

前言

本书是吉林省教育科学“十二五”规划课题《应用型本科院校高等数学教学中学生创新能力培养的研究与实践》的主要成果，是项目组在多年应用型本科数学教学改革与实践的基础上，运用集体智慧，通力合作的结晶。

本书在编写中注意贯彻“加强基础、注重应用、增加弹性、兼顾体系”的原则。编写中紧密结合大众化高等教育背景下应用型本科院校生源的实际，注重理论联系实际、深入浅出、删繁就简、重点突出、难点分散并兼顾直观性；着重讲清问题的思路和方法的应用，变严格的理论证明为通俗的语言描述说明，降低理论难度，强化实际运用，使教材具有易教、易自学的特点。本教材体现了以下特点：

一是兼顾与中学数学的过渡与衔接。由于高考大纲以及中学教材体系的调整，对于反三角函数和极坐标内容中学都没有学习，本教材做了及时补充。

二是本书注重数学思想方法的渗透，注重数学在各方面的应用。不过于强调理论上的推导，淡化繁杂的数学计算，同时追求科学性与实用性的双重目标，以利于应用型本科院校学生掌握数学的基本思想与方法，提高科学素质，增强运用数学来进行分析和解决实际问题的能力。

三是本教材适合于应用型本科院校的不同专业、不同学时高等数学课程的教学使用。应用型本科院校基本上都是多学科型院校，如果不同专业选择不同类别的教材，会给教材订购和教学带来诸多不便。然而纵观工科类、理工类、经济类、农科类等高等数学教材，内容体系大体相同，无外乎就是应用部分的案例不同而已。本教材顺应上述需求，将各种应用基本全部列出，供不同专业、不同学时的课程使用时选择。

四是本教材配备学习指导书，含有内容提要、基本要求、疑难解析、典型范例、习题选解等环节。能够帮助学生很快地掌握教材中的重点、难点，了解习题的类型及解题思想

方法，同时进一步补充理论和习题的深度。

本书执笔与统稿者分工如下：

第五章——张书欣；第六章——陈晓弟；第七章——孙晓祥；第八章——叶海江；第九章——杜凤娥。全书由叶海江教授策划与统稿。

本书内容丰富，应用背景广泛，为应用型本科院校不同专业的教学提供充分的选择余地，对超出“教学基本要求”的部分标 * 号注明，在教学实际中可视情况选用，教学时数亦可灵活安排。本教材也可作为其他理工科院校的教学参考书。

在多年的改革实践中，项目组得到了吉林农业科技学院广大师生的热情支持，受到许多专家与院校同行的关注和鼓励。对此我们表示衷心的感激！

中国人民大学出版社以严谨的科学态度和高度的责任心对书稿严格把关，并确保印刷质量，力求把精品教材呈献给广大师生，作者对此表示由衷的谢意！

由于编写时间仓促，书中难免存在疏漏和不足，我们真诚地欢迎专家与广大师生多提宝贵意见，以利在今后的改革中不断完善。

吉林省教育科学规划课题项目组
暨《高等数学》教材编写组
2016 年 8 月

目　录

第五章

向量代数与空间解析几何

我们知道,代数学的优越性在于推理方法的程序化.鉴于这种优越性,人们产生了用代数方法研究几何问题的思想,这就是解析几何的基本思想.

在平面解析几何中,通过坐标法把平面上的点与一对有序的数对应起来,把平面上的图形和方程对应起来,从而可以用代数方法来研究几何问题.空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

本章先引进向量的概念及运算,然后介绍空间解析几何.正如平面解析几何的知识对于学习一元函数微积分是不可缺少的一样,空间解析几何的知识对于以后学习多元函数微积分学也将起到重要作用.所以本章可看作学习多元函数微积分的预备知识.

第一节　向量及其线性运算

一、向量概念

在日常生活中,常遇到两种量,一种是只需用大小就能表示的量,如温度、质量、体积、功等,这种量称为数量(标量);另一种是既需要大小表示,同时还要指明方向的量,如力、位移、速度、电场强度等,这种量称为向量(矢量).

在数学上,常用一条有方向的线段,即有向线段来表示向量.在选定长度单位后,这个有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.如图 5—1 所示,以 A 为起点、B 为终点的有向线段所表示的向量记作$\overrightarrow{AB}$.为简便起见,亦可用一个粗体字母表示向量,如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{F}$ 等.

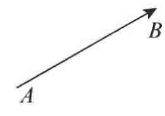

图 5—1

向量的大小称为向量的**模**,记为$|\overrightarrow{AB}|$,$|\vec{a}|$,$|\vec{b}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**,记作:$\vec{e}$. 模等于零的向量称为**零向量**,记作 0 或 $\vec{0}$. 零向量的方向可看作是任意的.

在实际问题中,有些向量与其起点有关(如一个力与该力的作用点的位置有关,质点运动的速度与该质点的位置有关),有些向量与其起点无关. 我们把与起点无关的向量称为**自由向量**. 以后如无特别说明,我们所讨论的向量都是自由向量. 由于自由向量只考虑其大小和方向. 因此,我们可以把一个向量自由平移,而使它的起点位置为任意点,这样,今后如有必要,就可以把几个向量移到同一个起点.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **相等**. 记为 $\boldsymbol{a}=\mathbf{b}$. 于是,一个向量与它经过平移以后所得的向量是相等的.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量,称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记为 $-\boldsymbol{a}$.

设两非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$. 任取空间一点 o,作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 规定不超过 π 的$\angle AOB$ (设$\theta=\angle AOB$,$0\leqslant\theta\leqslant\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**(见图 5—2),记作$(\widehat{a,b})=\theta$ 或$(\widehat{b,a})=\theta$. 特别地,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$(\widehat{a,b})=0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$(\widehat{a,b})=\pi$.

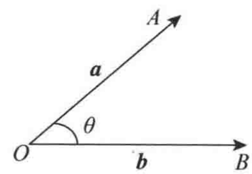

图 5—2

如果两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反,则称这**两个向量平行**. 当两个平行向量的起点放在同一点时,它们的终点和公共起点应在同一条直线上. 因此,两向量平行,又称为**两向量共线**.

类似地,设有 $k(k\geqslant3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时. 如 K 个终点和公共起点在一个平面上,则称这 k **个向量共面**.

二、向量的线性运算

向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算统称为向量的线性运算.

1. 向量的加法与减法

根据力学中关于力的合成法则,可以用平行四边形法则或三角形法则求两个力的合力. 对速度、位移等的合成均可按这两种方法进行. 因此,我们规定如下:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$. 连接 AC(见图 5—3),则向量$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

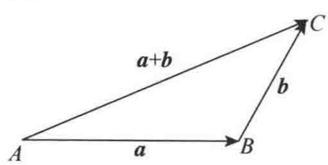

图 5—3

求 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 也可用下述的平行四边形法则:当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB,AD 为边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC(见图 5—4),则向量$\overrightarrow{AC}$即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

向量的加法满足下列运算规律:

(1)**交换律** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2)**结合律** $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

由向量相加的三角形法则,如图 5—4 所示,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$,所以向量加法的交换律成立. 又如图 5—5 所示,先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再加上 $\boldsymbol{c}$,即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,而先

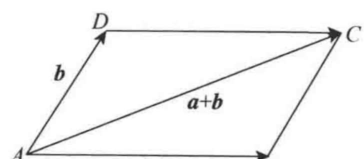

图 5—4

作 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，再加上 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，则得到同一结果. 所以向量加法的结合律成立.

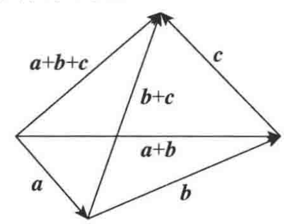

图 5—5

由于向量加法满足交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ $(n\geqslant 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$，并可按向量相加的三角形法则相加如下：以前一个向量的终点作为下一个向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一个向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求的和. 如图 5—6 所示，有 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$.

向量的减法是向量加法的逆运算，我们规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$. 由此知，向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差就是向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $-\boldsymbol{a}$ 的和(见图 5—7).

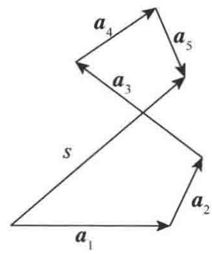

图 5—6

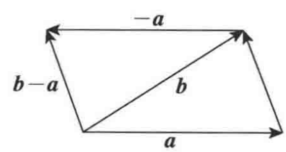

图 5—7

特别地，当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 时，有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

显然，任意向量 $\overrightarrow{AB}$ 及点 O，有 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

因此，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 移到同一起点 O，则从 $\boldsymbol{a}$ 的终点 A 向 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 所引向量就是 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ (见图 5—8).

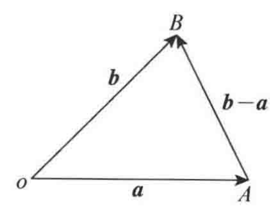

图 5—8

由于三角形两边之和不大于第三边，则有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \text{ 及 } |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号当且仅当 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线时成立.

例 1 对角线互相平分的四边形是平行四边形

证明：见图 5—9，设四边形 $ABCD$ 的对角线交于 M，由于 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，故 $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}$. 即 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. 这说明线段 AD 与 BC 平行且长度相同. 因此，四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

2. 向量与数的乘法

实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是按下面规定所确定的一个向量：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 即向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍.

(2) 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反；当 $\lambda=0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

特别的，当 $\lambda=\pm1$ 时，有 $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

数与向量的乘法简称为向量的**数乘**，它满足下面的运算规律：

设 $\lambda.\mu$ 为实数，对向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 有

(1) **结合律**：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

(2) **分配律**：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$. $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

由向量的数乘规定来证明以上两定律,这里从略了.

例 2 在平行四边形 $ABCD$ 中,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示向量$\overrightarrow{MA}$,$\overrightarrow{MB}$,$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$,这里 M 为平行四边形对角线的交点,如图 5—9 所示.

解 由于平行四边形的对角线相互平分,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$,即$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}$. 故$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;

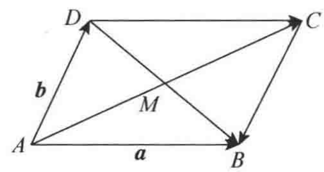

图 5—9

同理,$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系,即有

定理 1 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,则向量 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$ 的充要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性,

设 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$,取$|\lambda|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 λ 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 λ 取负值,即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,这是由于此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向,且$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

再证实数 λ 的唯一性,设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,两式相减,便得$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=0$ 即$|\lambda-\mu||\boldsymbol{a}|=0$,因$|\boldsymbol{a}|\neq0$,故$|\lambda-\mu|=0$,即 $\lambda=\mu$,证毕.

例 3 证明平行四边形的对角线互相平分.

证明 如图 5—10 所示,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$. 设 E 为对角线 AC 与 BD 的交点,则存在实数 λ,μ,使得$\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;$\overrightarrow{ED}=\mu\overrightarrow{BD}=\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

又因为$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}$故 $\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$

即$(1-\lambda-\mu)\boldsymbol{b}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}$.

因向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行,从而使上式成立的 λ 和 μ 要满足方程组$\begin{cases}1-\lambda-\mu=0\\ \lambda-\mu=0\end{cases}$因此 $\mu=\frac{1}{2}$,$\lambda=\frac{1}{2}$. 即 E 是对角线 AC 与 BD 中点.

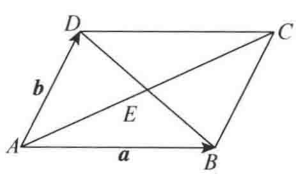

图 5—10

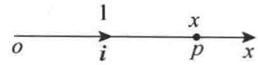

图 5—11

定理 1 是建立数轴的理论依据,确定一数轴,需一定点、一定方向及单位长度,而一个单位向量既确定了方向,又确定了单位长度,因此,给定一个点及一单位向量就能确定一条数轴.

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定数轴 ox(见图 5—11),则对于轴上任一点 p,对应一向量$\overrightarrow{OP}$. 由于$\overrightarrow{OP}//\boldsymbol{i}$,故必存在唯一实数 x,使得$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,其中 x 称为数轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值,此时,$\overrightarrow{OP}$与实数 x 一一对应了,从而

$$\text{点 } p\leftrightarrow\text{向量}\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow\text{实数 } x$$

即数轴上的点 p 与实数 x 一一对应. 定义实数 x 为数轴上点 p 的坐标. 由此知，轴上点 p 的坐标为 x 的充要条件是$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

习题 5—1

1. 用向量法证明：连结三角形两边中点的线段平行于第三边且等于第三边的一半.
2. 要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足(　　　　　)；
要使 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 成立，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 应满足(　　　　　).
3. 设 ΔABC 的三条中线为 AD,BE,CF. 证明：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$.
4. 设两个非零向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共起点，求与它们的夹角的平分线平行的向量.

第二节　点的坐标与向量的坐标

许多关于向量的问题仅靠几何方法是很难解决的，只有将向量与数量联系起来，把向量的运算归结为相应的数的代数运算，向量理论才能得到广泛的应用，为此我们在空间中引进空间直角坐标系，建立空间中点与实数的关系，并由此建立向量与有序实数组的关系.

一、空间直角坐标系与点的坐标

在空间取一个定点 O，过点 O 作三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴，依次记为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)，z 轴(竖轴)，统称为**坐标轴**，此三条坐标轴的正向符合右手法则，即右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴正向时，竖起的大拇指的指向就是 z 轴的正向. 这样三条坐标轴就组成了**空间直角坐标系**，$Oxyz$ 坐标系或$[o;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$坐标系(见图 5—12)$O$ 称为**坐标原点**.

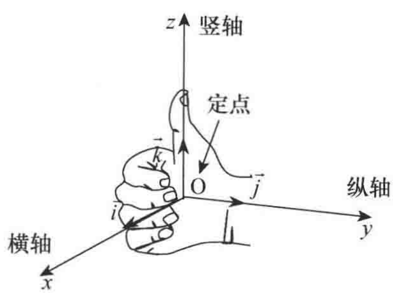

图 5—12

每两条坐标轴确定的平面称为坐标平面，简称为**坐标面**. 例如，x 轴与 y 轴所确定的坐标面称为 xoy 面，类似的有 yoz 面，zox 面. 这三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**，其中 $x>0,y>0,z>0$ 部分为第Ⅰ卦限，第Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限在 xoy 面的上方，按逆时针方向确定，第Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限在 xoy 面的下方，由第Ⅰ卦限正下方的第Ⅴ卦限，按逆时针方向确定(见图 5—13).

定义了空间直角坐标系后，即可利用一组有序实数来确定空间点的位置. 设 M 为空间

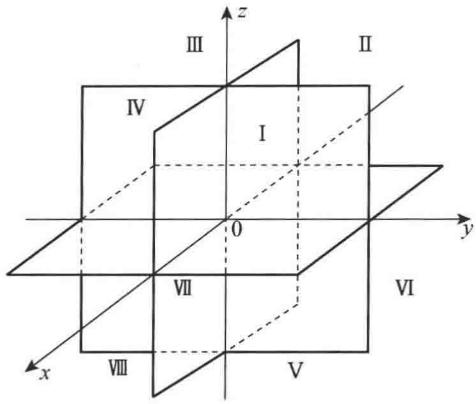

图 5—13

的一点,过点 M 分别作垂直于三个坐标轴的平面,与三个坐标轴分别相交于 P,Q,R 三点,且这三点在 x 轴,y 轴,z 轴上的坐标依次为 x,y,z,则点 M 唯一地确定了一个有序数组(x,y,z);反之,设给定一个有序数组(x,y,z),且它们分别在 x 轴,y 轴,z 轴上依次对应于 P,Q 和 R 点,若过 P,Q 和 R 点分别作平面垂直于所在坐标轴,则这三个平面确定了唯一的交点.这样,空间的点就与有序数组(x,y,z)之间建立了一一对应关系(见图 5—14).有序数组(x,y,z)就称为**点 M 的坐标**,记为 $M(x,y,z)$,x,y,z 依次分别称为横坐标,纵坐标和竖坐标.

坐标面和坐标轴上的点,其坐标各有一定的特征.如 xoy 面上的点,有 $z=0$;xoz 面上的点,有 $y=0$;yoz 面上的点,有 $x=0$.又如 x 轴上的点,有 $y=z=0$;y 轴上的点,有 $x=z=0$;z 轴上的点,有 $x=y=0$.而坐标原点 O 的坐标为$(0,0,0)$.

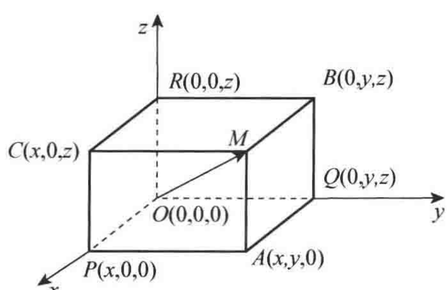

图 5—14

二、空间两点间的距离公式

空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)M_2(x_2,y_2,z_2)$,求它们之间的距离 $d=|M_1M_2|$.过点 M_1,M_2 各作三个平面分别垂直与三条坐标轴,形成如图 5—15 所示的长方体,则

$$\begin{aligned}d^2&=|M_1M_2|^2=|M_1Q|^2+|QM_2|^2=|M_1P|^2+|PQ|^2+|QM_2|^2\\&=|M'_1P'|^2+|P'M'_2|^2+|QM_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2\end{aligned}$$

所以 $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

特别地,点 $M(x,y,z)$与坐标原点 $O(0,0,0)$的距离为:

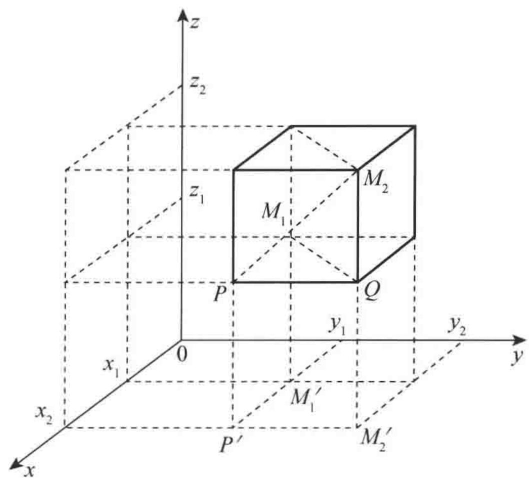

图 5—15

$d=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 1　在 y 轴上求与点 $A(3,-1,1)$ 和点 $B(0,1,2)$ 等距离的点.

解　因所求点 M 在 y 轴上，可设其坐标为 $(0,y,0)$ 依题意有 $|MA|=|MB|$. 即

$$\sqrt{(0-3)^2+(y+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(0-0)^2+(y-1)^2+(0-2)^2}$$

解得 $y=-\dfrac{3}{2}$，故所求点为 $M(0,-\dfrac{3}{2},0)$.

三、向量的坐标及向量线性运算的坐标表示

为实现向量运算的代数化，我们将向量按三个坐标轴方向进行分解，并且用坐标来表示向量.

任给向量 $\boldsymbol{r}$，将 $\boldsymbol{r}$ 平行移动，使其起点与坐标原点重合，终点记为 M，则有 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$. 以 OM 为对角线，三条坐标轴为棱作长方体 $RCMB-OPAQ$（见图 5—14）.

由向量的加法法则，有 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$，则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

上式称为向量 r 的坐标分解式，$x\boldsymbol{i}$，$y\boldsymbol{j}$，$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x 轴，y 轴，z 轴方向的分向量.

显然，给定向量 $\boldsymbol{r}$，就确定了点 M 及 $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$，$\overrightarrow{OR}$ 三个分向量，进而确定了 x,y,z 三个有序数；反之，给定三个有序数 x,y,z，也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M，于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x,y,z 之间存在一一对应关系

$$M\leftrightarrow\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\leftrightarrow(x,y,z)$$

称有序数 x,y,z 为**向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标**，记为 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$

向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$，称为点 M 关于原点 O 的**向径**.

由上知，一个点与该点的向径有相同的坐标，这里的记号 (x,y,z) 既表示点 M，又表示向量 $\overrightarrow{OM}$，因此，在看到记号 (x,y,z) 时，要注意从上下文去认清它是表示向量 $\overrightarrow{OM}$，还是表示点 M.

如图 5—14 所示，向量 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ 的模为

$$|\boldsymbol{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

如在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中任给定两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,$M_2(x_2,y_2,z_2)$,则有:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$
$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$
$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

现在来推导向量线性运算的坐标表示式

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$

由向量的加法与数乘的运算律,有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x)\boldsymbol{i}+(a_y-b_y)\boldsymbol{j}+(a_z-b_z)\boldsymbol{k}$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k},(\lambda\text{ 为实数})$$

从而有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z)$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

由此可见,对向量进行加减及数乘运算,只需对向量的各个坐标分别进行相应的数量运算即可.

由上一节定理 1 知,当向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$ 时,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 等价于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$($\lambda$ 为实数).按坐标表示即为 $(b_x,b_y,b_z)=\lambda(a_x,a_y,a_z)$,

由此说明向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应坐标成比例,$\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$

例 2 已知 $A(1,2,-1)$,$B(0,3,2)$ 及 $C(0,0,4)$.求 ΔABC 的重心坐标.

解 如图 5—16 所示,

设 D,E 分别是 BC,AC 的中点,则 AD 与 BE 的交点 G 为 ΔABC 的重心.$\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,而

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=(-1,1,3)+\frac{1}{2}(0,-3,2)$$
$$=\left(-1,-\frac{1}{2},4\right)$$

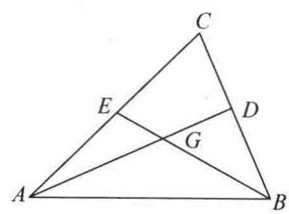

图 5—16

于是 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}=(1,2,-1)+\dfrac{2}{3}\left(-1,-\dfrac{1}{2},4\right)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$

即 ΔABC 的重心坐标为 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3},\dfrac{5}{3}\right)$.

例 3 已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda\neq-1$,在直线 AB 上求点 M,使 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$.

解 如图 5—17 所示,

由于 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}$

因此 $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})$,从而 $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB})$,以 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 的坐标(即点 A、

点 B 的坐标)代入，即得$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$这就是点$M$ 的坐标.

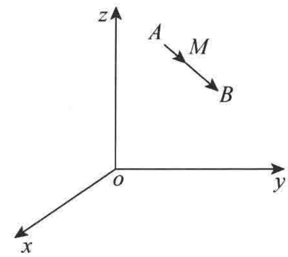

图 5—17

本例中的点 M 称为有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比分点，特别地，当 $\lambda=1$ 时，得线段$\overrightarrow{AB}$的中点$M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$.

例 4　设空间两点 $A(3,-1,2)$，$B(1,1,0)$，求和$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量 $\boldsymbol{e}$.

解　$\overrightarrow{AB}=(1-3,1-(-1),0-2)=(-2,2,-2)$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{3}$$

于是和$\overrightarrow{AB}$平行的单位向量为$\boldsymbol{e}=\pm\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}=\pm(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

四、方向角、方向余弦

为了表示非零向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向，我们把 $\boldsymbol{r}$ 与 x 轴、y 轴、z 轴正向的夹角分别记为 α,β,γ，称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的**方向角**. 方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 叫做 $\boldsymbol{r}$ 的**方向余弦**.

设向量 $r=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，如图 5—18 所示，

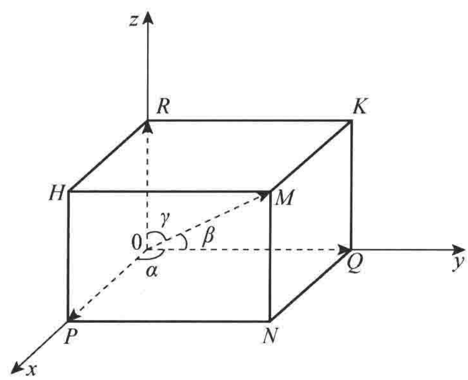

图 5—18

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|},\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}$$

易见$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，而与 $\boldsymbol{r}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{r}^0=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

例 5　设已知两点 $M_1(4,\sqrt{2},1)$和 $M_2(3,0,2)$. 计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模，方向余弦和方向角.

解　$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(3-4)^2+(0-\sqrt{2})^2+(2-1)^2}=2$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,-\sqrt{2},1)=2\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$$

所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\frac{1}{2}$

$\alpha=\frac{2}{3}\pi,\beta=\frac{3}{4}\pi,\gamma=\frac{\pi}{3}.$

例 6 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的两个方向余弦为 $\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3}$，又 $|\boldsymbol{a}|=6$. 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

解 因为 $\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3}$，

所以 $\cos\gamma=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\pm\frac{2}{3}$

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha=6\cdot\frac{1}{3}=2$$

$$a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta=6\cdot\frac{2}{3}=4$$

$$a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma=6\cdot\left(\pm\frac{2}{3}\right)=\pm4$$

即 $\boldsymbol{a}=(2,4,4)$ 或 $\boldsymbol{a}=(2,4,-4)$.

五、向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定了 $\boldsymbol{u}$ 轴（见图 5—19）.

任给定向量 $\boldsymbol{r}$，作 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$，再过点 M 作与 $\boldsymbol{u}$ 轴垂直的平面，交 $\boldsymbol{u}$ 轴于点 M'，则称点 M' 为点 M 在 $\boldsymbol{u}$ 轴上的投影，而向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$，则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 $\boldsymbol{u}$ 轴上的**投影**，记为 $prj_u\boldsymbol{r}$ 或 $\boldsymbol{r}_u$.

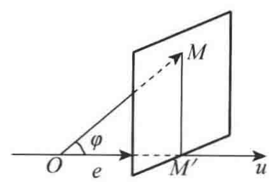

图 5—19

由此定义，向量 $\boldsymbol{a}$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标 a_x,a_y,a_z，分别是向量在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影，即 $a_x=prj_x\boldsymbol{a}$，$a_y=prj_y\boldsymbol{a}$，$a_z=prj_z\boldsymbol{a}$.

向量的投影具有与坐标相同的性质.

性质 1 $prj_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ （φ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 轴的夹角）

性质 2 $prj_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=prj_u\boldsymbol{a}+prj_u\boldsymbol{b}$

性质 3 $prj_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda prj_u\boldsymbol{a}$ （λ 为实数）

例 7 向量的终点在点 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴，y 轴，z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标.

解 设起点 A 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB}=(2-x,-1-y,7-z)$

由题意，得 $2-x=4,-1-y=-4,7-z=7$

所以 $x=-2,y=-3,z=0$

故起点 A 为 $(-2,3,0)$.

例 8 设立方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|OA|=a$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $prj_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

解 如图 5—20 所示，