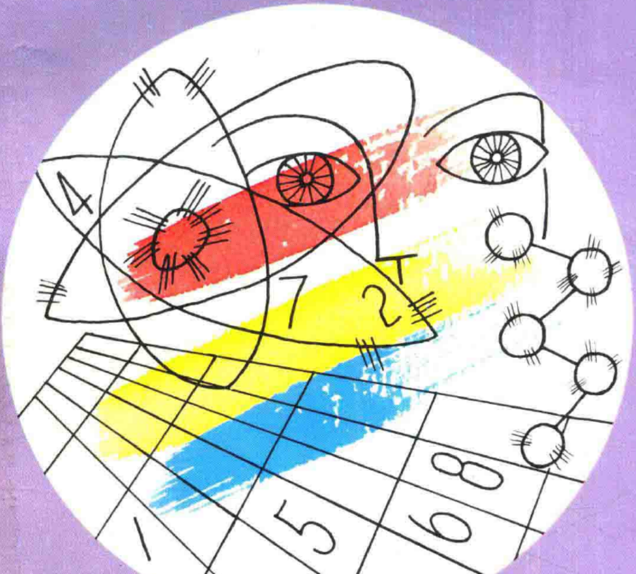
少年博览（第二辑）技巧系列

解题的技巧

德佑 韩芳 编著



海天出版社

少年博览（第二辑）技巧系列

解题的技巧

德 佑　韩 芳　编著

海 天 出 版 社
（中国·深圳）

粤新登字 10 号

责任编辑　张良杰
装帧设计　陈士修

解题的技巧

德佑 韩芳　编著

海天出版社出版
（中国·深圳）

海天出版社发行　广东乐昌县印刷厂印刷
开本 787mm× 1092mm　　印张 3.5　字数 70000
1993 年 4 月第 1 版　　1993 年 4 月第 1 次印刷
印数 10000
ISBN　7-80542　555—9G121
定价：2.20 元

少年博览（第二辑）技巧系列

顾问：郭友中
李成文

主编：向思鑫
何云华

副主编：张　帆
陈伯安

策划：张良杰

内容提要

《解题的技巧》根据青少年的特点，本着低起点，分层次，逐步拓宽的原则，以理论为纲，实例为主，循循诱导，突出技巧，旨在开拓思路，活跃思维，以提高解决问题的能力。它是一本融知识性、科学性和趣味性为一体的科普读物，对广大青少年在数学领域里的探索具有一定的指导作用。

本书主要由包含与排除、逻辑推理、数列求和、抽屉原理、数的进制、几何图形及网络植树等问题组成。其中涉及了不少国内外少年奥林匹克数学竞赛问题，既可供广大青少年阅读，也可作中小学教师及科学爱好者的参考资料。

《少年博览（第二辑）技巧系列》

序

谁不向往成功的辉煌?

千百次地追求，千百次地挫折，千百次地奋起，千百次地突破……，当我们在成功的殿堂欢呼雀跃的时候，回望自己留下的曲曲折折的足迹，禁不住感慨万分；原本咫尺之隔，却在周围盘旋了许久、许久!

因此，赢得了最多的鲜花、掌声和桂冠的人，往往也是沉思最多的人；如何让后人走一条最近最近的道路呢?

笛卡尔说:“最有价值的知识是方法的知识。”

贝尔纳说:“良好的方法能使我们更好地发挥运用天赋的才能，而拙劣的方法则可能阻碍才能的发展。”

夸美纽斯更是断言:“巨大的成就常常是一个技巧问题，而不是一个力量问题。”

人的潜能是无穷无尽的，如同一座有待开发的堆金积玉的

宝藏。指导方法，提高技巧，启迪智力，开发潜能，已成为当前青少年教育中的紧迫课题。《少年博览（第二辑）技巧系列》就是一只开启这座宝藏的金钥匙。它能使你谈吐更潇洒，思维更敏捷，目光更锐利，学习更轻松……

据说：仙人吕洞宾下山寻找传授道术的人，遇见一个樵夫，他用手点出一块金锭，樵夫不要；他又用手点出一块金砖，樵夫也不要。

“那么，你要什么呢?”吕洞宾问。

“我只要你那点石成金的指头。”

记住！朋友们，在当今日新月异的时代里，任何东西都会在某一天陈旧无用，可永远岿然屹立的是产生这些东西的技巧和方法。——那才是值得一要的点石成金的指头哩。

是为序。

目 录

1. 巧问妙答

又到了长江台的“巧问妙答”节目的播出时间，喜欢动脑筋的小玲忙着拧开收音机，拿笔记下了这样一道题：

有6只苹果平均分给两对父子，每人分得整数个而无剩余，你会分吗？

小玲把题目看了好几遍，可犯愁了：两对父子不是四个人吗？均分6只苹果，每人得一只半，怎么能分得整数个呢？难道是播音员姐姐把题目说错了？

小玲想不明白，只好去请教当工程师的爸爸。小玲的爸爸听完后想了想，回答说：“这个问题巧就巧在两对父子的人数上。”爸爸的话还没有说完，小玲急着说：“两对就是四个嘛，难道是三个不成？”“哈，就是三个！”爸爸刚说到这儿，小玲的妈妈下班回来了，看到小玲就问：“你姥姥呢？”小玲回答完妈妈的问话后，爸爸笑着对小玲说：“姥姥、妈妈和你是几对母女？一共几个人？”小玲听了一愣，再一想，高兴地说：“啊！我明白了。”

同学们，现在你们该知道如何“妙答”这道题了吧：6只苹果分给三个人，每人两只。

其实，这道巧问妙答题涉及一个数学原理，它属于数学中的包含和排除问题。如果掌握了包含和排除问题的实质，解决这类问题是不会有困难的。

下面我们来看看包含和排除的有关内容。

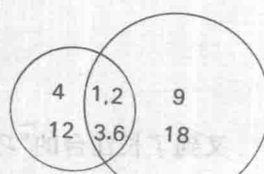
我们知道：12的约数有1，2，3，4，6，12。

18 的约数有 1，2，3，6，9，18。

那么，12 和 18 的不同约数的个数一共是多少呢?

由于 12 和 18 的约数都是 6 个，而 1，2，3，6 是它们的公约数（如图 1）在计算 12 和 18 的不同约数时，只能算一次，因此，12 和 18 的不同约数的个数共有:

$$6+6-4=8\text{（个）}$$



（图 1）

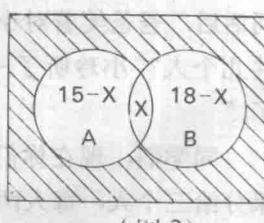
上述巧问妙答中的由两对父子得出 3 人及 12 和 18 的不同约数的总个数为 8 的过程，就是包含和排除方法。

这种方法多用于取出元素或计数问题，或有关求面积问题。正确使用包含和排除的运算方法，能把较复杂的逻辑关系问题变得简单些，能把较复杂的计算问题，纳入有规律的运算程序中。

对包含和排除在实际中的运用，请再看下面的举例。

例 1. 某班有 45 名学生，期中考试语文得 100 分的有 15 人，数学得 100 分的有 18 人，两门功课都没有得 100 分的有 20 人，问两门功课都得 100 分的有多少人?

[分析] 如图 2 所示，长方形代表全班的总人数，长方形内两个相交的圆 A 和 B，圆 A 表示语文得 100 分的人数，圆 B 表示数学得 100 分的人数，两门功课都没有得 100 分的人数用长方形内的阴影部分表示。



（图 2）

解：设两门功课都得 100 分的人数为 X 人，则仅语文得 100 分的人数为(15−X)人，仅数学得 100 分的人数为(18−X)人，

根据题意，得：$(15-X)+(18-X)+X+20=45$

解得：$X=8$

故两门功课都得 100 分的有 8 人。

例 2. 前 50 个自然数中，不能被 5，也不能被 7 整除的数有多少个?

[分析与解]　前 50 个自然数中，

能被 5 整除的数为：5，10，15，…，50。共有 10 个。

能被 7 整除的数为：7，14，21，…，49。共有 7 个。

而 35 既能被 5 整除，又能被 7 整除，因此，前 50 个自然数中，能被 5 或 7 整除的数的个数为：

(10+7)−1＝16（个）

故前 50 个自然数中，不能被 5 整除也不能被 7 整除的自然数的个数为：

50−16＝34（个）

通过例 1 和例 2，我们基本上理解了包含和排除在实际中的作用。下面我们研究较复杂的面积计算和计数问题。

例 3. 如图 3 在桌面上放置 3 个两两重迭、大小相同的圆形纸板，它们的面积都是 40 平方厘米，盖住桌面的总面积是 64 平方厘米，3 张纸板共同盖住的面积是 16 平方厘米。求只被两个圆盖住的面积的和（图中阴影部分）是多少?

[分析与解]　图 3 中，用 A、B、C 分别表示三个圆的面积；三个圆中没有重迭的部分的面积分别用 A_0、B_0、C_0 表示；只被两个圆盖住的面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示，被三个圆同时盖住的面积用 S_0 表示。

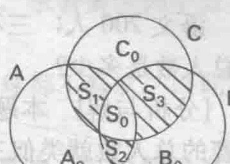


图 3

依题意，有：

$$\begin{cases} A_0+S_1+S_2+S_0=A=40 & \cdots① \\ B_0+S_2+S_3+S_0=B=40 & \cdots② \\ C_0+S_1+S_3+S_0=C=40 & \cdots③ \\ A_0+B_0+C_0+S_1+S_2+S_3+S_0=64 & \cdots④ \\ S_0=16 & \cdots⑤ \end{cases}$$

由①+②+③，得:

$$A_0 + B_0 + C_0 + 2(S_1 + S_2 + S_3) + 3S_0 = 120 \quad \cdots⑥$$

将④、⑤代入⑥得:

$$S_1 + S_2 + S_3 + 96 = 120$$

所以，$S_1 + S_2 + S_3 = 24$（平方厘米）

故图中只被两个圆盖住的面积的和是 24 平方厘米。

由图 3 可以看出，将 3 个圆的面积相加时，每两个圆重迭的部分（A、B 的重迭部分为$S_2 + S_0$；B、C 的重迭部分为S_3+S_0；A、C 的重迭部分为$S_1 + S_0$）被重复计算了。其中 S_0 有 3 次。因此，可得下面的计算公式:

3 个圆盖住桌面的总面积

=3 个圆面积的和−每两个圆重迭部分的面积之和

+3 个圆共同重迭部分的面积

上述求面积的方法，对于计数问题，仍然适用。下面举例予以介绍。

例 4. 某校先后举行了语文、数学、外语三科竞赛。学生中至少参加一科的：语文 420 人，数学 370 人，外语 320 人；至少参加两科的：语文、数学 170 人，数学、外语 150 人，外语、语文 200 人；三科都参加的有 60 人。计算参加竞赛的学生总人数是多少?

[分析与解] 本题可以完全套用由例 3 得出的结论。参加竞赛的总人数就类似三个圆盖住桌面的总面积；至少参加一科的人数之和类似三个圆的面积之和；至少参加二科的人数之和类似每两个圆重迭部分的面积之和；三科都参加的人数类似三个圆共同重迭部分的面积。

因此，参加竞赛的学生总人数

=参加 1 科的人数之和−参加 2 科的人数之和

+3 科都参加的人数，

就是：(420+370+320)−(170+150+200)+60＝650（人）

故参加竞赛的学生总人数是 650 人。

例 5. 某校一次运动会设有 100 米跑、跳远、乒乓球三个项目。参加运动会的总人数是 180 人。至少参加一个项目的：100 米跑 150 人，跳远 100 人，乒乓球赛 50 人；至少参加两个项目的：100 米跑与跳远 70 人，跳远与乒乓球赛 30 人，乒乓球赛与 100 米跑 40 人。求三个项目都参加的学生有多少人?

[分析与解] 本题总人数已知，且参加单项和两项的人数也已知，要求参加三项的人数，只需利用例 4 作逆运算即可。

下面介绍代数解法。

设三个项目都参加的学生为 x 人，

依题意，得：$(150+100+50)-(70+30+40)+x=180$

解得：$x=20$

故三个项目都参加的学生有 20 人。

例 6. 某班 52 个学生中，有 26 人喜欢打篮球，24 人喜欢打排球，18 人喜欢踢足球；有 4 人既喜欢打篮球又喜欢踢足球，有 4 人既喜欢踢足球又喜欢打排球。但没有一个同学是三种球都喜欢。有 2 个同学三种球都不喜欢。求有多少同学既喜欢打篮球，又喜欢打排球?

[分析与解] 全班 52 人中有 2 人三种球都不喜欢，因此喜欢打球的人数应是 $52-2=50$ 人。

这 50 人中，没有一个人是三种球都喜欢，这说明没有三次重选现象，只有两次重选。

题意中已知两个两次重选，求第三个两次重选，只需用参加三种球的总人数依次减去全班参加打球的人数及两个两种球都参加的人数即可得出。

其算术解法如下：

$$(26+24+18)-(52-2)-(4+4)=10\ (\text{人})$$

故既喜欢打篮球又喜欢打排球的同学有 10 人。

此题如果用代数解法，也是简单的。方法如下。

设喜欢打篮球和排球的同学为 x 人，

依题意，得：$(26+24+18)-(X+4+4)=52-2$

解得：$X=10$

至此，同学们对包含和排除的运用应该比较熟悉了。你们可以根据上述基本原则，处理实际中更为复杂的问题。

2. 剥画皮　还其真“面目”

在一次游艺晚会上，小晶抽了一道这样的数学题:

某数加上 7，乘以 7，减去 7，除以 7，其结果等于 7。这个数是多少?

小晶通过一番思考后，回答道:“这个数是 1”。因而他得到了一份奖品。

同学们，你知道他是如何想出来的吗？下面我们对这道题的解法加以说明。

小晶抽的这道题，属数学中的还原问题。它的算术解法是:“从已知条件的最后结果出发，顺次对条件进行相反的运算，即变加为减，变减为加，化乘为除，化除为乘”，便可求得结果。其具体解法如下:

解: ① 某数加上 7，乘以 7，减去 7，如果还原一步，不除以 7，则此数是:

$$7\times 7=49$$

② 某数加上 7，乘以 7，如不减去 7，则此数是:

$$49+7=56$$

③ 某数加上 7，如不乘以 7，则此数是:

$$56\div 7=8$$

④某数加上 7 等于 8，则这个数是:

$$8-7=1$$

上面讲的是还原问题中的算术解法。还原问题如果用代数方法来解，就简单多了。其方法是：先设所求的数，按照题意的运算顺序逐步进行，布列方程，解出方程，就可得出结果。

上题的代数解法如下:

设某数为 x,

依题意、得: $[(x+7)\times 7-7]\div 7=7$

解得: $x=1$　　　即这个数是 1。

有些还原问题的求解过程较为复杂，但只要我们把握上述的原则，也是不难解决的。下面举例作进一步说明。

例 1. 有铅笔若干支，分给甲、乙、丙三人。最初甲得最多，乙得较少，丙得最少，因此，在这个基础上重新分配。第一次分配，甲分铅笔给乙、丙，各给乙、丙所有数多 4 支，结果是乙得最多；第二次分配，乙分铅笔给甲、丙，各给甲、丙所有数多 4 支，结果丙最多；第三次分配，丙分铅笔给甲、乙，各给甲、乙所有数多 4 支。经过三次重新分配后，甲、乙、丙三人各得铅笔 44 支。最初甲、乙、丙各得铅笔多少支?

[分析] 甲、乙、丙三人各得的铅笔的总数是一个不变的常数。在每一次分配以后，这个总支数是不变的。由此，可从最后的结果推求每一次分配之前三人各得铅笔的支数，逐步还原到最初分配的结果。

解: ① 铅笔的总支数为: $44\times 3=132$（支）

② 第三次重新分配前，甲、乙、丙各有的铅笔支数:

甲有: $(44-4)\div 2=20$（支）

乙有: $(44-4)\div 2=20$（支）

丙有: $132-(20+20)=92$（支）

③ 第二次重新分配前，甲、乙、丙各有的铅笔数:

甲有: $(20-4)\div 2=8$（支）

乙有: $(92-4)\div 2=44$（支）

丙有: $132-(44+8)=80$（支）

④ 第一次重新分配前，甲、乙、丙各有的铅笔数:

乙有: $(80-4)\div 2=38$（支）

丙有：(44−4)÷ 2＝20（支）

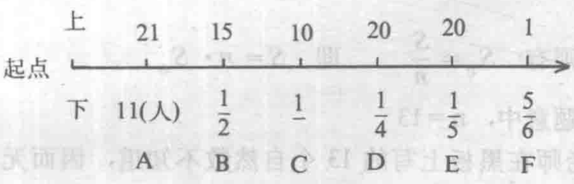
甲有：132−(38+20)＝74（支）

即最初分配铅笔，甲得 74，乙得 38 支，丙得 20 支。

上述分“铅笔”，实际上是从开始到结束，共分了四次，只要我们依次还原，是容易得出第一次分配的结果的。如果变化的次数再多一些，情况再复杂一些，又该如何呢？请同学们分析下面一例，从中得出结论。

例 2. 从起点站发出的一辆公共汽车，到 A 站，有 11 位乘客下车，21 位乘客上车；到 B 站下去一半乘客，上来 15 位乘客；到 C 站，$\frac{1}{3}$的乘客下车，10 位乘客上车；到 D 站有$\frac{1}{4}$的乘客下车，20 位乘客上车；到 E 站，有$\frac{1}{5}$的乘客下车，20 位乘客上车；到 F 站，有$\frac{5}{6}$的乘客下车，1 个乘客上车。这时数一下，车上还有 11 位乘客。你知道从起点站出发时，车上有多少位乘客？

分析题意如图所示：



略解如下：

① 车到 F 站时：（指在该站未上人也未下人）（下同）

$$(11-1)\div(1-\frac{5}{6})=60(人)$$

② 车到E站时：