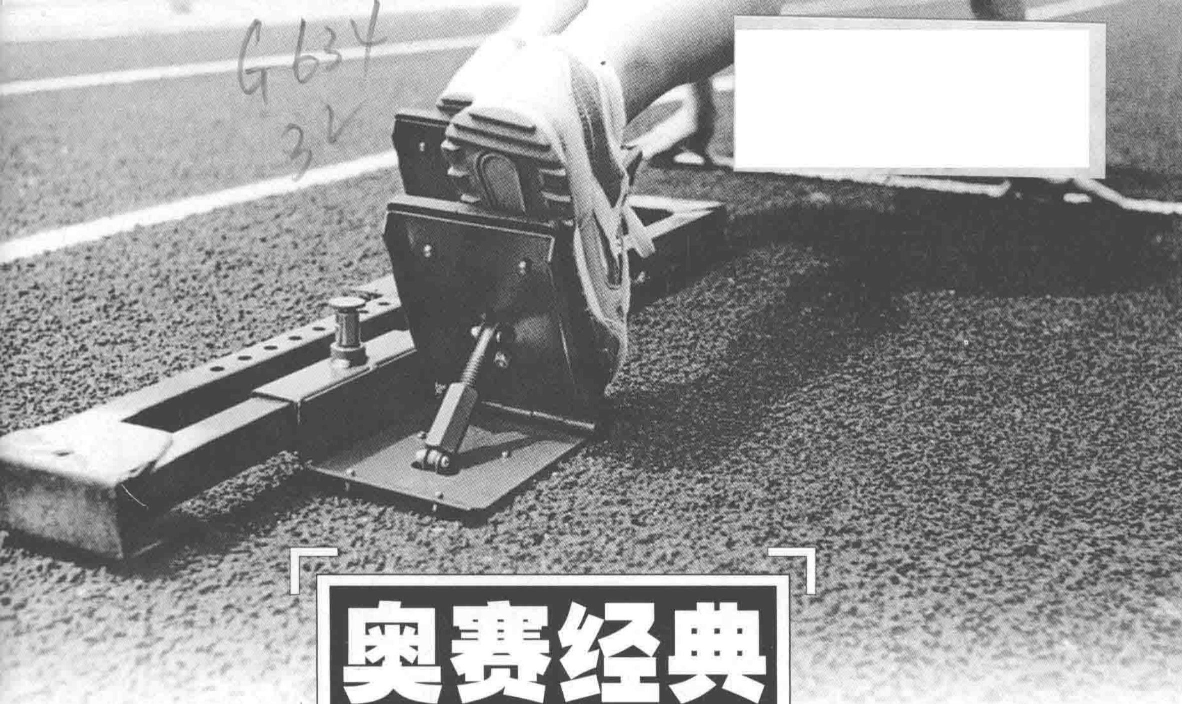
奥赛经典

分级精讲与测试系列

高二数学

◇沈文选　唐立华／主编

湖南师范大学出版社



奥赛经典

分级精讲与测试系列

高二数学

◇沈文选　唐立华／主编

编写

沈文选　唐立华　谢圣英

孔璐璐　陈淼君

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

分级精讲与测试系列·高二数学 / 沈文选,唐立华主编 .—长沙:湖南师范大学出版社,2004.5
(奥赛经典丛书)
ISBN 7-81081-421-4

Ⅰ.分… Ⅱ.①沈…②唐… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 038751 号

分级精讲与测试系列·高二数学

沈文选 唐立华 主编

◇丛书策划:陈宏平 廖建军 周玉波 何海龙
◇组稿编辑:何海龙
◇责任编辑:莫 华
◇责任校对:蒋旭东
◇出版发行:湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731.8853867 8872751 传真/0731.8872636
网址/www.hunnu.edu.cn/press
◇经销:湖南省新华书店
◇印刷:国防科技大学印刷厂

◇开本:730×960 1/16
◇印张:21
◇字数:435 千字
◇版次:2004 年 10 月第 1 版 2005 年 3 月第 2 次印刷
◇印数:5001—10000 册
◇书号:ISBN 7-81081-421-4/G·265
◇定价:19.00 元

目录

第1讲　解不等式与不等式解集的性质

竞赛要点

求不等式的解集叫做解不等式.一元一次不等式(组)和一元二次不等式的解法,是解各种不等式(组)的基础.解各种类型的不等式,其思想方法是根据有关性质及定理,把它同解变形为一次、二次不等式(组):整式高次不等式同解变形为一次、二次不等式(组);分式不等式同解变形为整式不等式;无理不等式同解变形为有理不等式;超越不等式(指数、对数、三角等)同解变形为代数不等式.在同解变形中,一定要注意字母的允许值范围不发生变化;在含有参数的不等式(组)中,应注意参数的取值范围对解的影响的讨论;在求解过程中,注意集合的交、并运算,注意借助于数轴或图形确定其解.

在求解一元不等式时,还可以利用一元连续函数 $y = f(x)$ 在其存在且无根的区间内保号.对一元高次不等式、分式不等式、无理不等式、指数不等式、对数不等式、三角不等式、绝对值不等式等采用如下统一的解法:

先构造函数 $f(x)$,即由所解不等式两边作差得 $f(x)$;再求 $f(x)$ 的定义域,并解方程 $f(x) = 0$;然后在其根(偶重根舍去,若原不等式中有等号则不舍,注意具体问题具体分析)依次将定义域分成的各个区间内取一值代入 $f(x)$,看其值的正负,从而求得原不等式的解.

名题精析

例1 (1979年全国高中联赛题)已知 $f(x) = x^2 - 6x + 5$,问满足 $f(x) + f(y) \leqslant 0$ 和 $f(x) - f(y) \geqslant 0$ 的点 (x, y) 在平面上的什么范围?并作图.

解　由于 $f(x) + f(y) = x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = (x-3)^2 + (y-3)^2 - 8$,所以满足 $f(x) + f(y) \leqslant 0$ 的点 (x, y) 在圆周 $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$ 上及其内部.

由 $f(x) - f(y) = x^2 - y^2 - 6x + 6y = (x-y)(x+y-6)$,可知

$f(x) - f(y) \geqslant 0$ 等价于 $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y - 6 \geqslant 0; \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y - 6 \leqslant 0. \end{cases}$

综上所述,可知同时满足 $f(x) + f(y) \leqslant 0$ 和 $f(x) - f(y) \geqslant 0$ 的点 (x, y) 在图

1－1所示的阴影部分的两个扇形内及其边界上.

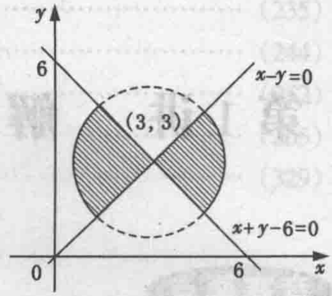


图 1－1

例 2 （1989 年加拿大国家队集训题）求出满足条件 $\log_x y \geqslant \log_{\frac{x}{y}}(xy)$ 的 (x,y) 所组成的区域.

解 显然有 $x>0, y>0, x\neq 1, x\neq y$.

令 $u=\log_x y$，则 $u\neq 1$，且

$$\log_{\frac{x}{y}}(xy)=\frac{\log_x(xy)}{\log_x \frac{x}{y}}=\frac{1+u}{1-u}.$$

显然 $u\neq\frac{1+u}{1-u}$.又 $u>\frac{1+u}{1-u}\Leftrightarrow u-\frac{1+u}{1-u}=\frac{u^2+1}{u-1}>0\Leftrightarrow u>1$，所以满足 $\log_x y\geqslant \log_{\frac{x}{y}}(xy)$ 的 (x,y) 所组成的区域是 $\{(x,y)\mid 0<x<1$ 且 $0<y<x$，或者 $x>1$ 且 $y>x\}$.

例 3 （《数学通报》问题 938 号）解不等式：$\log_{12}(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})>\log_{64}x$.

解 令 $\log_{64}x=y$，则 $\sqrt{x}=8^y$，$\sqrt[3]{x}=4^y$，原不等式可化为 $\log_{12}(8^y+4^y)>y$.从而，得 $8^y+4^y>12^y$，进而得

$$\left(\frac{8}{12}\right)^y+\left(\frac{4}{12}\right)^y>1，即\left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{1}{3}\right)^y>1.$$

因函数 $f(y)=\left(\frac{2}{3}\right)^y+\left(\frac{1}{3}\right)^y$ 是减函数，且 $f(1)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$，故 $f(y)>f(1)=1$，得 $y<1$，即 $\log_4 x<1$，所以原不等式的解是 $0<x<64$.

例 4 （《数学通报》问题 1437 号）解不等式：

$$\frac{\sqrt{x^2+1}+2^x}{\sqrt{x^2+1}+2^{x+1}}+\frac{\sqrt{x^2+2}+3^{2x}}{\sqrt{x^2+2}+3^{2x+1}}+\frac{\sqrt{x^2+3}+6^{3x}}{\sqrt{x^2+3}+6^{3x+1}}>1.$$

解 设 $a,b,m\in\mathbf{R}^+$，且 $a<b$，则 $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.可知：对任意 $x\in\mathbf{R}$，有原不等式左边第 1 个分式 $>\frac{1}{2}$；原不等式左边第 2 个分式 $>\frac{1}{3}$；原不等式左边第 3 个分式 $>\frac{1}{6}$.

以上三式相加，即得原不等式.

从而，原不等式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 均成立，即原不等式的解集为 $\mathbf{R}$.

例 5 解不等式：$\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$.

解 令 $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$，知其定义域是 $x\neq 3, x\neq -1$ 的全体实数.

由 $f(x)=0$，解得 $x_1=1, x_2=2$.

在区间$(-\infty,-1),(-1,1),(1,2),(2,3),(3,+\infty)$中,有$f(0)<0,f\left(\frac{5}{2}\right)<0$.

故原不等式的解集为$\{x\mid -1<x<1$或$2<x<3\}$.

例6　解不等式:$|\sin x|>|\cos x|,x\in[0,2\pi)$.

解　令　$f(x)=|\sin x|-|\cos x|$,则其定义域为$(-\infty,+\infty)$.由　$f(x)=0$,求得　$x_1=\frac{\pi}{4},x_2=\frac{3\pi}{4},x_3=\frac{5\pi}{4},x_4=\frac{7\pi}{4}\in[0,2\pi)$.

注意到　$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0,f\left(\frac{3\pi}{2}\right)>0$,故原不等式的解集为

$\{x\mid\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$或$\frac{5}{4}\pi<x<\frac{7\pi}{4}\}$.

例7　(《数学通报》问题1446号)设$x\geqslant 0,a>0$,求使不等式　$\sqrt{1+x}\geqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{a}$成立的最大的$a$值.

解　令$\sqrt{1+x}=t\geqslant 1$,则$x=t^2-1$,故

$$\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{a}$$

$$=t-1-\frac{1}{2}(t^2-1)+\frac{1}{a}(t^2-1)^2$$

$$=\frac{1}{2a}(t-1)[2a-a(t+1)+2(t+1)^2(t-1)]$$

$$=\frac{1}{2a}(t-1)[a-at+2(t+1)^2(t-1)]$$

$$=\frac{1}{2a}(t-1)^2[2(t+1)^2-a]\geqslant 0.$$

因此,$a\leqslant 2(t+1)^2$一定要成立.由于$2(t+1)^2$在$t\geqslant 1$时的最小值为8,所以所求的最大的a值为8.

例8　(1973年基辅奥林匹克题)在满足不等式　$\log_{x^2+y^2}(x+y)\geqslant 1$的所有$x,y$中,求$y$的最大值.

解　令$M=\{(x,y)\mid x+y\geqslant x^2+y^2>1\}$,

$N=\{(x,y)\mid 0<x+y\leqslant x^2+y^2<1\}$.

显然,原不等式$\log_{x^2+y^2}(x+y)\geqslant 1$的解集为$M\cup N$.

如果$(x,y)\in N$,则$y<1$.

如果$(x,y)\in M$,则由

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{1}{2},$$

可知 $y \leqslant \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

另一方面，显然$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in M$. 于是，

$y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ 即为所求 y 之最大值.

例 9 (IMO－42预选题)求所有正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，使得 $\frac{99}{100} = \frac{a_0}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$，其中 $a_0 = 1$，且$(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geqslant a_k^2(a_k - 1)$，$k = 1, 2, \cdots, n-1$.

解　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是满足已知条件的正整数. 因为 $a_0 = 1$，所以 $a_1 \neq 1$，否则 $\frac{a_0}{a_1} = 1 > \frac{99}{100}$. 即有 $a_1 \geqslant 2$，且 $a_1 > a_0$，假设 $a_k > a_{k-1}$，$a_k \geqslant 2$，则

$$a_{k+1} \geqslant \frac{a_k^2(a_k - 1)}{a_{k-1}} + 1 > \frac{a_k^2(a_k - 1)}{a_{k-1}} + 1 \geqslant \frac{a_k^2}{a_{k-1}} > a_k.$$

综上所述，有

$a_{k+1} > a_k$，$a_{k+1} \geqslant 2$，其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$.

将不等式$(a_{k+1} - 1)a_{k-1} \geqslant a_k^2(a_k - 1)$重写为

$$\frac{a_{k-1}}{a_k(a_k - 1)} \geqslant \frac{a_k}{a_{k+1} - 1},$$

即 $$\frac{a_{k-1}}{a_k} \leqslant \frac{a_{k-1}}{a_k - 1} - \frac{a_k}{a_{k+1} - 1}.$$

对于 $k = i+1, i+2, \cdots, n-1$ 及$\frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_{n-1}}{a_n - 1}$求和，可得

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} + \frac{a_{i+1}}{a_{i+2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{a_i}{a_{i+1} - 1}.$$

当 $i = 0$ 时，有

$$\frac{1}{a_1} \leqslant \frac{99}{100} < \frac{1}{a_1 - 1},$$

即 $\frac{100}{99} \leqslant a_1 < \frac{199}{99}$，则 $a_1 = 2$.

当 $i = 1$ 时，有

$$\frac{a_1}{a_2} \leqslant \frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} < \frac{a_1}{a_2 - 1},$$

即 $\frac{200}{49} \leqslant a_2 < \frac{200}{49} + 1$，则 $a_2 = 5$.

当 $i = 2$ 时，有

$$\frac{1}{a_3} \leqslant \frac{1}{a_2}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2}\right) < \frac{1}{a_3 - 1},$$

即 $55\frac{5}{9} \leqslant a_3 < 55\frac{5}{9} + 1$，则 $a_3 = 56$.

当 $i = 3$ 时，有

$$\frac{1}{a_4} \leqslant \frac{1}{a_3}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3}\right) < \frac{1}{a_4 - 1},$$

即 $56 \times 14 \times 100 \leqslant a_4 < 56 \times 14 \times 100 + 1$，则

$a_4 = 78\,400$.

当 $i = 4$ 时，有

$$\frac{1}{a_5} \leqslant \frac{1}{a_4}\left(\frac{99}{100} - \frac{1}{2} - \frac{2}{5} - \frac{5}{56} - \frac{56}{78\,400}\right) = 0,\text{不可能}.$$

因此，$a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 56, a_4 = 78\,400$ 是惟一的解.

例 10 （《中等数学》2003 年 5 期奥林匹克训练题）设正数 a, b，满足 $a > \frac{b}{\sqrt{2}}$ 且使得关于 x 的不等式 $\sqrt{x-1} \geqslant a\sqrt{x+1} - b$ 总有实数解.试求 $f(a,b) = a^2 - 3ab + b^2$ 的取值范围.

解 首先，求出 a、b 应满足的条件.由原不等式得下列的各个等价形式：

$\sqrt{x-1} + b \geqslant a\sqrt{x+1}$，两边同时平方并整理得

$$2b\sqrt{x-1} \geqslant (a^2-1)x + (a^2 - b^2 + 1). \quad ①$$

令 $\sqrt{x-1} = t(t \geqslant 0)$，则 $x = t^2 + 1$，代入式 ①，得

$2bt \geqslant (a^2-1)(t^2+1) + a^2 - b^2 + 1(t \geqslant 0)$,

即 $(a^2-1)t^2 - 2bt + 2a^2 - b^2 \leqslant 0(t \geqslant 0)$. ②

下面分 3 种情形讨论：

当 $a^2 = 1$ 时，式 ② 变为 $-2bt + 2 - b^2 \leqslant 0(t \geqslant 0)$，有解.

当 $a^2 < 1$，t 充分大时($t \to +\infty$)，式 ② 有解.

当 $a^2 > 1$ 时，首先要求判别式 $\Delta \geqslant 0$，有

$(-2b)^2 - 4(a^2-1)(2a^2-b^2) \geqslant 0$,

即 $2a^2 \leqslant b^2 + 2(a^2 > 1)$. ③

令 $f(t) = (a^2-1)t^2 - 2bt + 2a^2 - b^2$.

由 $\Delta \geqslant 0$,则方程 $f(t)=0$ 有两个实根 t_1、$t_2(t_1 \leqslant t_2)$.因为 $t_1+t_2=\dfrac{2b}{a^2-1}>0(a^2>1,b>0)$,所以,必有 $t_2>0$.又因为抛物线 $y=f(t)$ 开口向上,所以不等式 $f(t)\leqslant 0$ $(t\geqslant 0)$ 在 $t\geqslant 0$ 时总是有解 $\max\{0,t_1\}\leqslant t\leqslant t_2$.

综合上述,得 a、b 应满足的充分必要条件是

$$2a^2 \leqslant b^2+2(a>0,b>0), \tag{4}$$

即

$$a^2-\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqslant 1(a>0,b>0). \tag{5}$$

注意到式 ⑤ 与三角恒等式 $\left(\dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2-(\tan\theta)^2=1$ 的"相似性",故令

$$a=\sqrt{t}\cdot\frac{1}{\cos\theta},\frac{b}{\sqrt{2}}=\sqrt{t}\cdot\tan\theta\left(0<t\leqslant 1,0<\theta<\frac{\pi}{2}\right),$$

则 $f(a,b)=a^2-3ab+b^2=t\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}-3\sqrt{2}t\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+2t\cdot\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$$=t\cdot\frac{1-3\sqrt{2}\sin\theta+2\sin^2\theta}{\cos^2\theta},$$

其中 $0<t\leqslant 1,0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

令 $k=\dfrac{1-3\sqrt{2}\sin\theta+2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$,则 $(2+k)\sin^2\theta-3\sqrt{2}\sin\theta+1-k=0$. ⑥

当 $k=-2$ 时,由式 ⑥ 得 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\theta=\dfrac{\pi}{4}$.

当 $k\neq -2$ 时,由式 ⑥ 解得

$$\sin\theta=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18+4(2+k)(k-1)}}{2(2+k)}=\frac{3\pm\sqrt{2k^2+2k+5}}{\sqrt{2}(2+k)}.$$

若 $\sin\theta=\dfrac{3+\sqrt{2k^2+2k+5}}{\sqrt{2}(2+k)}$,则

$$0<\frac{3+\sqrt{2k^2+2k+5}}{\sqrt{2}(2+k)}<1,\text{即}\begin{cases}k>-2,\\3+\sqrt{2k^2+2k+5}<2\sqrt{2}+\sqrt{2}k.\end{cases}$$

它等价于 $\begin{cases}k>\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-2,\\0\leqslant 2k^2+2k+5<(2\sqrt{2}-3+\sqrt{2}k)^2=2k^2+(8-6\sqrt{2})k+17-12\sqrt{2},\end{cases}$

即 $\begin{cases} k > \dfrac{3}{2}\sqrt{2} - 2, \\ k < -2, \end{cases}$ 矛盾.

故这种情形不可能存在.从而,只有一种可能,

即 $\sin\theta = \dfrac{3 - \sqrt{2k^2 + 2k + 5}}{\sqrt{2}(2 + k)}$.

于是 $0 < \dfrac{3 - \sqrt{2k^2 + 2k + 5}}{\sqrt{2}(2 + k)} < 1$.

这时有两种可能:

$(1)\begin{cases} k < -2, \\ \sqrt{2k^2 + 2k + 5} > 3, \\ 3 - \sqrt{2k^2 + 2k + 5} > \sqrt{2}(2 + k), \end{cases}$

或 $(2)\begin{cases} k > -2, \\ \sqrt{2k^2 + 2k + 5} < 3, \\ 3 - \sqrt{2k^2 + 2k + 5} < \sqrt{2}(2 + k). \end{cases}$

由(1)可解得 $k < -2$,由(2)可解得 $-2 < k < 1$.

综上可知,k 的取值范围是 $k < 1$.

又 $f(a,b) = tk(0 < t \leqslant 1, k < 1)$,所以,$f(a,b)$ 的取值范围是 $f(a,b) < 1$,即 $f(a,b)$ 能取遍 $(-\infty,1)$ 中的每一个值(t 与 k 是相互独立的).

过关测试

1. 解不等式 $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$.

2. 解不等式 $2^{2x^2-3x+1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+2x-5}$.

3. 解不等式 $\log_{\sqrt{3}}(x^2 + 4x + 6) + 6\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} \geqslant 8$.

4. 解不等式 $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 < 0$.

5. 解不等式 $|3x - 5| - |x + 3| - 2$.

6. (2001 年全国高中联赛题) 不等式 $\left|\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}} x} + 2\right| > \dfrac{3}{2}$ 的解集为________.

7. (2002 年全国高中联赛题) 使不等式 $\sin^2 x + a \cdot \cos x + a^2 \geqslant 1 + \cos x$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立的负数 a 的取值范围是________.

8. (2003 年全国高中联赛题) 已知 $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 < 0, x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x \mid 2^{1-x} +$

$a \leqslant 0, x^2 - 2(a+7)x + 5 \leqslant 0, x \in \mathbf{R}\}$. 若 $A \subseteq B$，则实数 a 的取值范围是________.

9.（IMO－2 试题）对于 x 的哪些值，不等式 $\dfrac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9$ 成立？

10.（IMO－4 试题）求满足不等式

$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \dfrac{1}{2}$ 的所有实数 x.

11.（IMO－7 试题）求满足如下条件的所有实数 x：

$0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ 且 $2\cos x \leqslant |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \leqslant \sqrt{2}$.

12.（第 19 届全苏奥林匹克题）求满足

$|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y \leqslant 0$

的所有实数对 (x, y).

第 2 讲　不等式的证明方法与技巧

竞赛要点

数学竞赛中的不等式证明是一类典型问题，它要求参赛者不仅能灵活地运用各种证明方法，而且还要有较多的处理技巧．

不等式证明的方法主要有比较法、综合法、分析法、数学归纳法、反证法等，常用的技巧有适当放缩、恰当构造、适时代换、灵活分拆、引入参数等等．

名题精析

1．比较法．比较法有两种常用形式：作差比较和作商比较．这种方法的关键是为了判断差是正或负和商是大于 1 或小于 1，而进行的恰当变形．

例 1　(1984 年全国高中联赛题) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数．

求证：$\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{x_1} \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n$．

证明　由 $\left(\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{x_1}\right) - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$

$$= \left(\frac{x_1^2}{x_2} - 2x_1 + x_2\right) + \left(\frac{x_2^2}{x_3} - 2x_2 + x_3\right) + \cdots + \left(\frac{x_n^2}{x_1} - 2x_n + x_1\right)$$

$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_2}} - \sqrt{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_3}} - \sqrt{x_3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x_n}{\sqrt{x_1}} - \sqrt{x_1}\right)^2 \geqslant 0.$$

故　$\dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \dfrac{x_n^2}{x_1} \geqslant x_1 + x_2 + \cdots + x_n$．

例 2　(1974 年美国奥林匹克题) 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$，求证：$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}$．

证明　由于关于 a, b, c 对称，不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，则 $a-b, b-c, a-c \in \mathbf{R}^+$，且 $\dfrac{a}{b}, \dfrac{b}{c}, \dfrac{a}{c}$ 都 $\geqslant 1$．从而由 $\dfrac{a^a b^b c^c}{(abc)^{\frac{1}{3}(a+b+c)}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{3}} \cdot \left(\dfrac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{3}} \cdot \left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{3}} \geqslant 1$，即证．

2．综合法．从已知条件和一些显然确真的不等式出发，灵活运用不等式的性质，并巧妙地变形而推出所证不等式．

例 3 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,求证:

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c).$$

证明 由 $a^3+b^3-a^2b-ab^2=(a-b)^2(a+b)\geqslant 0$,有

$a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$.

同理,$b^3+c^3\geqslant b^2c+bc^2$,$c^3+a^3\geqslant c^2a+ca^2$.

以上三式相加,得

$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2$.

从而,$3(a^3+b^3+c^3)$

$$\geqslant(a^3+a^2b+a^2c)+(b^3+b^2c+b^2a)+(c^3+c^2a+c^2b)$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a+b+c).$$

故 $a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$.

例 4 设 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$,$a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$.

试证:$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{1+x_{i+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$(其中 $x_{n+1}=x_1$).

证明 由 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{1+x_{i+1}}-n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1+x_i}{1+x_{i+1}}-1\right)$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i+1}}{1+x_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-a}{1+x_{i+1}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_{i+1}-a}{1+x_{i+1}}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-a}{1+x_{i+1}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-a}{1+x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)(x_i-x_{i+1})}{(1+x_i)(1+x_{i+1})}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{(1+x_i)(1+x_{i+1})}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-a)^2}{(1+a)^2},$$即证得原不等式.

3. 分析法.从所求证的不等式出发,逐步推求能使它成立的条件,直至已知的事实为止.

例 5 (第 16 届全俄奥林匹克十年级题)

证明:对任意的正数 a,b,c,

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{(ca(c+a)}>\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

证明 欲证原不等式,只须证

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+2\sqrt{ab^2c(a+b)(b+c)}+$$
$$2\sqrt{abc^2(a+c)(b+c)}+2\sqrt{a^2bc(a+b)(a+c)}>$$
$$(a+b)(b+c)(c+a).$$

只须证 $b\sqrt{ac(a+b)(b+c)}+c\sqrt{ab(a+c)(b+c)}+a\sqrt{bc(a+b)(a+c)}>abc$.事实上,上述不等式左边 $\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2(a+b)(b+c)(c+a)}>3abc>abc$.故原不等式获证.

例 6 (IMO - 11 试题) 证明:对所有满足条件 $x_1>0,x_2>0,x_1y_1-z_1^2>0,x_2y_2-z_2^2>0$ 的实数 x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2,有不等式 $\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2}\leqslant\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2}$ 成立,并求出等号成立的充要条件.

证明 为简便,记 $D_i=x_iy_i-z_i^2,i=1,2$.记 $D=(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2$.显然可推知 $D=D_1+D_2+\frac{y_2}{y_1}D_1+\frac{y_1}{y_2}D_2+y_1y_2\left(\frac{z_1}{y_1}-\frac{z_2}{y_2}\right)^2>0$.原不等式即为 $\frac{8}{D}\leqslant\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}$.从而只要证 $8D_1D_2\leqslant(D_1+D_2)D$,

即 $4D_1D_2\leqslant(D_1-D_2)^2+(D_1+D_2)\left(\frac{y_2}{y_1}D+\frac{y_1}{y_2}D_2\right)+(D_1+D_2)\left(\frac{z_1}{y_1}-\frac{z_2}{y_2}\right)\cdot y_1y_2$.

注意到上式右边第一、三项均非负,则只要证

$$4D_1D_2\leqslant(D_1+D_2)\left(\frac{y_2}{y_1}D_1+\frac{y_1}{y_2}D_2\right).$$

而 $D_1+D_2\geqslant2\sqrt{D_1\cdot D_2},\frac{y_2}{y_1}D_1+\frac{y_1}{y_2}D_2\geqslant2\sqrt{D_1D_2}$,

从而原不等式获证.等号成立的充要条件由 $D_1=D_2,\frac{z_1}{y_1}=\frac{z_2}{y_2},\frac{y_2}{y_1}=\frac{y_1}{y_2}$,有 $x_1=x_2$,$y_1=y_2,z_1=z_2$.

4. 数学归纳法和反证法.若把欲证的不等式看作一个命题,则用数学归纳法(证与自然数有关的)或用反证法(适宜于反证法的)来证明不等式,就与用数学归纳法或反证法证明某个命题的方法相同了.但在运用反证法证明时,假设判断与原判断一定是构成对抗性矛盾而不能是对照性矛盾.还需注意:要想否定"不等式对任意实数成立",只须指出"不等式对某个实数不成立"即可.

例 7 (1988 年全国高中联赛题) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,且 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.求证:对一切 $n\in\mathbf{N},(a+b)^n-a^n-b^n\geqslant2^{2n}-2^{n+1}$.

证明 当 $n=1$ 时,左边 $=0=$ 右边,命题成立.设 $n=k$ 时命题成立,即有 $(a+b)^k-a^k-b^k\geqslant2^{2k}-2^{k+1}$.则当 $n=k+1$ 时,

左边 $=(a+b)[(a+b)^k-a^k-b^k]+a^kb+ab^k$.

由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,有$ab=a+b$.由$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$,有$ab=a+b\geqslant 4$,从而$a^kb+ab^k\geqslant 2(ab)^{\frac{k+1}{2}}\geqslant 2^{k+2}$.

$\therefore$ 左边$\geqslant 4(2^{2k}-2^{k+1})+2^{k+2}=2^{2k+2}-2^{k+2}=$右边.

综上所述,对一切$n\in\mathbf{N}$,不等式成立.

例8 (1988年湖南夏令营试题)设$a,b\in\mathbf{R}^+$,$n\geqslant 2$.

求证:$\frac{a^n+a^{n-1}b+\cdots+ab^{n-1}+b^n}{n+1}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^n$.

证明 令$\frac{a}{b}=x$,则有 $\frac{x^n+x^{n-1}+\cdots+1}{n+1}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^n$.

当$n=2$时,由$(x-1)^2\geqslant 0$,有$4x^2+4x+4\geqslant 3x^2+6x+3$,即$\frac{x^2+x+1}{3}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$命题成立.

假设当$n=k-1(k\geqslant 3)$时命题成立,那么当$n=k$时,由$(x^{k-i}-1)(x^i-1)\geqslant 0$,即$x^k+1\geqslant x^{k-i}+x^i(i=1,2,\cdots,k-1)$,此式对$i$求和,得$(k-1)(x^k+1)\geqslant 2(x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x)$.上式两边同加 $(k+1)(x^k+1)+2k(x^{k-1}+\cdots+x)$,再同除以$2k(k+1)$,并据归纳假设有

$$\frac{x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1}{k+1}\geqslant\frac{x^k+2(x^{k-1}+\cdots+x)+1}{2k}$$

$$=\frac{x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x+1}{k}\cdot\frac{x+1}{2}\geqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^k.$$

综上所述,对于一切$\geqslant 2$的正整数n不等式成立.

注 上述证明中变形是巧妙的,这可由分析法推导出来.

例9 设$a,b\in\mathbf{R}$且$a^3+b^3=2$,求证:$a+b\leqslant 2$.

证明 若$a+b>2$,则有$a>2-b$,所以$a^3>8-12b+6b^2-b^3$,$a^3+b^3>6(b-1)^2+2$.因$6(b+1)^2+2\geqslant 2$,从而$a^3+b^3>2$.这与题设条件$a^3+b^3=2$矛盾.从而$a+b\leqslant 2$.

例10 (1983年全国高中联赛题)函数$F(x)=|\cos^2x+2\sin x\cdot\cos x-\sin^2x+Ax+B|$在$0\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$上的最大值$M$与参数$A,B$有关,问$A,B$取什么值时$M$为最小?证明你的结论.

解 $F(x)$可变形为$|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+Ax+B|$.当$A=B=0$时,$F(x)$变为$f(x)=|\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})|$.在区间$[0,\frac{3\pi}{2}]$上,有三点$x=\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8}$使$f(x)$取最大值