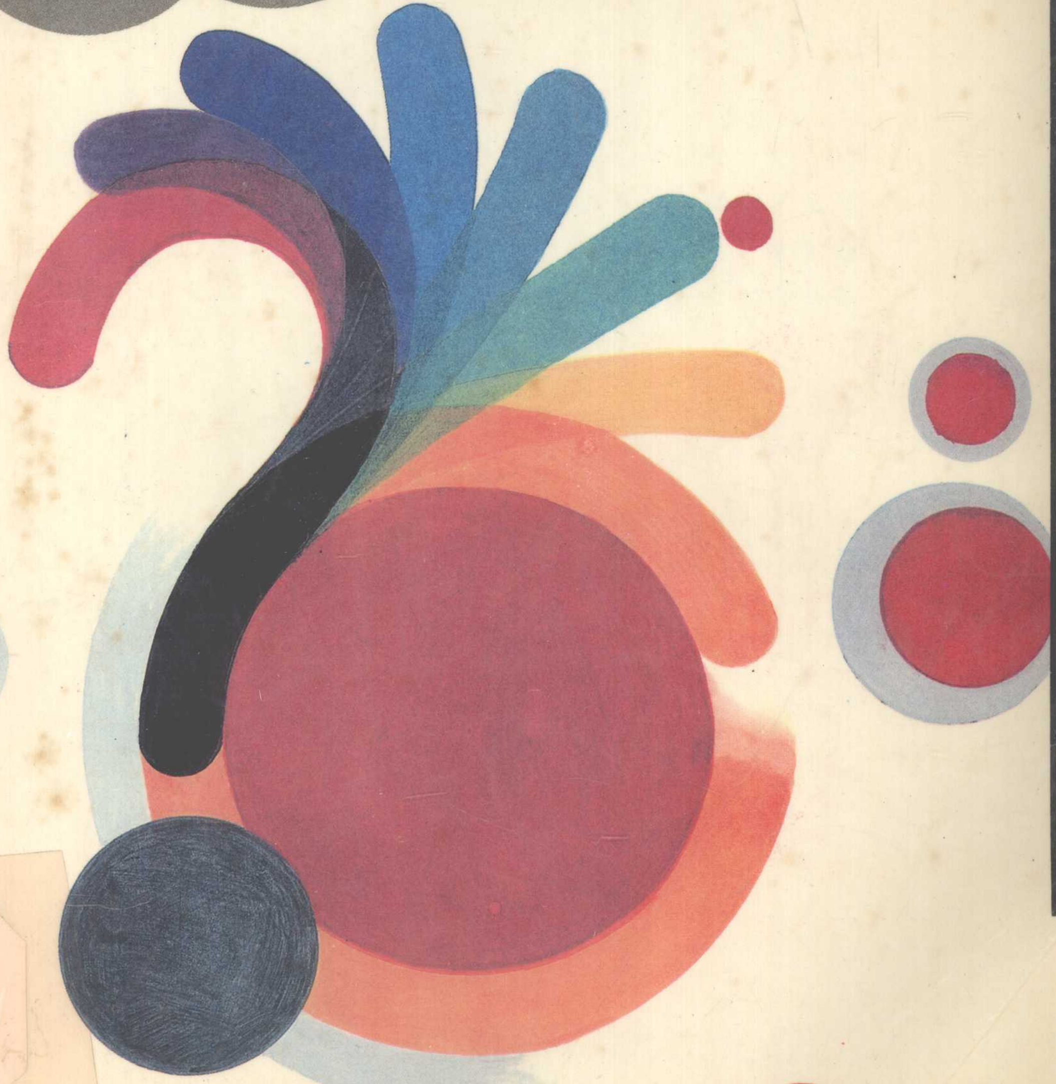
一点就通

初中数学应考诀窍



中国统计出版社

丛书主编：翟建林　刘清波

一点就通

——初中数学应考诀窍

主　编：郑泉水　马凤江

编　者：梁春兰　许　敏　王秀芹　田淑艳　蔡　辉　柯永安　李建芝　赵德泉　尹凤儒

中国统计出版社

（京）新登字 041 号

图书在版编目（CIP）数据

初中数学应考诀窍/郑泉山等主编. —北京：中国统计出版社，1994.9
（一点就通/翟建林主编）
ISBN 7—5037—1628—2

Ⅰ.初…
Ⅱ.郑…
Ⅲ.数学—初中—教学参考资料
Ⅳ.G634.6

中国统计出版社出版
（北京三里河月坛南街 38 号 100826）
新 华 书 店 经 销
北京顺义振华印刷厂印刷
*
787×1092 毫米　16 开本　8.125 印张　20 万字
1994 年 12 月第 1 版　1994 年 12 月北京第 1 次印刷
印数：1—5000
ISBN 7—5037—1628—2/G・22
定价：6.65 元

前　言

人生有尽，知识无涯，欲将有尽之人生学无涯之知识，有且只有一条途径：若学加巧学。如何巧学？怎样找到记忆的捷径、解答的窍门，在有限的时间内掌握最多的知识？为了帮助中学生朋友找到答案，我们组织编写了这套《一点就通——初中各科应考诀窍》丛书。

本丛书分为语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理、生物八个分册，内容紧扣教学大纲，均配有大量生动、有趣、绝妙、清晰明了易记的巧学例子。此书能开发学生思维，有助于学生触类旁通，举一反三，且不觉乏味。经此法学过的知识印象深刻，过目不忘。

本丛书的作者都是有多年教学经验、辅导过多届中考，在教学上取得了重大成绩的特级模范教师。他们都毫无保留地把自己多年教学中积累、研究、总结的识记窍门、解题技巧、得分高招、应试秘诀等等奉献给大家，希望广大中学生朋友取得优异的成绩。

本丛书的各科诀窍已得到了教学复习验证。在许多中学试用结果表明，掌握这些诀窍对同学们复习应考确有事半功倍的效果。它使学生抛开了死记硬背，脱离了漫天题海，从一条捷经走向成功。"一点就通，一用就灵"，此丛书不失为一把开启通向成功之门的金钥匙。

本丛书适合广大中学生复习应考，也可作为课本的伴读材料，同时还可供广大中学教师教学参考。

在本书即将出版之际，我们要感谢河北省教委、保定地区教委的同志对本书的总体设计提出了宝贵意见。我们还要感谢中国统计出版社为本书的出版给予的极大关注和做出的努力。书中的不当之处，请各界批评指正。

从书编委会

1994.8.

目　　录

1. 怎样寻求解题方案

你以前见过它吗？你是否见过相同的问题而形式稍有不同？

你是否知道与此有关的问题？你是否知道一个可能用得上的定理？

看着未知数！试想出一个具有相同未知数或相似未知数的熟悉的问题。

这里有一个与你现在的问题有关，且早已解决的问题。你能不能利用它？你能利用它的结果吗？你能利用它的方法吗？为了能利用它，你是否应该引入某些辅助问题？

你能不能重新叙述这个问题？你能不能用不同的方法重新叙述它？

回到定义去！

如果你不能解决面对的问题，你可先解决一个与此有关的问题。你能不能想出一个更容易着手的有关问题？一个更普遍的问题？一个更特殊的问题？一个类比的问题？你能否解决这个问题的一部分？你能不能从已知数据中导出某些有用的东西？

你是否利用了所有的已知数据？你是否利用了整个条件？你是否考虑了包含在问题中的所有必要的概念？

如果你很好地做了以上工作，相信你最终能得出一个求解方案。

2. 解题后还应做些什么工作

回顾解题的结果和解题的路子；总结解题的经验；改进解题的方法；确定这个问题是否可以推广；你能不能把这个结果或方法用于其它的问题？

所有这些努力是不会让你白花费时间和气力的，它将使你的思维能力得到强有力的提高。

如果解题后你没有做这项工作，既使你成绩很好，那你同样错过了解题的一个重要而很有教益的方面。

3. 理解记忆

经验告诉我们：记住了的东西不一定都理解，而理解了的东西很容易记住。由于理解的过程同时伴随着加深记忆的过程，理解得越透彻，记得就越牢。因此，要有效地记忆，就必须理解记忆对象的本质属性。对于数学概念，要弄清它的来龙去脉、明确它的内涵和外延；对于定理、公式，要明确它是怎样得到的，如何证明的，它反映了怎样的事实，其适用条件、范围是什么，经常在哪些方面应用等等。总之，注重理解，先懂后记，这是最根本的记忆之路。

如不少同学常出现 $a^2 \cdot a^3 = a^6$ 的错误，究其原因，还是没有理解法则的真正含义：

$$a^2 \cdot a^3 = \underbrace{a \cdot a}_{2\text{个}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{3\text{个}} = a^5。$$

4. 规律记忆

我们先看这样一个小故事。爱因斯坦询问一位朋友家的电话号码，那位朋友告诉他："我家的电话号码很难记：24361"爱因斯坦说："不难记嘛，两打（12 为一打），19 的平方。"

这个事例说明，杂乱无章的东西不容易记住，有规律的知识容易记住。因此，在记忆数学知识时，要抓住数字规律，符号规律，结构特征等。

如特殊角的三角函数值，是需要记忆的重要数据，但容易混淆。可以这样来记：

2	30°	45°	60°
sinα	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosα	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$
tgα	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

再配以口诀"一二三，三二一，根三分之一，一根三"记住了正切值，利用余切值和正切值的倒数关系，余切值也就相应记住了。

又如，抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的顶点坐标公式：

$x=-\frac{b}{2a}$时，$y=\frac{4ac-b^2}{4a}$。

不少同学往往容易记错，常记成：$x=-\frac{b}{2a}$. $y=\frac{b^2-4ac}{4a}$。

如果改成如下形式：

$x=-\frac{b}{2a}$，$y=-\frac{\triangle}{4a}$。

不但符号统一了，而且和以前熟悉的根的判别式挂起勾来，就可避免上述记忆之误。

5. 顺序记忆

顺序心理人皆有之，心理学研究表明：记忆效果依赖于是否按顺序记忆为目的。对于一个要记忆的对象如果有意识地排列了顺序或列成了表格，则记忆效果就佳，否则就差些。如圆周率 π 的密率为 355/113，可以认为是奇数 1、3、5 的两次重复，即 113355 从中间断开，按顺序作为分母、分子而构成。又如记两圆的位置关系与圆心距、半径的对应关系时，可按两圆从相离→相外切→相交→相内切→内含的顺序列成表格，将圆心距、半径之间的关系填在对应的图形下面，使各种关系一目了然，从而获得最佳的记忆效果。

6. 简化记忆

谁都知道，记的东西越少，越容易记住；越多，越不容易记。因此，将众多有关的知识经过分析、归纳、提炼，变成浓缩的知识，就好记忆。

如公式 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$ 可以表示七种图形的面积：

（1）若 a、b 是梯形的两底，h 是高，则 S 表示梯形的面积；

（2）若 a、b 是矩形的长（此时 a=b），h 是矩形的宽，则 S 表示矩形的面积；

（3）若 a、b 是平行四边形两对边的长（此时 a=b），h 是这两对边的距离，则 S 表示平行四边形的面积；

（4）若 a=0，b 是三角形的底，h 是高，则 S 表示三角形的面积；

（5）若 a 是弧 AB 的长 b 是弧 CD 的长，h 是线段 AC 的长（如图 1），则 S 表示“段环”ACDB 的面积；

（6）若 a、b 分别表示两个同心圆的周长，h 是半径之差，则 S 表示“圆环”的面积（如图 2）

（7）若 a=0，b 是弧 AB 的长，h 是扇形的半径，即 OA=h，则 S 表示扇形的面积（如图 3）。

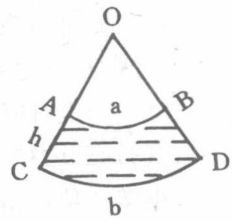


图 6-1

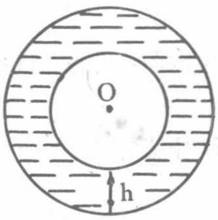


图 6-2

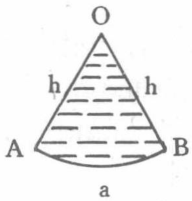


图 6-3

又如：相交弦定理、割线定理、切割线定理、切线长定理可以用一句话概括“交点到弦（切点可看成弦的两个端点重合）的两个端点的线段的积相等”。

7. 口诀记忆

将数学知识编成押韵的顺口溜，既生动有趣，又便于记忆，且印象深刻，不易遗忘。

如不等组解集的四种情况可以编成如下四句口诀进行记忆：

“大大取大，小小取小，

大小取中，不交为空。”

又如坐标系中对称点的坐标符号变化规律可编成下面的口诀：

坐标系中对称点，三类对称符号变：

x 轴对称 x 不变，y 轴对称 y 不变，

原点对称全改变，三个规律要记全。

几何中的辅助线也常常编成口诀，帮助记忆（参看解题方法与技巧中的“口诀”与辅助

线）。

8. 对比记忆

数学中有许多知识既有区别，又有联系，我们可以通过各种途径来进行对比，对比着记忆，可以由此推彼，以少及多，并从中寻求其内在的联系与区别，是记忆的一种好形式。

如两个三角形全等和相似的判定条件可对比记忆如下：

两三角形全等	两三角形相似
（1）两边对应相等，夹角相等；	两边对应成比例，夹角相等；
（2）两角对应相等，一边对应相等；	两角对应相等；
（3）三边对应相等；	三边对应成比例。

小结：角：相等→相等；边：相等→成比例。

又如解一元一次方程的步骤与解一元一次不等式的步骤做对比，并找出其相同之处与不同之处。

9. 形象记忆

图形是数学的直观语言，把抽象易混的记忆对象用熟悉，浅显、直观的图形表示出来，有助于提高记忆的持久性及再现性。

如不少同学初学公式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 时，往往错记成 $(a+b)^2=a^2+b^2$。如果结合右图记忆公式就不会记错。

函数的性质是十分枯躁难记的，若能结合它的图象进行记忆，数形结合，会收到良好的效果。

再如特殊角的三角函数值可根据两块三角板再结合三角函数定义记忆就不会出错，既使忘了，也可马上推证出来。

10. 有理数运算的技巧

在有理数计算中，除正确运用法则外，如能发现题目的特点，应用一些技巧，可提高解题速度和计算准确度。下面介绍有理数运算求解的几个技巧。

（一）将互为相反数结合相加

例 1. 计算：$(-18.5)+(-16.5)+(+18.9)+(+6.15)$

解：原式 $=[(-18.5)+(+18.9)]+[(-6.15)+(+6.15)]$

$=0.4+0=0.4$

（二）将同分母的分数结合相加

例 2. 计算：$(-12\frac{1}{2})+(+5\frac{3}{4})+(+4\frac{1}{2})+\frac{1}{4}$

解：原式$=[(-12\frac{1}{2})+(+4\frac{1}{2})]+[(+5\frac{3}{4})+\frac{1}{4}]$

$=-8+6$

$=-2$

（三）正负数分别结合相加

例 3. 计算：$(-32)+(+17)+(+65)+(-24)$

解：原式$=[(-32)+(-24)]+[(+17)+(+65)]$

$=(-56)+(+82)$

$=26$

（四）拆带分数后，将整数和真分数分别相加

例 4. 计算：$(+12\frac{1}{2})+(+7\frac{1}{3})+(+5\frac{1}{4})+(-4\frac{1}{2})$

解：原式$=+12+\frac{1}{2}+7+\frac{1}{3}+5+\frac{1}{4}-4-\frac{1}{2}$

$=(12+7+5-4)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2})$

$=20+\frac{7}{12}$

$=20\frac{7}{12}$

（五）拆整数后重新结合相加

例 5. 计算：$182+178+177+183+180+185$

解：原式$=(180+2)+(180-2)+(180-3)+(180+3)+$

$5)$

$=180\times6+(2-2-3+3+5)$

$=1080+5$

$=1085$

（六）化分数为小数计算

例 6. 计算：$1\frac{1}{2}-3.75+2.2-\frac{3}{4}$

解：原式$=1.5-3.75+2.2-0.75$

$=(1.5+2.2)-(3.75+0.75)$

$=3.7-4.5$

$=-0.8$

（七）化小数为分数计算

例 7. 计算：$(+0.125)+(+3\frac{1}{4})+(-3\frac{1}{8})+(-0.25)$

解：原式$=(+\frac{1}{8})+(+3\frac{1}{4})+(-3\frac{1}{8})+(-\frac{1}{4})$

$=(\frac{1}{8}-3\frac{1}{8})+(3\frac{1}{4}-\frac{1}{4})$

$=-3+3$

$=0$

（八）应用运算律计算

例 1． 计算：$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots\frac{99}{100}$

分析：应用加法结合律把分母相同的项结合到一起。则$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$、$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$依次类推下边的项，得$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{10}{5}=2\cdots$而$1=\frac{1}{2}\times 2$、$\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\times 3$、$2=\frac{1}{2}\times 4$，所以，这样类推下去，可得$\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\frac{4}{100}+\cdots+\frac{99}{100}=\frac{1}{2}\times 99$

解：原式$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\frac{3}{100}+\cdots+\frac{99}{100}\right)$

$=\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+99)=\frac{1}{2}\times 99\times 50=2475$

（九）裂项相消法计算

例 2． 计算：$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}$

分析：把该式中的每一项拆成两项，消去一些中间项，可使运算简便、注意要恒等变形

解：原式$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$

（十）错位相减法计算

例 3． 计算：$3+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{81}$

解：设原式$=x$，则$3x=3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{82}$，

$3x-x=3^{82}-3$　即 $2x=3^{82}-3$　$\therefore x=\frac{3^{82}-3}{2}$

$\therefore$原式$=\frac{3^{82}-3}{2}$

（注：错位相减指的是 $3x-x=3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{81}+3^{82}-3-3^2-3^3-3^4-\cdots-3^{81}$）

（十一）运用公式计算

例 4． 计算：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$

分析：用 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 即平方差公式计算，可使运算简便

解：原式$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{9}\times\frac{11}{10}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}=\frac{11}{20}$

利用上述技巧，不妨计算

① $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\frac{3}{50}+\cdots+\frac{49}{50}$

② $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{90\times 92}$

③ $2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{99}$

④ $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$

11．巧法能解难

比较两个实数的大小，有多种方法，我们以差值比较法，商值比较法、乘方比较法为例巧妙地运用这些方法，难题不难

（一）差值比较法

若 $a-b\geqslant 0$，则 $a\geqslant b$，若 $a-b<0$，则 $a<b$

例 1. 已知：$a>-1$，$b>0$，$c>0$ 比较$\frac{a+b}{c}$与$\frac{b-1}{c}$的大小

解：$\frac{a+b}{c}-\frac{b-1}{c}=\frac{a+1}{c}$　（作差）

$\because a>-1 \quad \therefore a+1>0$

$\because c>0 \quad \therefore \frac{a+1}{c}>0$（比较差与零）

$\therefore \frac{a+b}{c}>\frac{b-1}{c}$　（结果）

（二）商值比较法

如果都是正数，可用商值比较法，即若 $a>0$，$b>0$，$\frac{a}{b}\geqslant 1$，则 $a\geqslant b$，若$\frac{a}{b}<1$，则 $a<b$

例 2. 比较两个实数$-3\sqrt[6]{2}$和 $2\sqrt[3]{-4}$的大小

解：两个数都是负数，比较两个负数的大小，首先要求它们的绝对值。

$|-3\sqrt[6]{2}|=3\sqrt[6]{2}$，$|2\sqrt[3]{-4}|=2\sqrt[3]{4}$

$\because \frac{3\sqrt[6]{2}}{2\sqrt[3]{4}}=\frac{3\times 2^{\frac{1}{6}}}{2\times 2^{\frac{2}{3}}}=\frac{3}{2}\times 2^{\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1.5}{\sqrt{2}}>1$

$\therefore 3\sqrt[6]{2}>2\sqrt[3]{4}$　即$-3\sqrt[6]{2}<2\sqrt[3]{-4}$

（三）乘方比较法

上例还可用乘方比较法，即若 $a>0$，$b>0$，$n>0$　$a^n>b^n$、则 $a>b$

解：$\because (3\sqrt[6]{2})^6=3^6\times 2=729\times 2=1458$

$(2\sqrt[3]{4})^6=2^6\times 4^2=64\times 16=1024$

$\therefore 3\sqrt[6]{2}>2\sqrt[3]{4}$

$\therefore -3\sqrt[6]{2}<2\sqrt[3]{4}$

此外还有一些比较方法，如递推比较法，图象比较法，只要细心观察其特点，妙用方法，会找到捷径的，如有兴趣，不妨试做

1）比较 16^{18}与 18^{16}的大小

2）比较$\frac{1}{2\sqrt{3}}$与$\sqrt{3}-\sqrt{2}$的大小

3）比较$\frac{3}{2}\sqrt{48}$与$\frac{5}{7}\sqrt{147}$的大小

4）比较$\frac{\sqrt{11}+\sqrt{13}}{2}$与$\sqrt{12}$的大小

5）比较$\sqrt{5}+2$与$\sqrt{57}-2$的大小

6）比较 $2\sqrt{2}-\sqrt{6}$与$\sqrt{6}-2$的大小

12. 巧用“乘方”、“开方”

乘方、开方恒等变形，在数学解题中是常常用到的，下面此题的解法就是妙用“乘方、开

方”这一变形，请看：

例：若 a、b 都是正实数，且$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$ 求 $(\frac{b}{a})^3+(\frac{a}{b})^3$ 的值

解：等式$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}=0$ 两边都乘以 a+b 得$\frac{a+b}{a}-\frac{a+b}{b}-1=0$

$\therefore \frac{b}{a}-\frac{a}{b}=1$

又$\because \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\sqrt{(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})^2}=\sqrt{(\frac{b}{a}-\frac{a}{b})^2+4}=\sqrt{5}$

$\therefore (\frac{b}{a})^3+(\frac{a}{b})^3=(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})[(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})^2-3]=\sqrt{5}[(\sqrt{5})^2-3]=2\sqrt{5}$

13. 巧构思，妙利用

在进行多项式的乘法运算时，利用乘法公式既迅速又简捷，但在实际解题中，有些又不能直接用公式，需创条件方能使用。

例 1. 计算：$(4a+3b-5c-2)(-4a+3b-5c+2)$

分析：此题不能直接使用公式，但仔细观察可知：两个因式中有两项相同，两项互为相反数，所以适当组合将原式变为 $(a+b)(a-b)$ 型利用平方差公式完全平方公式去计算：

解：原式$=[(4a-2)+(3b-5c)][(3b-5c)-(4a-2)]$

$=(3b-5c)^2-(4a-2)^2=9b^2-30bc+25c^2-16a^2+16a-4$

例 2. 计算：$(5a+3b-2c)(5a-3b+6c)$

分析：从表面上看本题也不能使用乘法公式，但是两个因式中有一项完全相同，另一项互为相反数，又因$-2c=2c-4c$　$6c=2c+4c$，所以可采用拆项的技巧，仿例 1 来做

例：原式$=(5a+3b+2c-4c)(5a-3b+2c+4c)$

$=[(5a+2c)-(4c-3b)][(5a+2c)+(4c-3b)]$

$=(5a+2c)^2-(4c-3b)^2$

$=25a^2+20ac+4c^2-16c^2+24bc-9b^2$

14. 巧算代数式的值

定义、定理、公式和法则是解题的依据，某些问题利用定义等解比其它方法容易奏效，举例如下：

例 1. 已知：a、b 是不等的实数，且 $a^2=5-3a$　$b^2=5-3b$ 求 a^3+b^3 的值。

解：由已知得：a、b 是方程 $x^2=5-3x$ 的根。

$\therefore a+b=-3$，　$ab=-5$，　$a^3+b^3=(a+b)[(a+b)^2-3ab]=-72$

说明：本题若先求出 a、b 再求 a^3+b^3 的值计算量大、比较繁索。上述解法巧用韦达定理思路清晰，运算简便。

求代数式的值，常常需要将已知的关系式或给出的代数式进行适当变形，以化繁为简，使问题得到解决。

例 2. 已知：$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$，　求 $2a^8+2a^7-a^6+4a^5+4a^4-4a^3-2a^2+a+5$ 的值

解：由已知得：$\sqrt{3}a=1-a$　$3a^2=1-2a+a^2$　$2a^2+2a-1=0$

原式$=a^6(2a^2+2a-1)+2a^3(2a^2+2a-1)-a(2a^2+2a-1)+5=5$

例 3. 已知：$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$，　求$\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值

解：由已知得：$y-x=3xy$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{-2(y-x)+3xy}{-(y-x)-2xy}=\dfrac{-3xy}{-5xy}=\dfrac{3}{5}$

例 4. 已知：$\dfrac{x}{y}=\dfrac{4}{5}$，　求 $\dfrac{y^2}{x^2-xy+y^2}$的值

解：将代数式颠倒一下

$\because \dfrac{x^2-xy+y^2}{y^2}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\left(\dfrac{x}{y}\right)+1=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2-\left(\dfrac{4}{5}\right)+1=\dfrac{21}{25}$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{25}{21}$

例 5. 已知：$x^2+x-1=0$，则 x^3+2x^2+1994 的值

解：由已知 $x^2+x-1=0$ 得 $x^2=1-x$

$\therefore x^3=x\cdot x^2=x(1-x)=x-x^2=2x-1$

$\therefore x^3+2x^2+1994=2x-1+3(1-x)+1994=1995$

例 6. 设 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，求$\dfrac{x^3+x+1}{x^5}$的值

解：由已知可得 $x^2-x-1=0$　即 $x^2=x+1$

$\therefore \dfrac{x^3+x+1}{x^5}=\dfrac{x^3+x^2}{x^5}=\dfrac{x+1}{x^3}=\dfrac{x^2}{x^3}=\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

例 7. 已知：$a=\sqrt{17}-1$，求 $a^5+2a^4-17a^3-a^2+18a-17$ 的值

解：由已知，$a+1=\sqrt{17}$两边平方，得

$(a+1)^2=17$　即 $a^2+2a-16=0$　而

原式 $=a^3(a^2+2a-16)-a(a^2+2a-16)+(a^2+2a-16)-1=0-0+0-1=-1$

求代数式的值时，如能细心观察，根据题设条件特征，运用适当方法常能起到事半功倍的效果，请看下例：

例 8. 已知：$x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$，

$y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})$

求下列各代数式的值

(1). x^2-xy+y^2；(2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

分析：细心观察，不难发现：

$x+y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})+\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})=\sqrt{7}$

$xy=\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}+\sqrt{5})\dfrac{1}{2}(\sqrt{7}-\sqrt{5})=\dfrac{1}{2}$

解：$\because x+y=\sqrt{7}$；$xy=\dfrac{1}{2}$