

单樽

解题研究
丛书

单樽◎著

解题漫谈

一本**武功秘籍**！找到它，勤加练习，就能成为武林高手。

普及数学知识，增加读者对数学的理解，提高数学的品味

JIETI
MANTAN



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

单樽

解题研究

丛书

单樽◎著

解题漫谈



上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATIONAL
PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

解题漫谈 / 单樽著. —上海:上海教育出版社,2016.11

(单樽解题研究丛书)

ISBN 978-7-5444-7006-3

I. ①解... II. ①单... III. ①数学—解法 IV. ①01-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第284034号

策划编辑 刘祖希

责任编辑 张莹莹

封面设计 陆 弦

单樽解题研究丛书

解题漫谈

单 樽 著

出 版	上海世纪出版股份有限公司 上海教育出版社 易文网 www.ewen.co
地 址	上海市永福路123号
邮 编	200031
发 行	上海世纪出版股份有限公司发行中心
印 刷	上海盛通时代印刷有限公司
开 本	700×1000 1/16 印张21 插页1
版 次	2016年12月第1版
印 次	2016年12月第1次印刷
书 号	ISBN 978-7-5444-7006-3/G·5768
定 价	52.00元

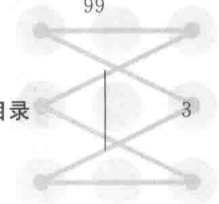
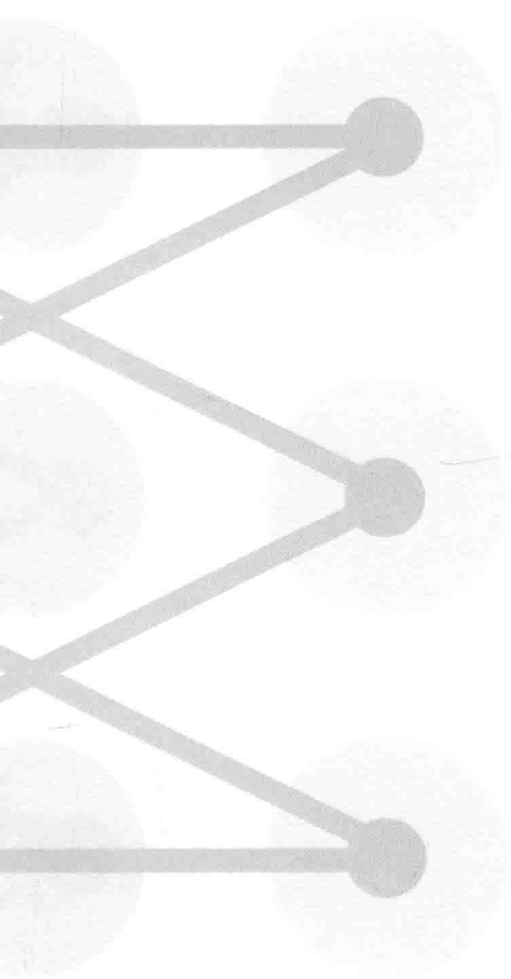
(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

基础部分

1 溶液浓度	3
2 力求简单	4
3 整数好算	5
4 从何切入	6
5 立方体的展开	7
6 阶乘好大啊!	10
7 又见阶乘	11
8 等比的值	13
9 最简单的证法	14
10 别没事找事	14
11 如愿以偿	15
12 化为互质	17
13 是平方数	18
14 唯有一个	19
15 条件太多	20
16 五人合作	21
17 1的变形	22
18 变为同分母	23

19	盯紧分母	25
20	瞄准目标	26
21	没有根式	28
22	一个恒等式	29
23	配方更好	30
24	又用配方	32
25	无需花招	33
26	何需套路	34
27	弄巧成拙	35
28	一次函数	37
29	变更原点	38
30	列表更好	39
31	尽信书,不如无书	40
32	用判别式?	41
33	三次根式	42
34	不可忽视	43
35	不解风情	46
36	根的正负	46
37	函数单调	48
38	先定范围	49
39	中点距离	50
40	先抓西瓜	53
41	拼图游戏	55
42	知识障	56

43	面积之比	58
44	六边形面积	60
45	芝麻,开门	62
46	寻找条件	63
47	改造题目	66
48	排定大小	67
49	第六种证法	68
50	老封编的题	70
51	倒立而行	74
52	座位相邻	75
53	复数,并不复杂	76
54	取数	78
55	多项式	80
56	中位数	82
57	一座雄关	83
58	复数又来了	85
59	子集族个数	87
60	集合个数	88
	未带地图的旅人	90
	提高部分	
61	叶中豪的题	93
62	姜霁恒的题	97
63	外心的对称点	99



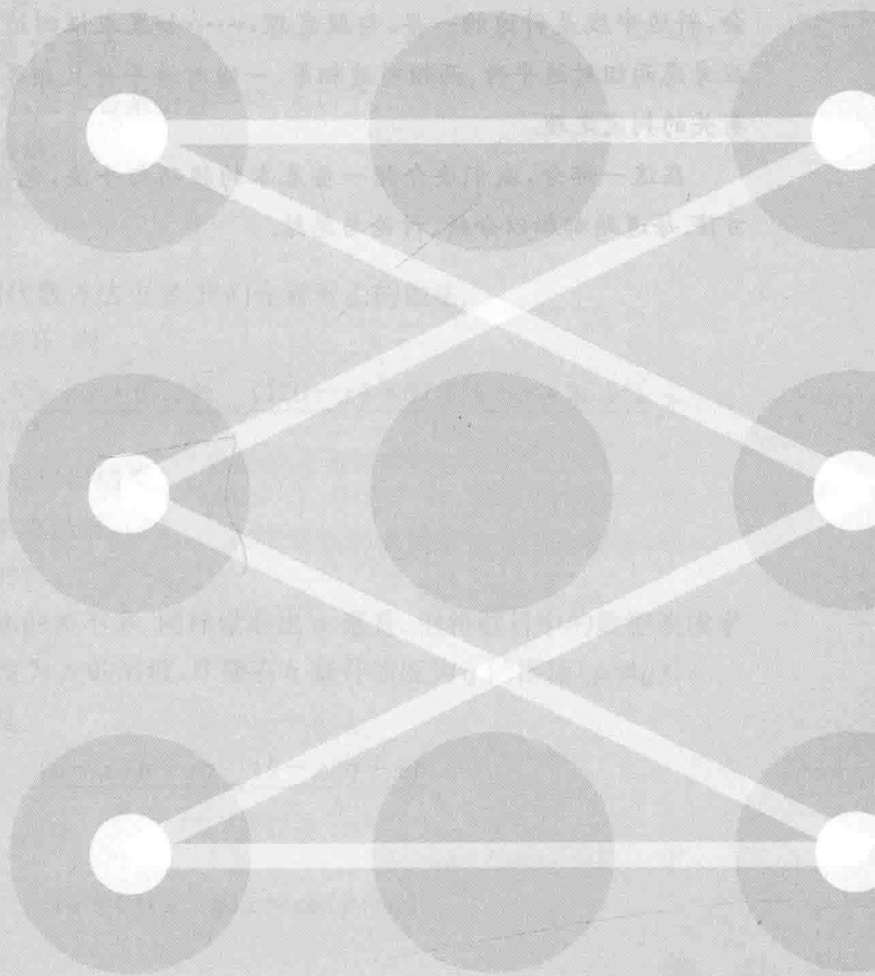
64	西摩松线	101
65	对称性	102
66	有与没有	104
67	三分之一	106
68	一道竞赛题的推广	108
69	新编几何题	112
70	相交的圆	113
71	两圆相切	115
72	又是两圆相切	119
73	无穷多个平方数	122
74	难亲数列	124
75	苍蝇、蝇魂	126
76	幽灵数列	128
77	沿数轴前进	131
78	侣伴数列	136
79	代数式的值	140
80	幂和的不等式	141
81	整数逼近	143
82	标准化	144
83	两组正整数	147
84	整数组数	149
85	多个函数	151
86	一个多项式	154
87	乘积的项数	156

88	上要封顶	158
89	柳暗花明	161
90	完全剩余系相加	163
91	添加元素	165
92	数论函数	166
93	廉洁不廉洁	168
94	四进制	170
95	差分再来	175
96	复数的模	179
97	递推与归纳	181
98	不动点	184
99	又一个函数	186
100	元素、集合	188
101	功不唐捐	190
102	元素的和	192
103	集合、映射	195
104	好子集	197
105	元素的和相等	201
106	暗示	202
107	元数的最大值	205
108	小孩买糖	207
109	图的染色	208
110	友好的赛事	210
	眼界与品味	214

附录

1	代数问题应当用代数解法	219
2	近在眼前	221
3	相似形、透视形、位似形	223
4	一题五解	226
5	两道 2013 年江苏高考题	230
6	三次函数与中心对称	232
7	谈谈提高解题能力	234
8	解首届“学数学”邀请赛的感想	240
9	Möbius 函数	249
10	再谈提高解题能力	258
11	也谈一道竞赛题的纯几何解法	263
12	两道高考题	266
13	每道题做三遍	268
14	一同做 2015 年江苏省数学高考试题	273
15	Ramanujam 的一个恒等式	285
16	解第 30 届中国数学奥林匹克试题	288
17	简评第二届“学数学”数学奥林匹克邀请 赛(秋季赛)	298
18	谈第 55 届国际数学奥林匹克试题的解法	309
19	做第三届“学数学”邀请赛(春季赛)的试题	320

基础部分



基础部分的问题比较容易,用到的知识较少(很多只需要初中的数学)。

基础极为重要.基础未打好就忙于提高,犹如在沙滩上建筑高楼,也像楷书还未学好,就去写狂草,当然不易成功.据我观察,不少高三学生,初中基础并未打好.即使是参加竞赛的选手,也有一些人需要加固基础.

良好的解题习惯应当在打基础时养成(不良习惯也应在这时及早纠正)。

遇到问题,要认真读题,弄清已知与求证(或求),不仅要了解其意义,记在胸中,还要知道相关知识,如已知三角形是直角三角形,就应知道两个锐角互余,斜边中线是斜边的一半,勾股定理,……如果求证四边形是平行四边形,就应考虑两组对边平行、两组对边相等、一组对边平行且相等、对角线互相平分等有关的判定定理。

在这一部分,我们要介绍一些基本的技巧与手法,也介绍一些基本的解题方法.每道题都加以分析、讨论与总结。

问题 A 瓶装 180 毫升浓度为 35.5% 的某种溶液, B 瓶装 120 毫升浓度为 67.2% 的同种溶液. 从 A、B 取出等量的溶液, 然后分别倒入 B、A. 混合后两瓶溶液浓度恰好相等. 问: 各取出多少毫升溶液?

甲: 这个浓度问题, 我会做.

师: 那你就做一做.

乙: 这题我也会做.

师: 我把数据改一改, 35.5%、67.2% 分别改为 32.5%、58.4%. 你做做看. 过了一会, 两人都做好了.

甲: 答案是 72 毫升.

乙: 我的答案也是 72 毫升.

甲: 题目数据不同, 怎么答案恰好一样. 太巧了.

师: 看看你们怎么做的.

甲: 我用算术方法.

乙: 我用代数方法.

师: 进入中学, 用代数方法更多. 我们先看看乙的做法.

乙: 设各取出 x 毫升, 则

$$\frac{(180-x) \cdot 35.5\% + x \cdot 67.2\%}{180} = \frac{(120-x) \cdot 67.2\% + x \cdot 35.5\%}{120},$$

然后去分母、整理, 最后得出结果.

甲: 不见得比算术方法好.

乙: 老师怎么做的?

师: 我的方法和你的差不多. 同样设取出 x 毫升. 但将题目中的数据改成字母: A 瓶有 a 毫升浓度为 p 的溶液, B 瓶有 b 毫升浓度为 q 的溶液 ($p \neq q$).

甲: 那么方程就是

$$\frac{(a-x)p + xq}{a} = \frac{(b-x)q + xp}{b},$$

去分母、整理, 得

$$(a+b)(p-q)x = ab(p-q).$$

因为 $p \neq q$, 所以

$$x = \frac{ab}{a+b}. \quad \textcircled{1}$$

当 $a=180, b=120$ 时, $x=72$.

乙: 这比数的计算简单.

甲: 不论 p, q 为什么值, 答案都是①.

师: 代数就是用字母代替数. 用字母代替数后, 不但计算简单(避免了繁琐的数值计算), 而且具有一般性, 容易看到规律. 学习代数后, 就应当自觉地用字母代替数, 力求得出一般的结果.

所谓好的解法, 就是简单而又一般的解法.

评注 引入字母后, 数学发生了巨大的变化. 研究的对象不仅是数, 而且还有字母. 字母可以代表数(起初就是这样), 也可以不代表数(比如代表向量、矩阵等等). 字母自成体系(或称为系统), 可以有各种运算与规则(比如矩阵可以定义乘法, 满足结合律, 却不满足交换律).

2

力求简单

问题 酒精与水的溶液中, 酒精: 溶液总量 $= k : m$. 如果再加 x 个单位的水或者去掉 x 个单位的酒精($x \neq 0$), 那么得到的酒精: 溶液总量的比都相等. 求这新的比的数值.

师: 还是浓度问题.

甲: 不妨设原溶液中有 k 个单位酒精, $(m-k)$ 个单位水. 由题意, 可得

$$\frac{k}{m+x} = \frac{k-x}{m-x}. \quad \textcircled{1}$$

去分母、整理, 得

$$x(x+m-2k)=0. \quad \textcircled{2}$$

所以

$$x=2k-m. \quad \textcircled{3}$$

代入①的左边, 得新比的值为

$$\frac{k}{m+x} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}.$$

乙:我设新比的比值为 r ,则

$$k = (m+x)r, \quad \text{④}$$

$$k = (m-x)r+x. \quad \text{⑤}$$

④-⑤,得

$$2xr = x. \quad \text{⑥}$$

所以

$$r = \frac{1}{2}.$$

师:不求 x ,直接得出 r .第二种解法稍简单一些.

甲:还有其他解法吗?

师:由题意,在两种情况下,酒精与溶液总量的比相等.其中第二种情况比第一种,酒精少 x 个单位,水也少 x 个单位,即总量少 $2x$ 个单位.如果将酒精为 x 个单位,溶液总量为 $2x$ 个单位的溶液加到第二种情况的溶液中,那么就变为第一种情况,而浓度(酒精与溶液总量的比)不变.所以加入的溶液,浓度与它们也相同,即浓度为 $\frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$.

乙:这种解法更加简单.

师:其实这种解法与你们的解法并无实质的差异,只不过省去了一些形式上的演算.但省去形式上的演算,更多地用脑思考,对发展思维能力是有益的.

很多数学会议休息时,数学家们边喝咖啡边讨论问题.这时不可能进行纸面上的演算,更需要直接剖析问题的本质.

数学家厄尔迪什(Erdős)曾说:“数学家是将咖啡转变成定理的机器.”

3

整数好算

问题 解方程组

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 1, & \text{①} \\ \frac{x}{7} + \frac{y}{5} = 3. & \text{②} \end{cases}$$

甲:①+②,得……

师:慢一点.在①+②之前,最好增加一个步骤.

乙:应当先去分母,将①、②化成

$$\begin{cases} 7x + 5y = 35, & \text{③} \\ 5x + 7y = 3 \times 35. & \text{④} \end{cases}$$

然后再③+④,得

$$\begin{aligned} 12(x+y) &= 4 \times 35, \\ 3x + 3y &= 35. & \text{⑤} \end{aligned}$$

甲:③-④,可得

$$x - y = -35. \quad \text{⑥}$$

$3 \times \text{⑥} + \text{⑤}$,得

$$\begin{aligned} 6x &= -2 \times 35, \\ x &= -\frac{35}{3}. \end{aligned}$$

代入⑥,

$$y = x + 35 = \frac{70}{3}.$$

师:本题不难.但第一步先去分母较好,避免了分数运算(⑤不化为 $x+y=\frac{35}{3}$ 也是这个原因).分数运算容易算错,整数运算比分数运算方便,这是一个显而易见的道理,却被人忽视.

有人说大石头不会将你绊倒,绊倒你的往往是小石头.反过来说,如果平时就注意这些小石头,那么就不会被绊倒了.

4

从何切入

问题 已知方程组

$$\begin{cases} |x| + x + |y| + y = 10, & \text{①} \\ |x| - x + |y| - y = 4 & \text{②} \end{cases}$$

恰有两组不同的解,即 $(x, y) = (a, b)$ 与 $(x, y) = (c, d)$, a, b, c, d 均为实数. 求 $a+b+c+d$ 的值.

甲: $x \geq 0$ 时, $|x| - x = 0$; $x < 0$ 时, $|x| + x = 0$.

所以,在 $x \geq 0$ 时,由②得

$$|y| - y = 4. \quad \textcircled{3}$$

从而 $y < 0$,并且

$$\begin{aligned} -2y &= 4, \\ y &= -2. \end{aligned}$$

代入①,得 $x = 5$,即 $(5, -2)$ 是一组解.

同样,得 $x < 0$ 时的另一组解 $(-2, 5)$.从而,

$$a+b+c+d = 5-2+(-2)+5=6.$$

乙:我的解法是①-②,得

$$2(x+y) = 6. \quad \textcircled{4}$$

从而

$$a+b+c+d = 2(x+y) = 6.$$

师:两种解法都好,切入点不同.甲着眼于解方程,从绝对值的定义切入,解出 x, y ,从而得出结果.乙则看得更远一步,充分利用了已知条件,从所要求的结果 $a+b+c+d$ 直接切入,得出 $a+b+c+d = 2(x+y) = 6$.乙的做法更好一点.

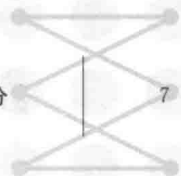
甲:但是,我得出了 x, y 的值.

师:一个问题可以有种种不同的切入点.“将军欲以巧伏人,盘马弯弓惜不发”,就是寻找一个最佳的切入点.

5

立方体的展开

问题 一个纸制的立方体,有6个面,8个顶点,12条棱.沿着棱剪开而不破坏每个面,也不使面与立方体分离,直至可以将它铺在平面上,称为立方体的展开.将立方体展开,需要剪几条棱?为什么?



如果将立方体展开,可以得到多少种不同的图形?

如果将一个无盖的立方体盒子展开,又可以得到多少种不同的图形?

甲:我知道剪7条棱可以将立方体展开.但为什么是7条,不太好说.

师:这正是问题的困难所在:证明你的结论.

乙:假定正方体已经展开.所得平面图形由6个正方形组成.可以看成是由1个正方形开始,每次连上1个正方形.

显然展开图中每个顶点处至多引出4条边.原立方体每个顶点处引出3条棱,因而4条边中有2条成直角的实际是同一条剪开的棱(如图1).不能在 $\angle EAE'$ 处再连正方形.所以每连1个正方形,应增加3条边.从而6个正方形连在一起后,共有

$$4+3\times 5=19$$

条边.比原立方体的棱多出

$$19-12=7$$

条,即原立方体有7条棱被剪(每条被剪的棱变为2条边).

师:很好.再看另两个问题.

甲:我知道无盖的立方体盒子展开后,有8种图形,即

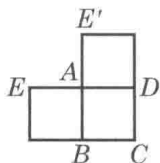


图1

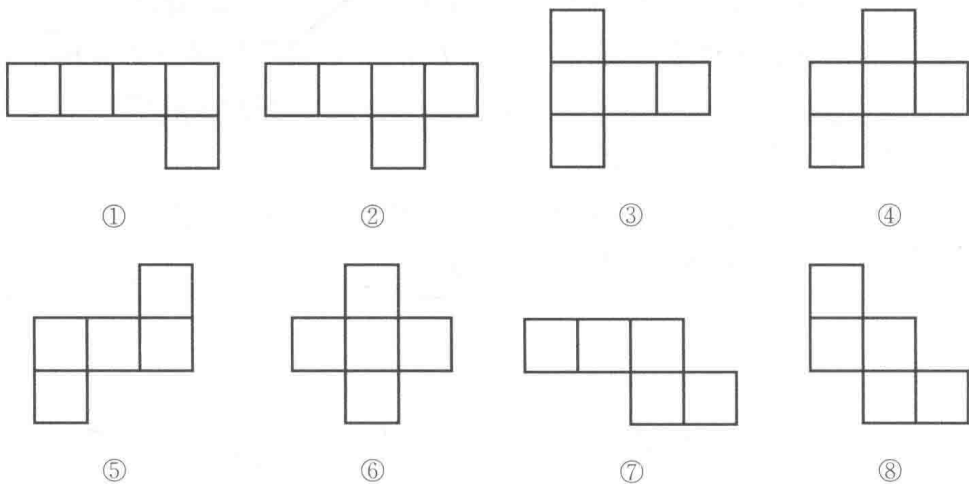


图2

师:为什么只有这8种呢?

甲:说不清楚.

乙:我想再去掉一个面,就可以说明了.