

大 專 用 書

劇 變 論 入 門

孫道詩(P. T. Saunders)著
蕭欣忠 呂素齡等 譯

國 立 編 譯 館 出 版

大 專 用 書

劇 變 論 入 門

孫道詩(P. T. Saunders)著
蕭欣忠 呂素齡等 譯

國 立 編 譯 館 出 版

中華民國七十二年五月一日台初版

劇 變 論 入 門

版 權 所 有
翻 印 必 究

定 價：精裝新台幣壹佰肆拾元
平裝壹佰壹拾元

譯著者：蕭 欣 忠
呂 素 齡

出版者：國 立 編 譯 館

印行者：國 立 編 譯 館

館 址：台北市舟山路二四七號

電 話：三 二 一 六 一 七 一

作者序言

幾乎每個科學家都曾聽人提過劇變論，也知道關於劇變論以及其應用好像有不少的爭議。但是我想大部分人印象中的劇變論大抵都只限於從一些發表於通俗科學雜誌上介紹性的文章所得來。因此這種印象大抵只像走馬看花，人云亦云而已。我們在這兒寫這本小書的目的是要使得任何儘管只有一點點數學基礎的人都能夠開始對於劇變論的真正重點所在，其理論形式以及應用技巧熟悉起來。使他能夠理解劇變論到一個程度足夠他去讀得懂任何應用劇變論的文章。甚至也使他於必要時自己都可以熟練地應用起劇變論來。這裏所指對數學有一點點基礎的人大概泛指任何修習過大一初等微積分的人，甚至一個程度比較好的高中學生也都可以包含在內。

大概每一位讀者把這本書從頭讀下來的時候總多多少少會碰到一些他以前所未曾學習過的新觀念。我想爲了把劇變論介紹得適切而恰當，這些新觀念的引入是必要的。對於這種新觀念的使用我們大概遵循下面兩個原則。第一，一定要非得使用不可我們才使用。而且這時我們會儘量仔細來解釋其意義，然後才漸漸使用起來。有時候有一些東西如果使用新觀念來講的話，可以講得十分簡潔而且使計算變得容易又富有技巧，但是同樣這些東西也可以使用老觀念來解釋得很清楚，只不過這時有可能我們所需給出的計算，導引等等就會變得很長而笨拙。對於這種兩可的情況，按照我們的第一原則，我們常是寧可選擇後者，使用老觀念。因爲我們認爲，對於一位讀者來說，要他使用

一種新學來的觀念去理解一些東西總比讓他使用他所原來熟悉的老觀念來理解同樣這些東西來得困難。尤其本書主要的目的在於清楚解釋劇變論，而不在於嚴密證明劇變論中的定理。因此使用老觀念雖然會顯得笨拙一點，但是對我們並沒有什麼損失。使用新觀念的第二個原則是保持使用嚴格數學語言來解釋這些新觀念。我們不喜歡像一些人那樣，到處添油加醬，拿一些非數學性的話語與一些似是而非的例子來幫助解釋數學的新觀念。這樣的做法雖然有些好處，但是却常易蒙蔽了這些數學新觀念的真意。因此害得受他們講法薰陶過的人非常難於讀得懂比較深的數學理論之證明。因為爲了要瞭解這些證明他們不僅還得重新學習新觀念而且還得把以前所學的加以揚棄（unlearn），這是非常辛苦的。因此我們仔細持守第二個原則，使得讀者們可以放心。因為當您們以後開始感興趣想自己也去嘗試研究這些劇變論之高深定理的時候，您們在這兒所學的最好可以派上用場。不用再花費神重新調整，重新學習。

本書至少有一半以上的篇幅是用來講劇變論的應用。我覺得我們書中所使用的講法也可以歸結出兩大特色。第一，我們對於每一種應用大概都得從頭到尾仔細講。我們先要講清楚原來在物理學中、在工程學中或者在生物學中我們想要處理的問題是什麼，然後還要講如何對這些現象進行數學的分析，如何把劇變論用進來得到什麼解答，最後還要把這些分析的結果重新解釋到原來問題當中，以說明其意義。這樣的做法是跟通常成熟的應用數學的講法大爲不同的。以數學家的習慣來談論應用數學，例如來寫一本微分方程式論的書，則通常只是把所要解的微分方程式寫出來，就直接分析討論如何求解。我們根本懶得再去提到底這微分方程式是由那一個物理現象或電路構造所導引得來的。就是有提通常也只三言兩語，點到爲止。而另一方面當我們

給出各種解法，求得解之後也就算大功告成，通常我們也是懶得再把這解放回原來問題中，解釋其意義。但是劇變論之應用，還沒有發展成熟，因此我們不得不把問題現象，數學處理，結果分析解釋完全都合在一起講。因此必須全部講是我們應用劇變論時的第一個特色。

但是反過來，有時候我們雖然知道應該全部講，但是我們所面對的問題却是在社會科學或生物學中的，這些問題的情況似乎那麼繁雜，幾乎使我們無從着手加以分析。我們想完全講，但是却講不全，這麻煩可以看成劇變論應用的第二個特色。既然劇變論對許多問題的應用還沒辦法講全，我們只好降低我們的目標，只先就可以多多少少講得起來的部分提出來談，這樣總比完全不曉得如何着手來得好，至少我們或許能透過這些不齊全的應用來增加對這困難問題的瞭解。因此這第二個特色自然造成的結果就是我們在某一些場合中要講劇變論之應用時，我們發覺根本無定規可循。而只能靠著這問題的特殊性質，靠著我們的經驗或靈感，以及對該問題持續不懈的研究思考，才能或許把劇變論應用到這問題上，形成一個成功的實例。也就是這個緣故我們在書中儘多地提及一些已被人們思索過，成功地示範過的應用實例，好讓讀者們熟悉並瞭解劇變論可以運用到何等廣濶的層面與範圍。這樣當讀者以後面對自己研究的問題，其中出現某些不連續性的特徵時，或許能從這衆多的應用實例中獲取靈感，而終於也能成功的把劇變論用到自己的研究工作中，並藉著這些應用而對自己的研究工作的本性有了更透徹的理解。

除了使讀者熟能生巧之外我們提出這麼多的應用實例還有一個原因，就是要使讀者充分地相信劇變論中的定理是正確的，是真正可用的。如果在書中我們仔細證明這些定理，那就不用這樣麻煩。但是我們的小書並沒有給出定理的證明，因此我們不得不以儘多成功的應用

實例來使讀者們接受這些定理的真實性。其實讀者們請儘管放心好了，因為所有細心察驗過這些定理的數學家們，沒有人對這些定理證明的真確性與完整性有過懷疑。事實上所有關於劇變論的爭議，完全不是這些定理是否為真的爭論，而是關於如何運用這些定理。譬如，如何以劇變論的觀點重新來建立一套理論生物學的可行性的爭論。有些人可能因為沒能真正瞭解這些定理的意義，一知半解地胡亂給出錯誤的應用。另一些人好像也真的把劇變論應用到他們特殊的研究工作上而講得頭頭是道，但是他們那些東西却又讓人覺得好像太離譜，太不可思議，而不得不追問，劇變論真的可以如此被應用嗎？無論如何，我們在書中儘多的給出各種應用實例，以便讓讀者多瞧瞧。您不見得需要同意所有這些應用，自己可以決定到底那一些用得好，那一些用得不合理，那一些可以繼續發揮，那一些正好符合您的興趣，在以後的研究工作中可拿來加以參考。

劇變論在物理學中的應用作得最好，而且沒有引起任何人的爭論。董禮內教授（René Thom）知道這些成功的應用，但他却不願意把劇變論，如同一般應用數學，當作理論物理之中的課題。在他心目中，他更願意把劇變論當作是源自於生物學的，他希望透過劇變論奇妙的化繁為簡的能力以及劇變論分析掌握不連續性質的特性來檢討並從頭發展出一套理想的理論生物學。我想這正是劇變論最引人興趣同時也是最引起人爭論的地方。董教授常抱怨生物學家們不肯以數學理論的觀點來處理生物學的問題，這話誠然沒錯，但是董教授其實也該補進另外一句話才算公平，因為其實數學家們也不慣於使用生物學上的術語來進行他們的思考。董教授的困難正在這兒，數學家與生物學家向來井水不犯河水，他們彼此之間並沒有那種存在於數學家與物理學家之間的密切關係。理論物理學已經成熟而且現成可用，但是理論

生物學還只在萌芽的階段，只不過是董教授腦海中的理想。由於問題對象完全不同，我們根本無法把理論物理中的方法搬過來建立理論生物學，另方面由於生物學家們思考的方式，處理問題的手法與表達他們結果的形式都跟數學家差別那麼大，我們也無法採用生物學家的生物學來建立理論生物學。因此一個人若想把劇變論使用到生物學上，他一定不要以為已經有一些現成的整套的東西可以供他學習相反的，他必須預期一切都還停留在起頭的階段，尚未成型，尚未開展，一切還得一點一滴去累積。當我們有了這樣的心理預備，瞭解像這樣一個理想中的如同理論物理學那麼成功的理論生物學絕非能在最近的未來所能完全加以發展成功，那麼我們就會平心靜氣的設法面對這些爭議，以客觀的真知灼見捨短取長，繼續研究探索。

誠然在劇變論的各種應用中，特別在劇變論最基本的目標，即建立理論生物學的努力中，存在有許多未解決的問題及困難。我們這樣的承認，對於剛創立才只不過十來年的劇變論而言一點也不影響其地位與重要性。很多人為這理論深刻的透視力與綜合力所着迷，很多人把劇變論看成是近代人類思想上最重要的，深具革命性與突破性的重大進步。目前有關劇變論的爭議必定阻止不了劇變論在未來所將扮演的重要角色。事實上這情形有點像當年在狄摩根（de Morgan）的時代有關微積分學的論戰。當時儘管微積分已被創用一個半世紀，但是其理論基礎仍然尚未建造得十分牢固。例如有關極限觀念的第一個完全正確又恰當的定義剛只在二十多年前所出版的高奇（Cauchy）演講集中出現。既然當時微積分的理論尚有爭議，因此就引來一股強烈的反微積分浪潮，尤其像柏克萊（B. Berkeley）這人更是有條有理的攻擊微積分及其使用者。他甚至在 1734 年寫了一本名叫「分析學家——與不忠誠的數學家一席談」的書，勸人不要亂用微積分以

造成思想的混亂，自誤誤人。爲了替微積分辯護，狄摩根在他一本書的序言中寫過下面的一段話：

有一種人好像傾向於排斥任何具有困難的東西。他們認爲一門學問如果在檢討其所面臨之各項矛盾時無法順利而毫無困難地全部加以解決，那末這門學問就不該被接受。如果這種態度只是強調任何東西或學問，除非被完全證明清楚，那麼它就不能被永久性的使用，或被完全的信任接受，那我倒覺得這態度十分合理，值得支持。但是如果這種態度被引伸爲對於任何到目前爲止我們還無法完全知道得清楚或者無法完全解決其所有困難的學問就一定不可以被傳授給學生，那我就反對了。在我看來，這樣的限制不僅會對此學問已知的正確部分造出一種錯誤的假象，讓人覺得這些部分也含有錯誤，而且更嚴重的會妨礙到學術發明的進步。

由於歐氏幾何非常完全精確，有許多人就以爲所有數學的各個部門也都像幾何一樣，都是非常精確又成功的科學。這種想法其實大錯特錯。就拿跟微積分有關的分析學來說，我們所知的並不見得很多。有些是我們已熟知的，可視爲屬於我們知識範圍之內；有些則根本還不知道，算做屬於我們知識範圍之外；另些則是正在研究之中，還有點半懂半猜，所知無多，因此可以算做屬於我們知識範圍的邊界部分。爲了要充實擴增我們的知識領域，我們必須努力去尋求新的觀念與發現，把這些新觀念與新發現編織進入已知的知識理論，以建造一個更充實更無懈可擊的學問。一個研究工作者應該如此研究，我想對於學生們我們也應該如此的訓練他們。不僅教他們學習那些範圍內的已知知識，同時還要帶領他們去察驗那些屬於邊界地帶，還在研究之中，尚未發展完全的理論。爲此緣故在本書的後半部，我仍然樂於採用一些屬於這種邊界部分的技巧與方法。我願意指出這些技巧與方法並

不像批評家所描寫的具有那麼大的可疑性與危險性。他們確實可能會引起學生的一些疑惑，但是他們也引導學生注意到一些有希望的但却尚未完成的研究工作而激發他們繼續研究發展的熱情。按照我們以往的經驗，這樣的做法常會使學生自己開始思考問題，而終於導致對於這些問題更佳的瞭解，甚或解決這些問題。我們如果不把問題交給學生，引發他們的興趣，我們怎麼可能培養出新一代的優秀數學研究工作者呢？

狄摩根這段話，當年是爲了替微積分及其應用做辯護而寫的，現在更可適切地拿來爲劇變論及其應用做辯護。首先我們看出我們大可不必爲了目前有關劇變論的爭議而擔心，因爲數學中的爭論，自古已有，一點也不稀奇。許多人喜歡把數學想成是一種很有邏輯性的東西，也喜歡把數學家想成是一群很有理性的人們。他們以爲每當有什麼重大的數學理論出現的時候，一定是所有的數學家一致立即加以接受並推許。換言之，如果有什麼理論不被立即接受而且又引起爭議的，那這理論一定沒什麼價值。我們只要看看微積分當年的論戰，以及數學歷史中所常發生的爭論，就曉得其實完全不是這麼一回事。一項新理論之被爭論不見得表示這理論沒價值，也不表示這理論有價值。

當年對微積分的大爭論中，反對微積分者所提出的某些反對意見確實是有道理的。爲了能充分而安心地使用微積分，人們是真的還要做很多工作，以嚴格的分析學來作爲支撐微積分的穩固磐石。但是如果當年對微積分的這種攻擊致使微積分課在當時被停開，或者致使一些十八世紀的數學家們，例如歐勒（Euler）、達蘭伯（d'Alembert）、伯奴利（Bernoullis）家族、勞蘭吉（Lagrange），以及許多我們耳熟能詳的人物都覺得非得等到微積分的基礎被建立得如同幾何那樣穩固之後才肯運用微積分，大家可以想像得到這樣一來整個數

學的發展與進步所要受到的慘重損失。就是基於這理由，儘管對於劇變論還存有爭議，但是我們却願意把劇變論的諸多應用，就我們所已嘗試過的，儘多的寫下來，放在本書的後半部中。

有許多人對於本書的寫成付出心力。特別感謝Michael Bazin，Mae Wan Ho以及Alan Pears等人。他們向我提出不少寶貴意見，使得本書能寫得更完美。如果書中含有什麼錯誤，那是出於我的疏忽，由我個人負責。也感謝紀曼（E. C. Zeeman）教授，他是我在劇變論方面的啟蒙師傅，經由閱讀他的許多作品我才開始對劇變論有所認識。當然最後應該把我最大的謝忱獻給董禮內教授，因為他是所有這些東西的創始締造者。如果有人因為讀了本書得到啟發而肯繼續追求探索這一套偉大理論的內涵與應用，那我們就已心滿意足，因為這正是我們對這書所存最大的希望。

作者：孫道詩 謹識

譯者序言

我們計劃編譯一套有關劇變論的叢書，以便使用自己的語言把這一個被譽為當代數學中最重要，也最具發展潛力的傑出數學理論與應用介紹出來，並使之在中國科學界廣為流傳。

本書構成我們整個編譯計劃中的第一個環節。不僅因為本書英文原著剛剛於 1980 年夏天才出版，材料豐富；更因為本書重點取捨恰到好处，把劇變論創始者董禮內教授對於結構穩定性之執著精神發揮得淋漓盡緻。這本書帶給了讀者一幅十分容易理解而又非常正確的關於劇變論的鳥瞰與藍圖。因此非常適合拿來當做入門的教材。

在我們編譯計劃中的第二個環節將推出紀曼教授有關餘維數不大於五的基本劇變之分類理論中一篇非常重要的文獻，把這本劇變論入門所缺少的分類定理之完整數學論證以一個最簡單扼要的方法介紹出來。第三本即將推出的是布樂客（Bröcker）教授的可微胚及劇變更精細地補足劇變論的詳細數學理論。第四本也已經譯好的是布拉特（Bruter）教授詳盡的著作：「拓樸與知覺第一冊，劇變論的哲學與數學基礎」。這是一本用法文寫的精彩好書，英文本剛譯好尚未問世。第五本正在譯的是兩位教授薄士邨與史都華合著的：「劇變論及其應用」，原書厚達 490 頁，內容十分充實。

第六本正在考慮翻譯的是布拉特教授的：「拓樸與知覺第二冊，劇變論的神經生理學基礎」。第七本可能也列入我們翻譯計劃的書是紀夢樓（R. Gilmore）教授的新著：「為一般科學家與工程學家所寫的劇變論」。紀教授是個雷射物理學家，他在進行自己的研究工作中

深深爲劇變論所吸引，花了幾年的功夫他終於完成了這一本厚達 650 多頁的好書，特意爲一般科學家與學工程的人所寫的。好像布拉特教授還預備寫他的拓撲與知覺第三冊，好把董禮內教授的理想充分闡揚出來。我們以後看情形再逐步發展我們的翻譯計劃。

除了上面計劃之外我們也可能編寫另外一些中文資料，不過這要看以後實際的需要以及我們可以調配的人力來發展。目前這本小書，我們採用一種比較自由的譯法，使得一方面能維持作者的特性，另一方面又能顧及中文表達的形式。我們希望您讀起來的時候不像在讀一本翻譯書，而像真的在讀一本中文書一樣。有一些小錯誤或一些不夠清楚的地方我們已經適度的加以修正並補足。但願本書能帶給您一段充滿興奮與啟發的時光。更盼望這本書能帶給您繼續探討劇變論的熱忱。我們預計已譯好的前面四本書將很快能出齊，以方便您閱讀參考及研究。

最後感謝國立編譯館對我們編譯計劃的贊助。也感謝各審查先生細心的審核與指正。

編譯者：蕭欣忠、呂素齡 等

淡江大學，數學研究所

目 錄

作者序言	1
譯者序言	1
第一章 導論	1
第一節 劇變論	3
第二節 <u>紀曼</u> 劇變機	8
第三節 重力劇變機	25
第二章 數學基礎	31
第一節 結構之穩定性	31
第二節 分組引理 (the splitting lemma)	41
第三節 餘維數 (Codimension)	48
第三章 七種基本劇變	55
第一節 奇異性	58
第二節 普遍展露	63
第三節 較高次的劇變	67
第四章 七個基本劇變的幾何模型	73
第一節 褶點劇變模型	74
第二節 尖點 (<u>黎一斐</u>) 劇變模型	75
第三節 燕尾點劇變模型	77
第四節 橢圓臍點劇變模型	81
第五節 雙曲臍點劇變模型	85

第六節 蝴蝶點劇變模型.....	90
第五章 劇變論在物理學上的應用.....	101
第一節 聚焦現象.....	102
第二節 非線性振盪.....	109
第三節 彈性結構崩潰.....	120
第六章 劇變論在社會科學上的應用.....	141
第一節 慣用法.....	142
第二節 狗的攻擊性.....	145
第三節 決策之制定.....	148
第四節 妥協.....	150
第五節 知覺上的多重穩定性.....	154
第六節 再談慣用法.....	158
第七章 劇變論在生物學上的應用.....	161
第一節 邊界的運動.....	161
第二節 關鍵性變數之選定.....	173
第八章 形態生成學.....	185
第一節 與七種基本劇變有關的形態學.....	190
第二節 劇變論在形態生成學之應用.....	195
第九章 結論.....	203
第一節 劇變論之應用.....	203
第二節 劇變論與自然現象之解釋.....	205
參考書目.....	213
名詞對照表及索引.....	217
人名對照表.....	229

第一章 導論

自然界最有興趣的現象中有許多都涉及不連續的性質。這些不連續性可能是對時間來講的也可能是就空間來講的。前者實例很多：例如一個好好的橋樑在某一時刻崩潰了，這就表示在時間的某一點 t_0 ，橋從一整體變成許多破裂的斷肢殘骸。又如一個細胞在某一時刻分裂成兩個細胞。再如一個完整的波浪在某一時刻碎裂成浪花等等。後者的實例也很多：例如在兩種不同類型的肌肉組織的交界處，肌肉組織的形態由一種類型變成另種截然不同的類型。又如考慮一個物體的邊緣，內面是此物體但是越過此邊界就變成外界的空間，所以也可以看成呈現出不連續性。

由於微積分的發明，在應用數學中人們設計了一些工具來描寫分析並處理自然界的現象。特別由於目前微積分已有十分穩固的分析理論基礎，因此這些應用數學中的工具非常有用，特別在物理科學中有了十分重大的成就。可惜的是這些工具大抵都是為著要來對於具有連續性的現象或行為加以定量性的處理而設計的，因此雖然他們在物理科學中使用得很成功，但是同樣這些工具却對社會科學或者生物學一籌莫展，毫無用處。因為在社會科學中或者生物學中我們所面對的情況與物理學中的截然不同。對於後者我們很容易給出模型，但是對於前者模型就不易給或者根本無法給。這意思是說，當我們面對一個物理現象時，我們很容易構造出一套微分方程組，並藉之相當合理而又

完備地描寫這物理現象。這一套微分方程組就叫做描寫這物理現象的模型。既然有了這樣的模型，只要使用微積分的基本方法，我們就可以尋求這些微分方程組之解，而明瞭此物理現象之行爲。但是如果我們所面對的是一個生物現象或者社會科學現象時，我們至少會遇到幾種的困難。第一，所牽涉進這現象的細胞如此多，我們若寫出一個微分方程組來，那麼其中所涉及的變數 n 可能高達 10^6 或更多。我們如何去寫出這麼多條的微分方程式呢？縱使寫出了我們又如何去解呢？所面對的現象是如此的繁雜，使我們根本無從下手。第二，我們對於所面對之現象的觀測無法如同面對物理現象時以精確的數據給出。例如我們測量一個人滿意的程度，我們只能約略分成幾個等級而說他很滿意，滿意，不滿意或者很不滿意等等。像這樣我們的觀測常只能給出一些定性的（ qualitative ）資料，而非定量的（ quantitative ）數據。一個理論工作者在建造一個描述某種現象的模型時，或者察驗他的模型是否真確合用時最重要的依據正是他對這現象所做種種觀測而得的數據資料。如果這些觀測資料無法精確給出，而只能定性的給出，那麼試問他如何去弄出一個模型來呢。第三，在應用數學中的種種方法所處理的現象大抵都具有連續性，但是在社會科學或生物學中更常面對的現象却明顯的具有不連續性。因此通常應用數學中的模型無法用來處理或描述這些現象。這樣的無奈中，劇變論應運而生，雖然還不能解決上述所有的難處，但是却提供我們很好的方法來克服這些困難。

就數學理論本身而言，劇變論是一種處理平滑（ smooth ）函數族之奇異性（ singularities ）的理論。由於這函數族之成員的奇異點集（ singularity set ）可能具有各種不同的類型，因此在這一奇異性之理論中我們十分自然地描繪著各種不連續的現象如何以一些