

高等数学

主编 杨孔庆

高等教育出版社

高等数学

Gaodeng Shuxue

主 编 杨孔庆

副主编 肖世校

高等教育出版社·北京

内容简介

本书共 11 章, 主要内容包括函数、函数极限与连续、导数及微分、导数的应用、积分、定积分的应用、微分方程及其应用、无穷级数、多元函数微分学、多重积分、曲线积分与曲面积分等。全书结合应用型本科院校数学教学的特点, 通过大量带有实际背景的例子引出高等数学的基本概念, 并用直观的语言解释数学符号, 在提高学生学习数学兴趣的同时, 培养学生运用高等数学知识解决实际问题的能力。全书纸质内容与数字课程一体化设计、紧密配合, 数字课程涵盖数学家小传、期末考试模拟试卷等板块, 为应用型本科院校学生的学习提供思维与探索的空间。

本书可作为应用型本科院校理工类、经济管理类专业的高等数学教材, 也可供相关专业人员和广大教师参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 杨孔庆主编. -- 北京: 高等教育出版社, 2016.9

ISBN 978-7-04-046067-4

I. ①高… II. ①杨… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 173359 号

策划编辑 李晓鹏	责任编辑 杨 波	封面设计 李小璐	版式设计 王 琰
插图绘制 尹文军	责任校对 刘春萍	责任印制 耿 轩	

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	北京市大天乐投资管理有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	32.25	版 次	2016 年 9 月第 1 版
字 数	780 千字	印 次	2016 年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定 价	54.00 元
咨询电话	400-810-0598		

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 46067-00

前言

在传统的高等数学教学中,教师往往会花较长的学时用“ ε - δ ”语言讲授函数极限的概念,并会举很多求极限的例子,这是数学分析最典型的思维范例之一。但纵观全局,对应用型本科院校的学生来讲,要在有限的时间内使学生学完后续课程所需要的数学知识,用以上方式讲授极限的概念占用的时间太长。这就要求我们对教学过程进行认真分析,选取更适合应用型本科院校学生学习的知识点,而且在培养学生学会“如何用”上下功夫。基于以上考虑,本书在介绍数学概念时,尽可能通过数学图像的直观描述,并介绍其应用背景,让学生能够形象地理解和掌握这些基本概念和基本运算技能;在例题的设计上,本书尽可能介绍与其相关的物理学、工程技术和经济学背景,在提高学生学习数学兴趣的同时,注重阐述数学建模的思想,以达到培养学生运用高等数学知识解决简单实际问题的意识和能力,即培养学生初步的数学建模能力。另一方面,考虑到应用型本科院校学生理解和接受抽象思维的特点,本书尽量用直观的语言解释数学符号,并且把数学语言用“白话文”写出来,使学生能更好地理解这些数学语言的涵义。当然,要深入浅出地把高等数学的思想和运算讲清楚是很不容易的,我们会一直朝这个方向去努力。

在具体内容的讲授上,本书沿袭传统高等数学知识点的逻辑关系,由直观的图像给出极限的概念,而把“ ε - δ ”的极限定义放到附注中,供有兴趣的读者阅读;将求极限的例子放到洛必达法则之后来讲;在给出极限概念后,介绍函数的连续性;由直观的变化率问题引出函数的导数和微分,并给出它们在实际问题中的简单应用;用求导的逆运算给出了不定积分,用连续函数的黎曼和给出了定积分,并用牛顿-莱布尼茨公式给出了定积分与不定积分之间的联系,同时给出了定积分在实际问题中的应用;然后,以大量的例子引出微分方程,并给出各种微分方程的求法;在以上基础上,引出了研究函数性质的一种重要手段,即泰勒展开,并给出了它在近似计算和误差估计中的应用;同时,介绍了现代频谱分析中常用的傅里叶分析的基础,即周期函数的三角级数展开。由于工程和信息技术专业的后续课程会涉及大量的多元函数微积分知识,本书用较多的篇幅对这部分内容进行了讲解。首先,本书介绍了与多元函数微积分相关的向量场的基本运算及空间曲面,然后,由多元函数与一元函数的区别引出多元函数的连续性与偏微分的概念与运算,最后,用黎曼和给出多重积分及面积分和线积分的运算,并用偏导数、面积分和线积分的运算来研究三维空间中标量场和向量场的性质,给出了标量场的梯度场、向量场的散度场和旋度场的概念,为工程和信息技术专业的后续课程打下了坚实的数学基础。

针对应用型本科院校的特点,本书尽量通过直观的方法阐述高等数学的基本概念,并结合实际问题给出基本概念和基本运算的例子,提高学生学习数学的兴趣,培养学生基本的数学建模意识和能力。考虑到对理工科类和管理类专业学生,要学习的高等数学基本知识点都是相同的,只是在应用实例上各有侧重,因此本书在例题的选取上兼顾两类专业学生的需求,这样也使两专业的学生都了解到高等数学在各个领域的应用。

本书建议讲授学时为 180 学时,对于 144 学时的课程,可讲授除“*”号外的内容,并对最后四章进行适当删减;对于 108 学时的课程,可讲授前六章和第七章的基本内容。教师可根据各专业的实际需要选取本书的适当内容进行教学。

本书由杨孔庆任主编,负责书稿的总体统筹,肖世校任副主编,协助书稿的编写工作。第一、二章由刘东利、邵亚丽编写,第三、四章由肖世校、张保灿、杨孔庆编写,第五、六章由曾艳秋、刘小燕编写,第七章由李丽、刘竞坤、杨孔庆编写,第八章由邱秀亮、舒明春编写,第九、十、十一章由江晓露、潘蕴静、朱丽容、胡牡华、杨孔庆编写。

限于编者的水平,书中难免存在不足之处,欢迎读者批评指正,并提出宝贵意见。

编者

2016 年 3 月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581999 58582371 58582488

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务与版权管理部

邮政编码 100120

防伪查询说明

用户购书后刮开封底防伪涂层，利用手机微信等软件扫描二维码，会跳转至防伪查询网页，获得所购图书详细信息。也可将防伪二维码下的20位密码按从左到右、从上到下的顺序发送短信至106695881280，免费查询所购图书真伪。

反盗版短信举报

编辑短信“JB,图书名称,出版社,购买地点”发送至10669588128

防伪客服电话

(010) 58582300

学习卡账号使用说明

一、注册/登录

访问 <http://abook.hep.com.cn/46067>，点击“注册”，在注册页面输入用户名、密码及常用的邮箱进行注册。已注册的用户直接输入用户名和密码登录即可进入“我的课程”页面。

二、课程绑定

点击“我的课程”页面右上方“绑定课程”，正确输入教材封底防伪标签上的20位密码，点击“确定”完成课程绑定。

三、访问课程

在“正在学习”列表中选择已绑定的课程，点击“进入课程”即可浏览或下载与本书配套的课程资源。刚绑定的课程请在“申请学习”列表中选择相应课程并点击“进入课程”。

如有账号问题，请发邮件至：lixpl@hep.com.cn。

目 录

—001	第一章 函数
001	1.1 函数的概念及其表示法
003	1.2 复合函数与反函数
004	1.2.1 复合函数
005	1.2.2 反函数
006	1.3 函数的几种特性
006	1.3.1 函数的单调性
006	1.3.2 函数的奇偶性
007	1.3.3 函数的有界性
007	1.3.4 函数的周期性
008	1.4 初等函数及其性质
008	1.4.1 幂函数
008	1.4.2 指数函数
009	1.4.3 对数函数
011	1.4.4 三角函数
011	1.4.5 反三角函数
013	第一章习题

—017	第二章 函数极限与连续
017	2.1 函数的极限
017	2.1.1 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限
021	2.1.2 函数的左极限与右极限
023	2.1.3 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限
026	2.1.4 无穷小量与无穷大量
027	2.1.5 极限的运算法则
030	2.1.6 无穷小阶的比较
031	2.2 函数的连续性
032	2.2.1 函数的连续性与连续函数
037	2.2.2 闭区间上连续函数的性质
040	第二章习题
—045	第三章 导数及微分
045	3.1 变化率问题
045	3.1.1 瞬时速度
045	3.1.2 平面曲线的切线
046	3.2 导数
046	3.2.1 导数的概念
048	3.2.2 导数的计算
054	3.3 求导法则
054	3.3.1 函数的数乘、和、差、乘积和商的求导法则
058	3.3.2 复合函数的求导法则
060	3.4 隐函数求导
065	3.5 函数的微分
067	3.6 相关变化率问题
070	第三章习题
—075	第四章 导数的应用

075	* 4.1 微分中值定理
075	4.1.1 罗尔中值定理
076	4.1.2 拉格朗日中值定理
079	4.1.3 柯西中值定理
079	4.2 洛必达法则
080	4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型不定式
084	4.2.2 其他不定式
091	4.3 函数的最值与极值
091	4.3.1 最值与极值的定义
093	4.3.2 极值与最值的求解
098	4.4 函数的图形性态
098	4.4.1 函数的单调性
100	4.4.2 极值的判别法
102	4.4.3 凸性
108	4.5 建模与优化(导数在工程、物理和经济上的应用)
114	第四章习题

第五章 积分

119	5.1 原函数与不定积分
119	5.1.1 原函数的定义
120	5.1.2 不定积分的定义
123	5.1.3 不定积分的几何意义
122	5.1.4 不定积分的基本性质
123	5.2 不定积分的计算
123	5.2.1 直接积分法
125	5.2.2 第一类换元法(凑微分法)
128	5.2.3 第二类换元法
131	5.2.4 分部积分法
133	* 5.3 有理函数的积分

134	5.3.1 真分式的分解
135	5.3.2 部分分式的积分
138	5.4 定积分
138	5.4.1 曲边梯形的面积
139	5.4.2 定积分的定义
141	5.4.3 定积分的几何意义
143	5.4.4 定积分的性质
146	5.5 微积分基本定理
146	5.5.1 变上限积分及原函数存在定理
149	5.5.2 微积分基本定理
153	5.6 定积分的计算
153	5.6.1 直接积分法
154	5.6.2 第一类换元法(凑微分法)
156	5.6.3 第二类换元法
158	5.6.4 分部积分法
160	5.7 反常积分
161	5.7.1 无穷区间上的反常积分
164	5.7.2 无界函数的反常积分
167	第五章习题
175	第六章 定积分的应用
175	6.1 定积分的几何应用
175	6.1.1 微元法
176	6.1.2 平面图形的面积
180	6.1.3 立体的体积
183	6.1.4 平面曲线的弧长
186	6.1.5 旋转曲面的面积
187	6.2 物理应用
188	6.2.1 平面物质线段的质量
189	6.2.2 功

196	6.2.3 液体的静压力
198	*6.2.4 万有引力
201	6.3 经济应用
201	6.3.1 已知边际函数,求总量函数的问题
204	6.3.2 资金的现值与将来值
207	第六节 练习题
211	第七章 微分方程及其应用
211	7.1 微分方程的基本概念
211	7.1.1 微分方程
214	7.1.2 微分方程的解
215	7.1.3 常微分方程的初值问题
217	7.2 一阶可分离变量的微分方程
217	7.2.1 定义与求解
219	7.2.2 一阶可分离变量方程的应用
229	7.3 一阶线性微分方程
229	7.3.1 定义与求解
233	7.3.2 一阶线性微分方程的应用
240	7.4 变量替换法求解一阶微分方程
240	7.4.1 一阶齐次微分方程
241	7.4.2 伯努利方程
243	7.4.3 齐次方程与伯努利方程的应用
245	*7.5 欧拉法
250	7.6 二阶可降阶微分方程
250	7.6.1 $y''=f(x)$ 型的微分方程
251	7.6.2 $y''=f(x,y')$ 型的微分方程
252	7.6.3 $y''=f(y,y')$ 型的微分方程
254	7.6.4 可降阶微分方程的应用
259	7.7 二阶常系数线性微分方程
260	7.7.1 二阶常系数齐次线性微分方程

264	7.7.2 二阶常系数非齐次线性微分方程
269	7.7.3 二阶常系数线性微分方程的应用
278	*7.8 欧拉方程
280	第七章习题
287	第八章 无穷级数
287	8.1 函数项级数和常数项级数
292	8.2 幂级数
292	8.2.1 幂级数的定义与幂级数的收敛性
303	8.2.2 绝对收敛的级数两个常用的性质
303	8.2.3 幂级数的基本性质
305	8.3 泰勒级数及级数的应用
305	8.3.1 泰勒级数
308	8.3.2 函数的幂级数存在定理
309	8.3.3 函数的泰勒级数展开
317	8.3.4 级数的应用举例
322	8.4 傅里叶级数及函数的傅里叶级数展开
322	8.4.1 傅里叶级数
325	8.4.2 函数的傅里叶级数展开
328	8.4.3 函数的奇延拓和偶延拓
331	第八章习题
333	第九章 多元函数微分学
335	9.1 向量
335	9.1.1 向量的概念
336	9.1.2 向量的线性运算
338	9.1.3 向量的坐标
341	9.2 内积与向量积
341	9.2.1 内积

343	9.2.2 向量的方向角与方向余弦
344	9.2.3 向量积
346	9.3 空间曲面
346	9.3.1 平面
347	9.3.2 柱面
348	9.3.3 二次曲面
351	9.3.4 制图工具
351	9.3.5 曲面的参数方程
353	9.4 空间曲线的向量表示
353	9.4.1 向量函数
355	9.4.2 向量函数的极限与连续
356	9.4.3 向量函数的导数
357	9.5 多元函数
357	9.5.1 二元函数的概念
359	9.5.2 二元函数的极限
361	9.5.3 二元函数的连续性
362	9.6 偏导数
362	9.6.1 偏导数
367	9.6.2 高阶偏导数
369	9.7 多元函数的全微分
369	9.7.1 多元函数全微分的概念
371	9.7.2 切平面与法线
372	9.7.3 全微分在近似计算中的应用
374	9.8 链式法则与隐式求导法
374	9.8.1 复合函数求导法——链式法则
376	9.8.2 隐式求导法
380	9.9 方向导数与梯度向量
380	9.9.1 方向导数
383	9.9.2 梯度向量
384	9.10 多元函数的极值在最优化问题中的应用
385	9.10.1 无约束的极值与最值

388	9.10.2 受约束的极值与最值
391	第九章习题
395	第十章 多重积分
395	10.1 二重积分的概念与性质
395	10.1.1 二重积分的定义
398	10.1.2 二重积分的性质
398	10.2 二重积分的计算
398	10.2.1 二重积分在直角坐标系下的计算
405	10.2.2 二重积分在极坐标下的计算
412	10.3 三重积分
412	10.3.1 三重积分的概念
413	10.3.2 三重积分的计算
420	10.4 重积分的应用
421	10.4.1 求曲面的面积
423	10.4.2 求平均值
428	10.4.3 求转动惯量
429	第十章习题
433	第十一章 曲线积分与曲面积分
434	11.1 标量场和向量场
434	11.1.1 标量场
434	11.1.2 向量场
436	11.1.3 梯度场
438	11.1.4 常用向量场
439	11.2 标量场的曲线积分和曲面积分
439	11.2.1 标量场的曲线积分
444	11.2.2 标量场的曲面积分
452	11.3 向量场的曲线积分

452	11.3.1 向量场曲线的积分
458	11.3.2 路径无关场
465	11.3.3 格林公式
472	11.4 向量场的曲面积分
472	11.4.1 向量场的曲面积分
484	11.4.2 向量场的散度
485	11.4.3 高斯公式(散度定理)
487	11.4.4 向量场的旋度
491	11.4.5 斯托克斯公式
494	第十一章习题

—497	主要参考书目
------	--------

—498	附录
------	----

函数是数学中最基本的概念之一,它描述了变量之间的某种依赖关系.例如,给定圆的半径 r ,圆的面积 S 就确定了,因此圆的面积 S 是半径 r 的函数.它们之间的函数依赖关系可用公式 $S = \pi r^2$ 表示.

函数是高等数学最先遇见的基本概念.本章介绍各类函数的基本概念、性质和性态.

1.1 函数的概念及其表示法

函数的概念在现实生活中有很多实例.例如,你每个月电话费用 C 是多少取决于你打电话的时间 t ,这样,可称 C 为因变量, t 为自变量.

再看两个例子:

例 1.1.1 下面是中国人口数量的一些统计数据(来自国家统计局):

表 1.1.1

年	1908	1933	1953	1964	1982	1990	2000
人口/亿	3.0	4.7	6.0	7.2	10.3	11.3	12.95

对任何年份 $t \in \{1908, 1933, 1953, 1964, 1982, 1990, 2000\}$,由表 1.1.1 所示的对应规则可知,有唯一的人口数据与之对应,所以表 1.1.1 给出了人口与年份的函数关系.

例 1.1.2 设某公司每天生产 x 件产品的总成本 $y = C(x) = 2x + 3$ ($x \geq 0$)(单位:元),如图 1.1.1 所示,对于 x 的每个值, $y = C(x)$ 都有唯一确定的值和它对应.

函数的定义如下:

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两个变量,若对于 x 的每一个取值,按照某一对应规则 f ,都有唯一确定的 y 值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记为 $y = f(x)$,这时称 x 为自变量, y 为因变量, f 说明 y 是如何依赖于 x 的,通常也称 f 为 x 的函数.自变量 x 的所有取值的集合称为函数的定

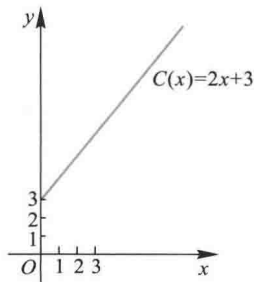


图 1.1.1

义域,记为 D . 因变量 y 的相应值的集合称为函数的值域,记为 $R(f)$. 这里 D 与 $R(f)$ 都是数集,且

$$R(f) = \{f(x) \mid x \in D\}.$$

数学上常把函数 $y=f(x)$ 简记为 f .

数值 $f(x_0)$ 称为函数 f 在 x_0 处的值,即函数值,记为 $y \Big|_{x=x_0} = f(x_0)$.

本课程所研究的函数的定义域 D 和值域 $R(f)$ 都为实数域,这样的函数称为实函数. 我们所研究的函数都是实函数.

可以看到,例 1.1.1 中人口数量就是年份 t 的函数,但这种函数关系式不能用明确的解析式表达出来;例 1.1.2 中成本 C 是产量 x 的函数,它有明确的解析表达式.

函数的两要素是定义域和对应法则 f (或称函数关系).

例如 $y=2x^2+1$ 与 $x=2y^2+1$, 它们的定义域都是实数集 $\mathbf{R}$, 且对于 $\mathbf{R}$ 中任何实数 a , 通过对应法则, 两个函数都有相同的实数 $2a^2+1$ 与之对应. 因此, 它们是相同的函数, 只不过第一个函数是以 x 为自变量, 而第二个函数是以 y 为自变量. 但我们通常习惯以 x 为自变量, 用 x 轴表示, 而以 y 为因变量, 用 y 轴表示.

又如 $y=2x+1$ 与 $y=\frac{4x^2-1}{2x-1}$ 不是同一个函数, 因为定义域不同, 第一个

函数的定义域是 $(-\infty, +\infty)$, 而第二个函数在点 $x=\frac{1}{2}$ 没定义, 其定义域

是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ (但如果我们将第二个函数在点 $x=\frac{1}{2}$ 的值定

义为 $y=2$, 后面我们会知道这样定义是有道理的, 则这两个函数为同一个函数).

再如, 函数 $y=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=\frac{x^3-1}{x-1}$ 也不是同一函数, 因为虽然它们定义域

相同, 但对应法则不同, 即函数关系式不同.

例 1.1.3 求函数 $f(x)=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{1+\ln x}$ 的定义域.

解 该函数的定义域, 要考虑到开根号函数、分式函数和对数函数定义域的取值, 故该函数的定义域是下面不等式组的解