21世纪保险精算系列教材

Actuarial Science

21世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编

Financial Mathematics

金融数学（第五版）

孟生旺　编著

中国人民大学出版社

Actuarial
Science

21世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编

Financial Mathematics

金融数学（第五版）

孟生旺 编著

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目（CIP）数据

金融数学/孟生旺编著．—5版．—北京：中国人民大学出版社，2015.10
21世纪保险精算系列教材
ISBN 978-7-300-22065-9

Ⅰ.①金…　Ⅱ.①孟…　Ⅲ.①金融-经济数学-教材　Ⅳ.①F830

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第248035号

21世纪保险精算系列教材
精算师考试用书
中国人民大学风险管理与精算中心主编
金融数学（第五版）
孟生旺　编著
Jinrong Shuxue

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京昌联印刷有限公司	版　次	2007年10月第1版
规　格	185 mm×260 mm　16开本		2015年11月第5版
印　张	21.25 插页1	印　次	2015年11月第1次印刷
字　数	470 000	定　价	39.00元

总 序

从1775年英国公平人寿最早将运用数学工具为产品定价的专门人员命名为精算师以来，精算师职业在国际上已有200多年的发展历史。这一职业最早在人寿和养老金业务中发挥作用，之后逐步向非寿险、健康保险、社会保障等领域扩展。20世纪以后，精算师的职业进一步延伸到银行、投资、公司财务、金融工程等领域。精算师职业领域的扩展与精算职业组织的发展和精算教育水平的提高密切相关。1848年后欧美一些国家陆续成立的精算师协会以及国际精算师协会，为提高全球精算教育标准做出了贡献。例如，国际精算师协会早在1998年就公布了初级精算教育标准，要求2005年后加入国际精算师协会的成员在精算教育标准上符合国际教育标准。2007年，国际精算师协会再次公布了重新修订的初级精算教育标准及教育大纲。国际上著名的精算师职业组织，包括北美寿险精算师协会、北美非寿险精算师协会、英国精算师协会等，也从2000年后陆续对其精算教育标准和精算师考试体系进行改革，强调精算学与统计学、金融学、投资学、会计学、经济学等学科的融合，强调精算学科培养复合型风险管理人才的目标。

我国精算教育和精算师职业发展起步较晚，1992年后才陆续引入北美寿险精算师考试、英国精算师考试、日本精算师考试、北美非寿险精算师考试等，2000年后，中国精算师考试体系逐步建立起来。目前，中国精算师考试的考点已增加到15个。2006年12月，民政部批准中国精算师协会正式筹备成立。中国精算师协会的成立，必将进一步推动中国精算教育和精算师职业的发展，也迫切要求对当前的精算教育体系和精算师考试体系进行必要的改革，以尽快向国际精算师协会发布的精算教育标准看齐。

中国人民大学统计学院是国内较早开展风险管理与精算教育的大学之一。1992年统计学院就开始招收风险管理与精算专业方向的硕士研究生，1993年开始招收该方向的本科生，1996年招收了该专业方向的第一批博士研究生。2004年，经教育部批准备案，统计学院设立了独立的风险管理与精算学硕士学位点和博士学位点，标志着在风险管理与精算人才培养上，形成了学士、硕士、博士多层次、专业化的人才培养教育体系。其专业课程设置完全与国际接轨，涵盖了北美、英国和中国精算师初级课程考试的基本内容，教学大纲紧跟国际精算师协会公布的精算教育指南，同时根据学科发展的国际趋势，每年重新修订课程和教学大纲。在研究方面，设立了中国人民大学风险管理与精算中心。多年来，

在寿险风险管理与精算、非寿险特别是汽车保险风险管理与精算、养老金、社会保障等领域取得了很多有影响的成果，进一步促进了风险管理与精算教育的发展。为适应我国精算教育改革与发展的需要，并体现与国际精算师协会的精算教育标准接轨，中国人民大学风险管理与精算中心精心组织编写了一套精算学系列教材，分两个阶段完成。第一阶段涵盖精算师考试初级课程的全部专业课内容，包括《金融数学》、《风险理论》、《寿险精算学》、《非寿险精算学》、《精算中常用的统计模型》5本教材，其中每本教材包含大量的练习题和解答。第二阶段涵盖精算师考试高级课程的全部内容，分寿险、非寿险、养老金、健康保险、社会保障、投资等不同系列。这套教材一方面可以满足各高校精算专业的教学需求，另一方面也可以作为参加各类精算师资格考试学员的学习参考资料，同时，也可以作为对精算学科有兴趣的同仁了解和学习精算的参考书。

这套教材的特点，一是在内容上涵盖了北美寿险、北美非寿险、英国、中国精算师考试最新的内容，同时紧跟国际精算师协会提出的精算教育标准，涵盖了国际精算教育大纲的基本内容；二是为了便于读者自学和教师讲授，我们为第一部每本教材编写了学习辅导用书，辅导书中包括学习要点、教材习题解答和一部分补充练习题及其解答等；三是在写法上，力求把精算学的数理理论与实务结合起来，注意精算数学背后的实践意义，努力从实际意义上解释各种数学关系。

本套教材凝结了中国人民大学风险管理与精算中心全体教师的心血，特别是王晓军、孟生旺、黄向阳、王燕、肖争艳、肖宇谷等老师，他们为本套教材的编写付出了极大的艰辛，统计学院部分硕士研究生和本科生对辅导用书中的习题解答和答案进行了验证，感谢他们为本套教材做出的贡献，同时也感谢中国人民大学出版社的编辑们为本书的出版付出的辛勤劳动。

前 言

金融数学的内容非常丰富，本书是金融数学的一本入门教材，目的是为经济学、金融学、保险学、管理学和精算学等相关专业的本科生提供最基础的金融数学知识。本书的内容既是经济、金融、保险和精算等专业的学生修读本专业核心课程的基础，又是金融数学、金融工程和保险精算等专业的学生修读高级课程应该掌握的基础知识。事实上，本书的内容对于大多数专业的本科生而言都具有重要的学习价值，如利息的度量、收益率的计算、贷款的偿还等，它们几乎与我们每个人的日常生活都息息相关。

编写本书的初衷是为了满足保险精算专业的学生参加精算师资格考试的需求，所以在编写过程中参考了北美寿险精算师协会（SOA）和北美非寿险精算师协会（CAS）关于金融数学的考试大纲，在内容取舍上与精算师协会编制的金融数学考试范围基本相符。为了内容的完整性和系统性，本书也增加了一些金融数学考试大纲之外的内容，如期权定价模型（包括 Black-Scholes 模型和二叉树模型）和随机利率模型等。除了 Black-Scholes 期权定价模型涉及随机过程和微分方程，不太适合作为金融数学的入门学习材料之外，本书其他内容的学习都只需学生掌握微积分和概率统计的基础知识即可。

为便于教师教学，每章都精选了一些例题和习题，涉及计算的问题，读者可以使用 Excel 完成。Excel 是学习金融数学非常方便有效的工具。虽然其他软件的功能可能更加强大，譬如本书的绘图和二叉树模型是应用 R 软件完成的，但 Excel 在应用的便利性方面具有独特的优势。此外，Excel 提供了许多常用的金融函数，这些函数可以有效简化金融计算过程中可能遇到的一些实际困难。最常用的金融函数在各章的例题中都有所介绍。在 Excel 中应用某些金融函数时，需要加载分析工具库，但在 Excel 的默认安装中，分析工具库不会自动加载。以 Excel 2010 为例，读者可以通过下述路径加载分析工具库：

文件 → 选项 → 加载项 → 转到 Excel 加载项 → 分析工具库

为便于读者自学，书后附有各章习题的参考答案。考虑到读者应该尽可能独立完成练习题，参考答案没有提供详细的解答过程，只给出了提示性的解题思路和最终答案。

本书是金融数学的入门教材，从金融数学最基本的概念讲起，对读者的数学要求不高。主体内容只需用到微积分的基础知识，如微分、积分和极限等，适合大学本科二年级及以上年级的学生使用。

该课程在中国人民大学统计学院为本科二年级学生开设，是应用统计学专业（风险管理与精算方向）的专业必修课程，安排了一个学期，每周三个学时。除了期权交易策略、Black-Scholes 模型和随机利率之外，其他章节都属于教学内容。对于只有 2 个学分的课程，可以酌情删减期权、远期、期货、互换和随机利率等内容。

各章所需的教学时数可参考下表安排：

章节内容	讲授课时数
第 1 章：利息度量	5～6
第 2 章：等额年金	5～6
第 3 章：变额年金	5～6
第 4 章：收益率	3～4
第 5 章：债务偿还方法	6～7
第 6 章：债券和股票	4～5
第 7 章：利率风险	4～5
第 8 章：利率的期限结构	1～2
第 9 章：远期、期货和互换	5～6
第 10 章：期权（不含 Black-Scholes 模型）	7～8
第 11 章：随机利率	3～4

多年来，作者在中国人民大学统计学院讲授金融数学积累的教学课件、练习题、测验题、考试题和参考答案等资源可以从 http：//blog. sina. com. cn/mengshw 免费下载。

为本书编写工作做出贡献的有王选鹤、刘新红、王明高、陈静仁、李政宵、杨亮、卢志义、林俊、王维、叶芳、钟桢、秦强和郭志杰，在此向他们表示衷心感谢，同时感谢中国人民大学统计学院为本书编写所提供的资助。

孟生旺

教师教学服务说明

中国人民大学出版社工商管理分社以出版经典、高品质的工商管理、财务会计、统计、市场营销、人力资源管理、运营管理、物流管理、旅游管理等领域的各层次教材为宗旨。

为了更好地为一线教师服务，近年来工商管理分社着力建设了一批数字化、立体化的网络教学资源。教师可以通过以下方式获得免费下载教学资源的权限：

在“人大经管图书在线”（www. rdjg. com. cn）注册，下载“教师服务登记表”，或直接填写下面的“教师服务登记表”，加盖院系公章，然后邮寄或传真给我们。我们收到表格后将在一个工作日内为您开通相关资源的下载权限。

如您需要帮助，请随时与我们联络：

中国人民大学出版社工商管理分社

联系电话：010-62515735，62515749，62515987

传真：010-62515732，62514775　　　　电子邮箱：rdcbsjg@crup. com. cn

通讯地址：北京市海淀区中关村大街甲 59 号文化大厦 1501 室（100872）

教师服务登记表

<table>
<tr><td>姓 名</td><td></td><td>□先生　□女士</td><td>职　　称</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>座机/手机</td><td colspan="2"></td><td>电子邮箱</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>通讯地址</td><td colspan="2"></td><td>邮　　编</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>任教学校</td><td colspan="2"></td><td>所在院系</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">所授课程</td><td>课程名称</td><td>现用教材名称</td><td>出版社</td><td>对象（本科生/研究生/MBA/其他）</td><td>学生人数</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">需要哪本教材的配套资源</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="2">人大经管图书在线用户名</td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td colspan="6">院/系领导（签字）：
院/系办公室盖章</td></tr>
</table>

目　录

第 1 章

Chapter 1 利息度量

利率和利息是最重要的金融概念，没有利率就没有金融，就像没有价格就没有市场一样。

利息（interest）是借款人为了获得一笔资金的使用权而向贷款人支付的款项。借款人是获得资金的一方，而贷款人是出借资金的一方。借贷关系可以从两个角度来看：从借款人的角度看，他必须向贷款人支付一定的利息才能获得资金的使用权，因此利息对于借款人而言是一种为了获得资金使用权而支出的成本；从贷款人的角度看，出借资金会影响他在当期的消费，所以希望得到一定的利息补偿，这种利息补偿也就是贷款人因为出借资金而获得的收益或报酬。

借贷资金之所以会产生利息，可以从不同的角度进行解释。一种解释认为资金是稀缺资源，使用者为了获得这种资源必须向资源的所有者支付一定的利息成本。另一种解释认为，消费者普遍倾向于满足当期消费，而出借资金相当于推迟当期消费，这对贷款人而言是一种损失，所以贷款人要求从出借资金中获得利息补偿。还有一种解释认为，资金与劳动力一样，是生产过程必不可少的要素，也应该参与生产成果的分配，即获得相应的利息收入。

本章主要介绍利息的各种度量工具，包括复利和单利、实际利率和名义利率、实际贴现率和名义贴现率，以及利息力和贴现力等。不同的利息度量工具有不同的含义和应用场合，各种度量工具之间也存在一定的相互转化关系。

利息度量工具都可以基于累积函数来定义，所以本章首先介绍累积函数的概念，然后再展开对各种利息度量工具的具体讨论。

为方便使用，表 1—1 给出了本章使用的主要符号及其说明，关于它们的详细解释可以参见本章后面各节的内容。

表 1—1　　符号及其说明

$a(t)$	累积函数，表示时间零点的 1 元在时间 t 的价值
$a^{-1}(t)$	贴现函数，表示时间 t 的 1 元在时间零点的价值
i	复利的实际利率，表示时间零点的 1 元本金在 1 年末所产生的利息
d	贴现率
$i^{(m)}$	每年复利 m 次的名义利率

$d^{(m)}$	每年复利 m 次的名义贴现率
δ	利息力，也称为连续复利
δ_t	时间 t 的利息力
v	折现因子，是 $(1+i)^{-1}$ 的简写

1.1 累积函数与实际利率

1.1.1 累积函数

累积函数（accumulation function）是指期初的 1 单位本金在时刻 t 的累积值，它是度量利率和利息的最基本工具，其他利息度量工具，如实际利率、名义利率、贴现率和利息力等，都可以从累积函数推导得出。累积函数记为 $a(t)$，它具有下列性质：

(1) $a(0)=1$。

(2) $a(t)$ 通常是递增函数，亦即利息是非负的。负利息或利息为零的情况偶尔也会出现，如投资亏本或没有盈利时，累积函数即为递减函数或常数。

(3) 如果连续计息，则累积函数 $a(t)$ 是连续函数，这种情况较为常见；反之，累积函数 $a(t)$ 为非连续函数。

如果期初的本金不是 1 个单位而是 $A(0)$，则时刻 t 的累积值 $A(t)$ 称作金额函数，可以表示为：

$$A(t)=A(0)\times a(t) \tag{1.1}$$

累积函数也可以由金额函数表示为：

$$a(t)=\frac{A(t)}{A(0)} \tag{1.2}$$

可见，金额函数 $A(t)$ 和累积函数 $a(t)$ 可以互相表示。

若以 $I(t)$ 表示 $0\sim t$ 时期的利息额，则有

$$I(t)=A(t)-A(0)$$

【例 1—1】

已知累积函数为 $a(t)=1.2^t+0.05t$，请计算 $t=2$ 时的 500 万元在 $t=3$ 时的价值。

【解】 根据累积函数的定义，1 单位本金在 $t=2$ 时的累积值为 $a(2)$，在 $t=3$ 时的累积值为 $a(3)$，也就是说，从 $t=2$ 到 $t=3$，资金的价值增长为 $a(3)/a(2)$ 倍，所以 $t=2$ 时的 500 万元在 $t=3$ 时的价值为：

$$500\times\frac{a(3)}{a(2)}=500\times\frac{1.2^3+0.05\times3}{1.2^2+0.05\times2}=609.74\ (\text{万元})$$

【例 1—2】

已知金额函数为 $A(t)=at^2+bt+c\ (0\leqslant t\leqslant 20)$，且 $A(0)=100$，$A(1)=110$，$A(2)=136$。请计算 $t=1$ 时投资的 100 万元在 $t=10$ 时的累积价值。

【解】由已知条件可建立下述方程组：

$$\begin{cases}100=c\\110=a+b+c\\136=4a+2b+c\end{cases}$$

解此方程组可得

$$\begin{cases}a=8\\b=2\\c=100\end{cases}$$

故金额函数可以表示为：

$$A(t)=8t^2+2t+100$$

相应地，累积函数可以表示为：

$$a(t)=\frac{A(t)}{A(0)}=0.08t^2+0.02t+1$$

从 $t=1$ 到 $t=10$，资金增长的倍数为：

$$\frac{a(10)}{a(1)}=\frac{0.08\times10^2+0.02\times10+1}{0.08\times1^2+0.02\times1+1}=8.36$$

因此在 $t=1$ 时投资的 100 万元在 $t=10$ 时的累积价值为 836 万元。

本例的累积函数 $a(t)$ 和金额函数 $A(t)$ 如图 1—1 所示，两者形状相同，数值相差 100 倍。

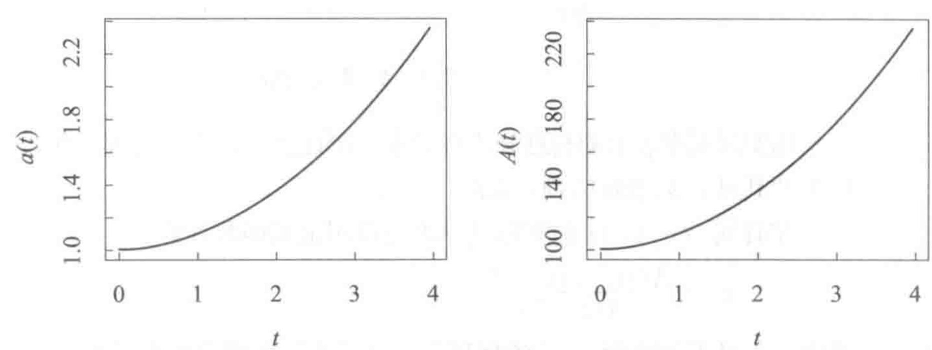

图 1—1　累积函数和金额函数的比较

1.1.2　实际利率

实际利率（effective rate of interest）是指 1 单位本金在一个时期末所赚取的利息金额。通常用百分数表示，如 5%的实际利率表示 1 元本金在一个时期末赚取的利息是 0.05 元。

如果用累积函数表示实际利率，则从时刻 $t-1$ 到时刻 t 的实际利率为：

$$i_t = \frac{a(t)-a(t-1)}{a(t-1)} \tag{1.3}$$

式中，分母是在时刻 $t-1$ 的累积值，分子是该累积值在时期 $(t-1, t)$ 赚取的利息金额。时期 $(t-1, t)$ 表示从时刻 $t-1$ 到时刻 t 的时间区间。

显然，在时期 $(0, 1)$ 的实际利率可以表示为：

$$i_1 = \frac{a(1)-a(0)}{a(0)} = a(1)-1$$

由此可将时刻 1 的累积值表示为：

$$a(1) = 1 + i_1$$

由累积函数的定义，有 $a(0)=1$，所以结合上式可知，累积函数 $a(t)$ 必然经过下述两点：$(0, 1)$ 和 $(1, 1+i_1)$，如图 1—2 所示。该图的累积函数来自例 1—2，即 $a(t)=0.08t^2+0.02t+1$。该累积函数在时期 $(0, 1)$ 的实际利率为 $i_1 = a(1)-1=0.1$。

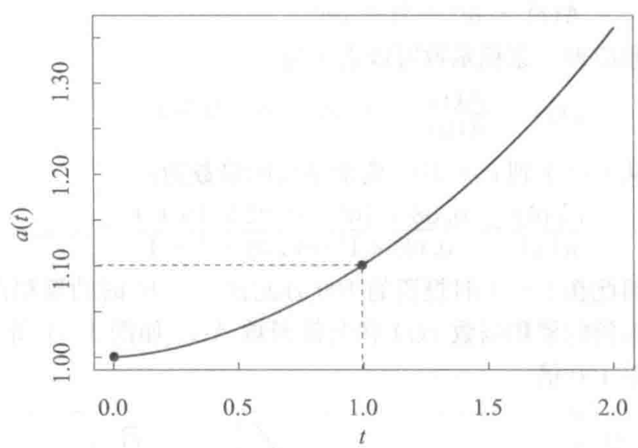

图 1—2 累积函数

用实际利率表示的利息只能在期末一次性支付，也就是说，在时期 $(t-1, t)$ 产生的利息 i_t 只能在时刻 t 获得。

在时期 $(t-1, t)$ 的实际利率也可以用金额函数计算：

$$i_t = \frac{A(t)-A(t-1)}{A(t-1)}$$

式中，分母表示时刻 $t-1$ 的累积值，分子表示该累积值在时期 $(t-1, t)$ 产生的利息。

该式表明，实际利率就是一个时期赚取的利息与期初的本金之比。

1.1.3 单利

单利（simple interest）是指具有下述累积函数的利率：

$$a(t) = 1 + it, \ t \geqslant 0$$

在单利的累积函数中，本金保持不变，为 1 个单位，而利息 it 随着时间的

延长线性增长。

单利只对本金计算利息，前期产生的利息在后期不再计算利息。在单利条件下，每期产生的利息都是常数。譬如，如果期初的本金为 1 元，那么第 1 期产生的利息为 i，期末的累积值为 $1+i$；第 2 期产生的利息也为 i，期末的累积值为 $1+2i$，等等。

单利的累积函数是一个线性函数，如图 1—3 所示。该图中的累积函数为 $a(t)=1+0.1t$，单利利率为 $i=0.1$。

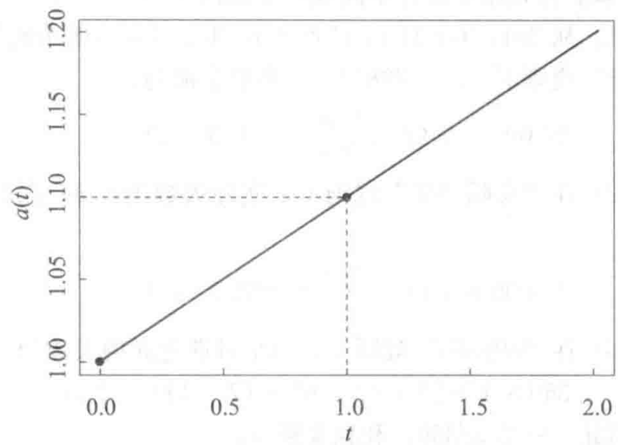

图 1—3 单利的累积函数

在实际应用中，利率通常表示为年利率，因此累积函数中的时间 t 应以年为单位计量，即把 t 表示为年数。计算时间 t 的通用公式如下：

$$t=\frac{\text{投资天数}}{\text{一年的天数}} \tag{1.4}$$

在实际应用中，可以应用不同的方法计算上式中的投资天数和一年的天数。下面是几种常见的方法：

（1）"实际/365" 规则，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按 365 天计算。

（2）"实际/360" 规则，即投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按 360 天计算。该规则也称为银行家规则（banker's rule）。

（3）"30/360" 规则，即在计算投资天数时，每月按 30 天计算，每年按 360 天计算。在此规则下，两个给定日期之间的天数可按下述公式计算：

$$360(Y_2-Y_1)+30(M_2-M_1)+(D_2-D_1)$$

其中，投资的终止日期为 Y_2 年 M_2 月 D_2 日，起始日期为 Y_1 年 M_1 月 D_1 日。

在应用 "30/360" 规则计算投资天数时，还需依次进行下述调整：

（ⅰ）如果 D_1 和 D_2 都是 2 月份的最后一天，则把 D_2 改为 30；

（ⅱ）如果 D_1 是 2 月份的最后一天，则把 D_1 改为 30；

（ⅲ）如果 D_1 等于 30 或 31，D_2 等于 31，则把 D_2 改为 30；

（ⅳ）如果 D_1 等于 31，则把 D_1 改为 30。

【例 1—3】

投资者在 2014 年 6 月 14 日存入基金 10 000 元，2015 年 2 月 7 日取出，基金的年单利利率为 8%，请分别根据下列规则计算投资者可以获得的利息金额：

（1）“实际/365”规则。

（2）“实际/360”规则。

（3）“30/360”规则。

【解】首先需要计算不同规则下的投资年数 t。

（1）从 2014 年 6 月 14 日到 2015 年 2 月 7 日的精确天数为 238，因此在“实际/365”规则下，$t=238/365$，利息金额为：

$$10\,000\times 0.08\times\frac{238}{365}=521.6\text{（元）}$$

（2）在“实际/360”规则下，实际天数为 238，因此 $t=238/360$，利息金额为：

$$10\,000\times 0.08\times\frac{238}{360}=528.9\text{（元）}$$

（3）在“30/360”规则下，两个日期之间的天数为：

$$360\times 1+30\times(2-6)+(7-14)=233$$

因此 $t=233/360$，利息金额为：

$$10\,000\times 0.08\times\frac{233}{360}=517.8\text{（元）}$$

可见，与精确结果相比，“实际/360”规则下的利息金额较大，而“30/360”规则下的利息金额较小。

在计算两个日期之间的天数时，可以使用 Excel 软件。譬如在本例中，在单元格 A1 中输入“2015-2-7”，在单元格 B1 中输入“2014-6-14”，在单元格 C1 中输入“=A1−B1”后回车，再将其转化为数值格式，即可得到两个日期之间的实际天数为 238 天。

计算两个日期之间精确天数的另一种方法是使用 DATEDIF 函数。如在单元格 C1 中输入“=DATEDIF("2014-6-14","2015-2-7","D")”后回车，即可求得两个日期之间的精确天数为 238 天。

按照“30/360”规则计算两个日期之间的天数时，可以应用 Excel 中的函数 DAYS360，譬如对于本例的两个日期，在单元格 A1 中输入“2014-6-14”，在单元格 B1 中输入“2015-2-7”，在单元格 C2 中输入“=DAYS360(A1, B1)”后回车，即可求得两个日期之间的天数为 233。也可以直接在单元格 C2 中输入“=DAYS360("2014-6-14","2015-2-7")”后回车求得。

【例 1—4】

某投资基金按单利利率 6%计息，投资者 A 投入 100 万元，期限为两年。投资者 B 在同一时间也投入 100 万元，但是他在第一年末取回了累积值，紧接着又重新投入。请问：在第二年末谁的累积值更大？