南京航空学院

研究生硕士学位论文

研究生姓名 张国全

专　　　业 计算数学

研究方向 偏微数值解

指导教师 周树荃

一九八五年一月

守恒律双曲型方程的一个二阶精度差分格式及其在空气动力学中的应用

研究生：张 国 全

指导教师：周 树 荃
　　　　　戴 嘉 尊

南 京 航 空 学 院

一九八五年二月

Abstract

The author, starting with one-order E-O scheme and two-order Lax-Wendroff scheme, uses Harten's thought of hybrid scheme to present a new two-order difference scheme for the nonlinear hyperbolic conservative law. The scheme has both E-O scheme and Lax-wendroff scheme's advantagements. Especially, it overcomes the oscillating by shock, and the transition of the shock is narrower, as well.

Using strict mathematic method, the author has discussed the scheme's stability, convergence, entropy, monotonicity preserving, dissipation, dispersion and heuristic stability. The numercial results indicate that the scheme is better than usuall schemes.

At the end of the paper, the scheme is used to calculate the transonic small pertubation problem, and the scheme is extended to nonlinear Hyperbolic systemes of conservative laws.

目录.

摘要

本文从一阶E-O格式及二步二阶Lax-Wendroff格式出发，利用Harten所提出的混合格式思想，提出了一个解非线性守恒律方程的二阶差分格式。此格式吸取了E-O格式及二步Lax-Wendroff格式的优点，特别，在计算激波时，不具有二步Lax-Wendroff格式及通常二阶格式所具有的振荡现象，激波过渡区也较窄。文章对格式的稳定性，收敛性，熵性质，保单调性及耗散色散性质等进行了严格的数学分析。并就其对Burgers方程的初始间断分解问题作了数值试验，计算结果与同常用差分格式计算此问题的结果作了比较，结果表明，此格式较之其它格式优越。文章最后利用此格式计算了跨音速小扰动问题，并把格式推广到了方程组。

§1. 前言

考虑非线性守恒律方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & (1.1) \\ u(x,0) = u_0(x) & |x| < \infty \end{cases}$$

其中 $f(u)$ 是 u 的一个非线性函数.

如所周知，如果问题是个真正非线性问题，即：$a_u \equiv f''_{uu} \neq 0$

特征线就会相交. 在特征线相交处. 解会发生间断.

因此，如果要对任意初值. 讨论 (1.1) 的解的整体存在性. 即对一切 $t \geq 0$ 的存在性. 就要减少对解的光滑性要求.

定义：对于一切具有紧支集的任何光滑函数 $w(x,t)$，成立以下等式.

$$(1.2) \quad \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (w_t u + w_x f(u))\,dx\,dt + \int_{-\infty}^\infty w(x,0) u_0(x)\,dx = 0$$

的函数 $u(x,t)$，称为 (1.1) 的弱解.

弱解不一定唯一. 甚至可以出现间断

若 u 是分片连续弱解. 在穿过间断时. 从定义 (1.2) 可以推出下列 R-H 条件：

$$f(u_R) - f(u_L) = s(u_R - u_L) \qquad (R-H)$$

成立。

其中：s 是间断的传播速度. u_L, u_R 分别是 u 在间断左，右两边的值。

由于满足 (1.2) 的函数类太大，因此. 初值问题 (1.1) 的这种弱解是不唯一的。

为了保证解的唯一性. 我们考虑初值问题具有物理意义的解

即：所谓的物理解。

初值问题(1.1)的物理解是下列带粘性项方程的解当粘性系数 $\varepsilon\to 0$ 时的极限。

$$(1.3)\quad \begin{cases} u_t + f(u)_x = \varepsilon[\beta(u)u_x]_x & \beta(u)>0 \\ u(x,0)=u_0(x) & |x|<\infty \end{cases}$$

Olenik[12], p57 等证明了，物理解在间断处具有性质，下述

$$\frac{f(u)-f(u_L)}{u-u_L} \geq s \geq \frac{f(u)-f(u_R)}{u-u_R} \qquad (E)$$

对 u_L, u_R 间的一切 u 成立。

条件(E)叫做熵条件，在物理上，此条件意味着，经过激波时，熵必须增加。

同时她还证明了，满足熵条件(E)的弱解就是唯一的物理解。熵条件还具有如下几种形式：[ ]

(a)、设 $\rho(x,t)\in C_0^1$，$\rho(x,t)\geq 0$ 则熵条件为：

$$(1.4)\quad -\iint(\rho_t u + \rho_x f(u))\,dx\,dt \leq 0$$

(b)、如果非线性守恒律方程(1.1)中的 $f(u)$ 是凸函数，则熵条件为，

$$(1.5)\quad a(u_L) > s > a(u_R)$$

其中：$a(u)=\dfrac{df(u)}{du}$　　s, u_L, u_R 如前所述。

(c) 如果去掉(b)中 $f(u)$ 是凸函数的要求，则熵条件为，

$$(1.6)\quad \begin{aligned} f(\alpha u_R+(1-\alpha)u_L) &\leq \alpha f(u_R)+(1-\alpha)f(u_L) && \text{如果 } u_L>u_R \\ f(\alpha u_R+(1-\alpha)u_L) &\geq \alpha f(u_R)+(1-\alpha)f(u_L) && \text{如果 } u_L<u_R \end{aligned}$$

其中 α 是常数，$0\leq\alpha\leq 1$

(d). 设U是u的一个凸函数，$F(u)$是u的微函数，满足

$$\text{grad}\, U \cdot A = \text{grad}\, F \qquad 其中\ A = \frac{\partial f}{\partial u}$$

则熵条件为：

$$(1.7) \qquad U(u)_t + F(u)_x \le 0$$

（注：如果是方程组问题，则A为一矩阵）

(e): U. F同上，u_L，u_R分别是u在间断左，右的值，则熵条件为：

$$(1.8) \qquad s[U(u_L) - U(u_R)] - [F(u_L) - F(u_R)] \le 0$$

(f)：$\rho(x,t) \in C_0^1$，$\rho(x,t) \ge 0$ 则熵条件为：

$$(1.9) \qquad -\iint (\rho_x U + \rho_t F(u))\, dx\, dt \le 0$$

关于这些熵条件的等价性证明参见[ ]

现在考察(1.1)的差分解法

设，对于初值问题(1.1)的相应差分格式为：

$$(1.10) \qquad v_j^{n+1} = H(v_{j-k}^n, \cdots v_{j+k}^n)$$

其中$v(x,t)$为(1.1)的近似解，$v_j^n = v(j\Delta x, n\Delta t)$

Δx，Δt 分别为x，t方向上的差分步长。

如果：

$$H = v_j^n - \lambda(h_{j+1/2}^n - h_{j-1/2}^n) \qquad \lambda = \Delta t/\Delta x$$

其中 $h_{j+1/2}^n = h(v_{j-k+1}^n, \cdots v_{j+k}^n)$ $\quad h_{j-1/2}^n = h(v_{j-k}^n, \cdots v_{j+k-1}^n)$

同时满足相容性条件：

$$(1.11) \qquad h(u, \cdots u) = f(u)$$

则称差分格式为守恒型差分格式。

进一步，如果H是每个变量的单调函数，则称差分格式为单调守恒型差分格式

Lax 与 Wendroff[1] 在60年代证明了：如果守恒型差分格式的解 v_j^n 当 $\Delta x, \Delta t \to 0$ 时处处收敛到 $u(x,t)$，那么 $u(x,t)$ 是初值问题 (1.1) 的弱解。但是，这一著名定理不能保证守恒型差分格式的解收敛到初值问题唯一的物理解[3]。

Madja 与 Grandall[9] 在1980年证明了：单调守恒差分格式的解 v_j^n，在 L^1 意义下收敛到初值问题唯一的物理解。

单调守恒型差分格式是一阶格式[3]，高阶格式不再具有单调性。由于如果初值问题的初值是自变量 x 的单调函数，则其物理解也是 x 的单调函数[18]。因此，为了使得用高阶精度差分格式求解时得到初值问题的物理解，通常要求高阶差分格式具有保单调性，所谓保单调性就是：如果 v_j^n 是 j 的单调序列，则 v_j^{n+1} 也是 j 的单调序列。保单调性的守恒差分格式集合大于单调守恒差分格式集合，它可以包含一些二阶格式[17]。

通常所使用的一阶、二阶差分格式有：Lax-Friedrich 一阶格式，E-O 一阶格式，Goudunov 一阶格式，Lax-Wendroff 二阶格式以及其各种变形，其中包含著名的 MacCormack 格式，Engquist 与 Osher[8] 提出的二阶精度混合格式，Warming 与 Beam[14] 对 MacCormack 格式进行修改并与 MacCormack 格式进行调合而得到的一个二阶精度格式，文[23]中提出的一类二阶精度迎风差分格式，Van Leer[17] 的二阶精度格式等等。

一般地，用一阶格式计算激波时，不具有振荡现象，但精度较低，且具有一阶精度格式会有[illegible]现象，而用二阶精度格式计算激波时会出现振荡现象。为了防止这些现象，并尽量提高格式的精度，

Harten[ ] 提出了一个混合格式思想，即在解连续的地方用二阶精度格式，在解间断的地方用一阶精度格式，利用这种思想构造出的差分格式，在计算激波时，效果较好。[2]

对于空气动力学中的定常跨音速小扰动方程，有著名的 Murman-Cole 格式及 Jameson 格式[5]，但它们在某些特殊情况下不满足熵条件。为了改进此格式，Engquist 与 Osher[7] 提出了一个一阶精度差分格式[ ]，此格式满足熵条件，而且稳定。也可以利用时间相依法求解定常问题，当用时间相依法求解定常解时，Jenning[11] 证明了：单调守恒差分格式有定常离散激波解，Madja 与 Ralston[10] 给出了差分格式有无满足熵条件的定常离散激波解的判别条件。1980年，Engquist 与 Osher[7] 针对定常跨音速小扰动方程而提出的一个一阶精度格式是一个很好的格式。此格式有定常离散激波解存在，而且定常离散激波解不具有振荡现象，激波过渡区也较窄。以下简称此格式为 E-O 格式。

本文利用 Harten 的混合格式思想，把 E-O 格式与一个 Lax-Wendroff 型单边差分格式进行组合，从而得到一个新的差分格式。此格式用于计算跨音速问题时间断分辨问题时效果较好，激波过渡区与 E-O 格式一样，并有 E-O 格式的一切性质。但此格式是二阶精度的，同时不具有一般二阶精度格式所具有的振荡现象。把此格式与二步 Lax-Wendroff 格式、MacCormack 格式、E-O 二阶格式作了计算上的比较，结果表明，此格式优于如上几种格式。利用此格式计算了来流 $M_\infty=1.005$，相对厚度 $\delta=0.06$ 的抛物型翼型的压

为分布时，所得结果令人满意。

在理论上，利用能量分析方法证明了当 $\lambda\max|f'(u)|\le 1/3$ 时，此差分格式是稳定的。并利用刘满楼[21]的方法分析了此差分格式的耗散、色散性质以及线性稳定性条件。利用直接建立误差方程的办法，证明了当 $\Delta x, \Delta t\to 0$ 时，差分格式对Burgers方程的收敛问题。并证明了此差分格式满足熵条件(1.P)。最后，把差分格式推广到了方程组。

在本文的研究过程中，得到了周树荃老师、吕桐兴老师、戴嘉尊老师的关心与指导，作者表示衷心的感谢。

§2. 常用差分格式的一些理论分析及它们的计例比较.

本节中，我们对这初值问题(1.1)的一些常用差分格式作一些理论分析，主要分析这些格式的熵性质。指出这些格式的不足，并就它们对一些具体问题在IBM 4341机上作一些计算，对所得结果作一些分析及比较。

首先考虑一步格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \sum_k \alpha_k \left(f_{j+k+1}^n - f_{j+k}^n \right) \qquad (*)$$

其中 α_k 是常数，它的选取使得差分格式满足相容性条件。

它们在线性意义下是耗散型的，但在非线性情况下，由于不包含一个与$f(u)$无关的人工粘性项，对于某些初值，格式将失去耗散作用[20]，此时，对于这些初值，格式将收敛于非物理解。

例如：如果 $u_1 \neq u_2$，$f(u_1) = f(u_2)$，(u_1, u_2 是任意两个常数)

且 $u_j = \begin{cases} u_1 & j > 0 \\ u_2 & j \le 0 \end{cases}$ 满足熵条件，

那么，差分格式(*)有 $\bar{u}_j = \begin{cases} u_2 & j > 0 \\ u_1 & j \le 0 \end{cases}$ 作为其熵违反定常解。

Lax-Wendroff 格式就属于此类。

其次，考虑二步差分格式：

$$S_\beta^\alpha \qquad \begin{cases} \bar{u}_j = (1-\beta) u_j^n + \beta u_{j+1}^n - \alpha\lambda \Delta_+ f(u_j^n) \\ u_j^{n+1} = u_j^n - \dfrac{\lambda}{2\alpha} \left[\alpha \Delta_0 f(u_j^n) - \beta \Delta_- \Delta_+ f(u_j^n) - \Delta_- f(u_j^n) + \Delta_- f(\bar{u}_j) \right] \end{cases}$$

其中 α, β 是常数 $\alpha \neq 0$，$0 \le \beta \le 1$

Δ_-，Δ_+，Δ_0 为通常定义的差分算子.

如 $f(u)$ 是 u 的线性函数，格式退化为二步 Lax-Wendroff 格式.

设 $u_L \neq u_R$　　$f(u_L)=f(u_R)$.

那么，对任意的 α，S_1^α，S_2^α 都有熵违反的离散激波.

确切地说，如果

$$u=\begin{cases} u_L & x<0 \\ u_R & x\geq 0 \end{cases}$$

是一个满足严格熵不等式的定常激波，那么

$$u_j=\begin{cases} u_R & j<0 \\ u_L & j\geq 0 \end{cases}$$

是 S_0^α，S_1^α 的熵违反定常离散激波解

如果 $f(u)$ 是一个标量函数，$u_R<u_L$（$u_L<u_R$）满足.

$$f(u_R)=f(u_L)=f((1-\beta)u_L+\beta u_R)$$

且对任意的 $v\in(u_R,u_L)$ 有 $f(v)>f(u_R)$　　$(f(v)<f(u_R))$

那么 S_β^α 有熵违反离散激波解.

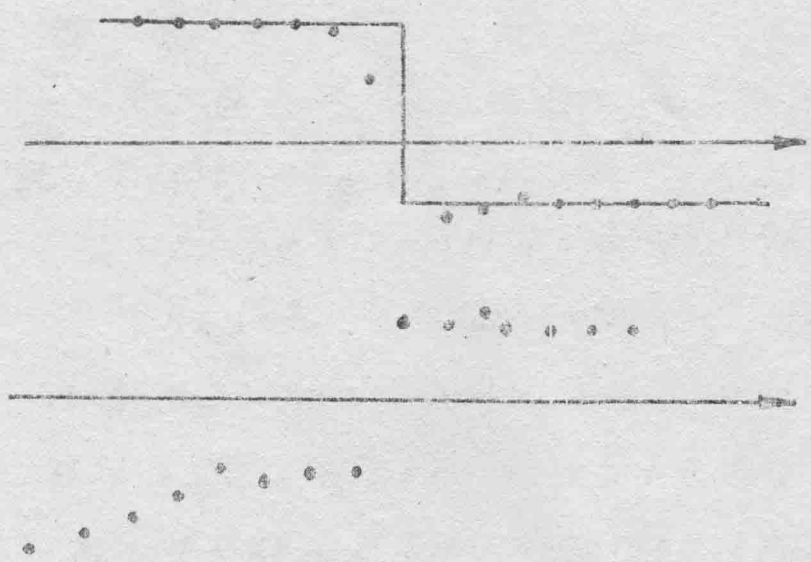
$$u_j=\begin{cases} u_L & j\leq 0 \\ u_R & j>0 \end{cases}$$

因此，对于此类二步格式，当用它们来计算初值问题的间断解时会得到非物理解．这也是由于此类差分格式对于某些初值失去耗散作用，它把稀疏波当作激波处理，因此会得到非物理解，为使差分格式的解收敛于初值问题的物理解，在构造差分格式时，必须使其在稀疏波附近满足熵条件，避免非物理解。其次，由上两类格式在计算激波时，由于耗散，色散的作用，通常会引起一些振荡现象以假象现象。

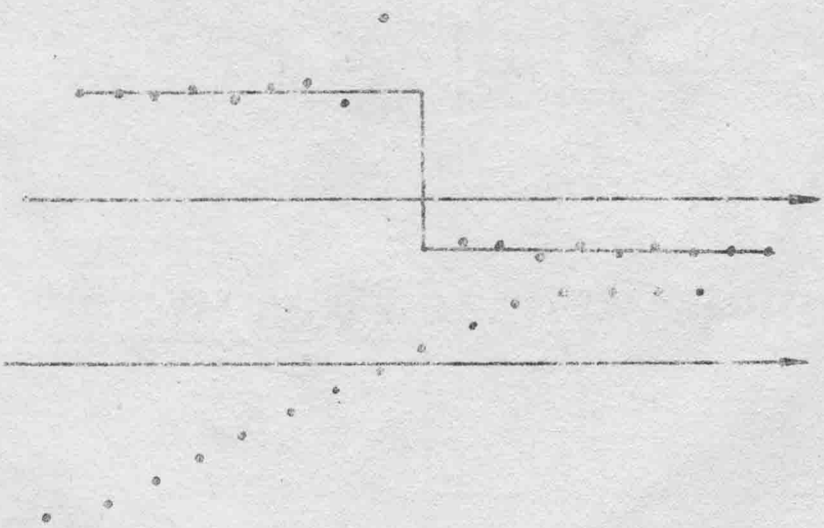
利用 macCormack 格式，二步 Lax-Wendroff 格式计算 Burgers 方程

的间断分解问题的数值结果如下图.

对于 maccormack 格式　CFL数=1　$n=34$



对于二步 lax-wendroff 格式　CFL数=1,　$n=34$



从以上的图可看出, maccormack 与二步 lax-wendroff 格式在计算激波解时都具有振荡现象. 相对说来, lax-wendroff 格式在计算激波时振荡得巨烈一些. 在计算稀疏波时 maccormack 格式有振荡现象. 而 lax-wendroff 格式则没有这种现象.

再次，考虑如下差分格式：

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2}\left(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)\right) + \frac{Q_{j+1/2}^n}{2}(u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{Q_{j-1/2}^n}{2}(u_j^n - u_{j-1}^n)$$

其中 $Q_{j+1/2}^n$ 的引进是为了限制粘性的影响。它依赖于 u_j^n，u_{j+1}^n。

A. Y. Le Roux [12] 证明了：如果 $\lambda \max|f'(u)| \le 1$

且 $\lambda|f'(\xi_{j+1/2}^n)| \le Q_{j+1/2}^n \le 1$

那么差分解中有一个子序列在 L^1 范数下收敛于弱解。

其中 $\xi_{j+1/2}^n$ 满足：$f(u_{j+1}^n) - f(u_j^n) = f'(\xi_{j+1/2}^n)(u_{j+1}^n - u_j^n)$

进一步 A. Y. Le Roux 又证明了：如果 $\lambda \max|f'(u)| \le 1$

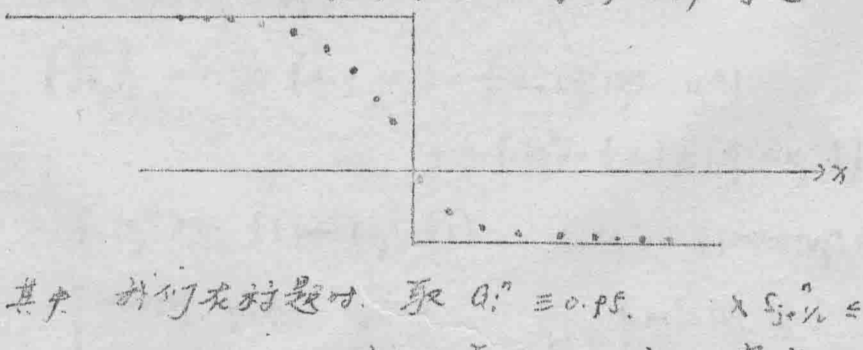
且 $\lambda S_{j+1/2}^n \le Q_{j+1/2}^n \le 1$ 对任意 j, n 成立。

那么差分解在 L^1 范数下收敛到初值问题的物理解。

其中

$$S_{j+1/2}^n = \begin{cases} |f'(\xi_{j+1/2}^n)| & \text{如果 } u_{j+1}^n = u_j^n \\ \sup\limits_{k \in (u_j^n, u_{j+1}^n)} \left[\max\left\{\dfrac{f(u_{j+1}^n) - f(k)}{u_{j+1}^n - k}, -\dfrac{f(u_j^n) - f(k)}{u_j^n - k}\right\}\right] & \text{如果 } u_{j+1}^n \ne u_j^n \end{cases}$$

利用此格式计算黎曼问题的间断分解问题如下图。

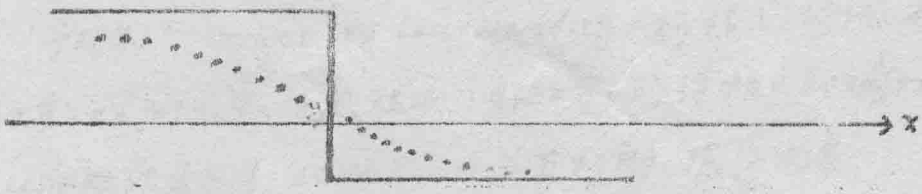


$n = 167$

其中，我们在计算时，取 $Q_j^n \equiv 0.95$，$\lambda S_{j+1/2}^n \le 0.9$

从计算结果没有数值耗散现象，而且激波宽度比 Lax-Friedrich 格式窄一些，但仍占有很多个网格点。

防止发生差分格式的解收敛于非物理解的途径是人工粘性。人工粘性的第一个作用是保证在中心稀疏波顶点附近的区域内，差分格式的解收敛到物理解，它的第二个作用是在激波和接触间断的自动捕捉过程中，控制在强间断附近发生的振荡现象，并且阻尼它的误差传播。但是，粘性过大，特别是耗散过大，差分格式的解即使收敛于物理解，在激波计算时，也会拉平激波，出现偏离现象。一阶的 Lax-Friedrich 格式就是如此。利用此格式计算 Burgers 方程的间断分解问题数值结果如下图：



图： 激波过渡区占有很多网格。

对于高阶格式，在计算激波或中心稀疏波时，一般都会出现振荡现象。下面我们以几个具体例子说明之。

Osher 与 Engquist 1980 年为跨声速小扰动方程而提出的如下二阶精度格式：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j^n = -\frac{1}{\Delta x}\Big(\Delta_- f_-(u_j^n) - \frac{1}{2}\Delta_+\big(f_-'(\tilde u_j)\Delta_+ u_j^n\big) + \Delta_- f_+(u_j^n) + \frac{1}{2}\Delta_-\big(f_+'(\hat u_j)\Delta_- u_j^n\big)\Big)$$

其中 $f_-(u_j^n) = f(\min(u_j^n, \bar u))$　　$f_+(u_j^n) = f(\max(u_j^n, \bar u))$

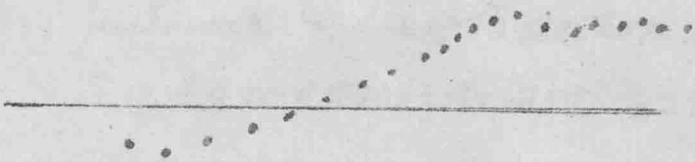
$$\tilde u_j = \begin{cases} \max(u_j, u_{j+1}) & u_{j+1} < \bar u \\ \bar u & u_{j+1} \ge \bar u \end{cases} \qquad \hat u_j = \begin{cases} \min(u_j, u_{j-1}) & u_{j-1} > \bar u \\ \bar u & u_{j-1} \le \bar u \end{cases}$$

$f'(\bar u) = 0,\qquad f''(u) > 0$

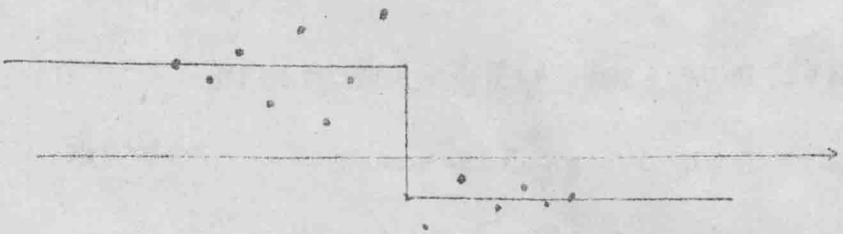
并证明了此格式的稳定性及熵性质.

但如果对此格式的时间导数进行离散化. Osher没有证明离散化所得格式的稳定性, 熵性质及收敛性, 从对Burgers方程的初值问题计算结果可知. 此格式在稀疏波附近出现振荡现象。 计算结果如下表.

CFL数=0.3　　　　$n=34$.



1981年　Osher对Lax-Wendroff二阶格式了修改. 在原格式的基础上附加了一项粘性项. 并证明了所得格式的熵性质[16]. 但从计算结果来看, 此格式仍然具有超射, 振荡现象.



Warming与Beam 1976年利用混合格式的思想. 混合了两个二阶精度格式. 其具体作法如下[14]

考虑二阶MacCormack格式:

$$M:\quad \begin{cases} \bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t \dfrac{\Delta f_j^n}{\Delta x} \\ u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_j^n + \bar{u}_j^{n+1}) - \dfrac{\Delta t}{2} \dfrac{\Delta f_j^{n+1}}{\Delta x} \end{cases}$$

及二阶迎风差分格式: