"十三五"普通高等教育本科规划教材

线性代数教程

牛连杰　主　编
孙志田　李军红　张　新　副主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

“十三五”普通高等教育本科规划教材

线性代数教程

主　编　牛连杰
副主编　孙志田　李军红　张　新
编　写　张建梅　王向东　梁志宇　崔　宁
主　审　邱启荣

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为“十三五”普通高等教育本科规划教材。

本书是根据国家教育行政部门制定的《线性代数课程教学基本要求》编写而成的。全书共六章，包括行列式、矩阵、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组与向量空间、相似矩阵与矩阵相似对角化、化二次型为标准形的基本理论和基本计算。本书收录了近年来硕士研究生入学考试的线性代数部分的考试真题，供读者提高使用。每章后附有基本和提高两组习题，并附有参考答案。此外，还增加了附录用Mathematica解线性代数。

本书可供普通高等院校非数学专业作为线性代数的教材使用，也可供业余大学和科技工作者使用。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数教程/牛连杰主编．—北京：中国电力出版社，2016.10

“十三五”普通高等教育本科规划教材

ISBN 978-7-5123-9874-0

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①牛…　Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第243112号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号　100005　http://jc.cepp.com.cn）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2016年11月第一版　2016年11月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米　16开本　8.75印张　209千字

定价 **18.00** 元

前　言

随着经济和信息技术的高速发展，线性代数的应用越来越广泛，很多实际问题可通过线性代数知识解决，使线性代数成为当代科技的基础。线性代数在训练人们的逻辑思维能力、推理能力、分析问题和解决问题的能力方面也起着重要的作用。线性代数已经成为理工、经济、管理等专业的重要必修课之一。

本书按照国家教育行政部门制定的《线性代数课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践和教学改革的实际经验，针对当前学生的特点和水平，以及现代计算机技术的发展精心编写而成。在编写过程中，注重了以下几方面的问题：

(1) 适应我国在21世纪经济建设和发展的需要，着眼于培养“厚基础，宽口径，高素质”的应用型人才，注重加强基础课程教育。

(2) 在注意保持数学学科本身结构的科学性、系统性、严谨性的同时，力求深入浅出，通俗易懂，突出有关理论、方法应用的介绍。

(3) 注意兼顾各专业学生的不同需求，既能较好地掌握所学的知识，又能满足后继课程及学生继续深造的需要。为此，我们精心编写了本书习题，并将习题分为A组和B组两部分。习题A组为基本题，针对基本理论和基本计算；习题B组为提高题，搜集了近年来考研的真题。

(4) 结合当代技术发展，在附录A中比较详尽地介绍了线性代数课程中的各种计算问题，如行列式的计算、矩阵的各种计算、线性方程组求解等。

本书由牛连杰担任主编、孙志田、李军红、张新担任副主编，张建梅、崔宁、王向东、梁志宇参编。其中张建梅主持编写第一章，张新主持编写第二章，孙志田主持编写第三章、第四章及附录A，牛连杰主持编写第五章，李军红主持编写第六章。

在本书编写过程中，我们得到了河北建筑工程学院的领导和数理系领导及老师们的精心指导和大力支持，在此表示感谢。

限于学识与水平，本书不当之处，恳请各位专家和读者批评指正，提出宝贵意见。

编　者

2016年8月

目录

第一章　行　列　式

行列式是线性代数的一个重要组成部分．它是研究矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性和特征多项式的重要工具．本章介绍 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，最后给出了它的一个简单应用——克拉默（Cramer）法则．

第一节　n 阶行列式

一、二阶行列式与三阶行列式

二元线性方程组（把一次方程组称为线性方程组）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1-1}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，用消元法求得方程组（1-1）的唯一解是

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1-2}$$

式（1-2）中的分子与分母形式上完全一致，为了方便使用与记忆，可采用一种较易记忆的符号来表示这种形式．

定义 1-1　将形如 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 的表达式，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

称为**二阶行列式**．

a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为行列式（1-3）的**元素**或**元**．元素的第一个下标称为**行标**，指明该元素所在的行，第二个下标称为**列标**，指明该元素所在的列．

根据二阶行列式的定义，式（1-3）就是 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，只是符号记法的不同而已，因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

上式可采用对角线法则记忆，如图 1-1 所示，实线称为**主对角线**，虚线称为**副对角线**，二阶行列式就是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之积所得的差（二阶行列式**对角线法则**）．

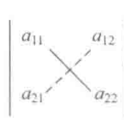

图 1-1

引入二阶行列式后，对于式（1-2），由于

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

那么式（1-2）可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

这里，方程组（1-1）中 x_1，x_2 的系数确定了行列式 D（称为系数行列式），用常数项 b_1，b_2 替换 D 中第 1 列元素得到 x_1 的分子 D_1，用常数项 b_1，b_2 替换 D 中第 2 列元素得到 x_2 的分子 D_2.

在三元线性方程组的唯一解中，分子分母形式上也完全一致，只不过是六项代数和，每项是 3 个数的乘积，为此引入三阶行列式.

定义 1-2 将形如 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 的表达式，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**.

由定义可知，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

上式的规律遵循三阶行列式的对角线法则（见图 1-2）：每条实线上三元素乘积冠正号，每条虚线上三元素乘积冠负号.

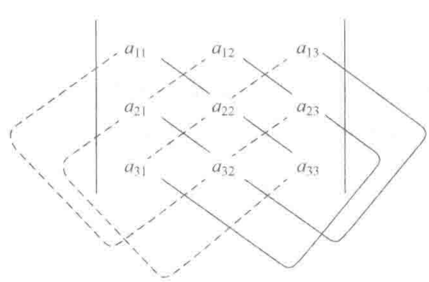

图 1-2

例 1-1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 = -10, \\ x_1 + 2x_2 = 5.\end{cases}$$

解 由于

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\times 2 - (-1)\times 1 = 5 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -15,\quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20,$$

所以方程组的唯一解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-15}{5} = -3, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{20}{5} = 4.$$

例 1-2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 根据三阶行列式对角线法则，有

$$D = 2\times 4\times 2 + 3\times 1\times 1 + 1\times 0\times 1 - 2\times 1\times 1 - 3\times 0\times 2 - 1\times 4\times 1 = 13.$$

二、排列及其逆序数

对角线法则仅适用于二阶与三阶行列式，为介绍更高阶的行列式，首先介绍有关正整数排列的相关知识.

定义 1-3 由 n 个正整数 1，2，3，…，n 排成一列叫做这 n 个数的一个**排列**. 特别地，将排列 $12\cdots n$ 称为**标准排列**. 排列中的数称为元素.

显然，由 n 个正整数 1，2，3，…，n 可组成 $n!$ 个排列. 例如，由 1，2，3 可组成 $3!=6$个排列：123，231，312，132，213，321；在这 6 个排列中，除 123 是标准排列外，其余排列中，都有较大的数排在较小的数前面，为此给出逆序数定义.

定义 1-4 一个排列中，当某两个元素先后次序与标准排列的次序不同时，就构成一个**逆序**. 排在某元素之前并且比该元素大的元素的个数叫做这个**元素的逆序数**. 一个排列中全体元素的逆序数之和叫做这个**排列的逆序数**，记为 τ. 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**.

显然在求排列的逆序数时，可先求各元素的逆序数，然后求和，就得到了排列的逆序数.

例 1-3 求排列 45132 的逆序数.

解 元素 4 的逆序数为 0，5 的逆序数为 0，1 的逆序数为 2，3 的逆序数为 2，2 的逆序数为 3，因此该排列的逆序数 $\tau=0+0+2+2+3=7$.

三、n 阶行列式

现在将二阶、三阶行列式推广到 n 阶行列式，二阶行列式本身比较简单，为此我们只研究三阶行列式的结构特点，看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1-4}$$

首先，式（1-4）右端每项都是三个元素的乘积，三元素行标排列是标准排列 123（三元素不同行），三元素列标排列是由 1，2，3 排成的某个排列 $p_1p_2p_3$（三元素不同列），因此，每项除正负号外都可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，即位于不同行不同列的三个元素的乘积.

其次，式（1-4）右端正号项列标排列为 123，231，312，它们都是偶排列；负号项列标排列为 132，213，321，它们都是奇排列，因此每项的正负号可以写成$(-1)^{\tau}$，其中 τ 为该项列标排列的逆序数.

因此，式（1-4）右端是$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$的代数和，项数是3！项，也就是 1，2，3 所有排列的个数，所以三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中$\sum$表示对 1，2，3 的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和，τ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数.

仿照三阶行列式，对于 n^2 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, n$；$j=1, 2, \cdots n$），排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{1-5}$$

取表中不同行不同列的 n 个数作乘积，再冠以符号$(-1)^{\tau}$ 得到

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1-6}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，τ 为该排列的逆序数. 由于 1，2，…，n 的排列共有 n！个，因此形如式（1-6）的项共有 n！项，作这些项的代数和，得到如下形式表达式

$$\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1-7}$$

可以看出，式（1-7）可由数表（1-5）经过上述运算得到，按此可定义 n 阶行列式.

定义 1-5 将形如$\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$的表达式，记成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n **阶行列式**，其中$\sum$表示对 1，2，…，n 的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，τ 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 行列式一般记为 D，也可记为 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式的第 i 行第 j 列元素.

显然当 $n=2$，3 时，就是之前定义的二阶、三阶行列式. 当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意不要与绝对值符号混淆.

例 1-4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 据定义，D 是一个 $4!=24$ 项的代数和，然而在此行列式中，除 $acfh$，$adeh$，$bdeg$，$bcfg$ 这四项外，其余的项都至少含有一个因子 0，因而等于 0，与上面四项对应的排列依次是 1234，1324，4321，4231. 其中第一个和第三个是偶排列，第二个和第四个是奇排列，因此

$$D=acfh-adeh+bdeg-bcfg.$$

例 1-5 证明上三角行列式（主对角线下方元素全部为 0）

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证法一 $D=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，其中共有 $n!$ 项$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，这些项中 $p_1=1$，否则该项为 0，$p_2=2$（因为 $p_1=1$），否则该项为 0，依次类推，$p_n=n$.

即在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中只有 $12\cdots n$ 对应的项$(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$（形式上）不为 0，此时 $\tau=0$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证法二 D 的特点：当 $i>j$ 时 $a_{ij}=0$，当 $i\leqslant j$ 时 a_{ij}（形式上）不为 0. 所以 D 中的项

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

（形式上）不为 0 时，a_{ip_i} 需满足 $i\leqslant p_i$，即 $n\leqslant p_n$，$n-1\leqslant p_{n-1}$，…，$2\leqslant p_2$，$1\leqslant p_1$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中满足上述关系的排列只有 $12\cdots n$，因此 D 中（形式上）不为 0 的项只有$(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此时 $\tau=0$，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

结合例 1-5，显然有以下结果

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

第二节 行列式的性质

直接用定义计算行列式是一件很烦琐甚至不可能的事情，为此有必要讨论行列式的性质.

一、对换

将一个排列中的任意两个元素交换位置，其余元素不动，得到一个新排列，这样的一个变换称为**对换**. 将相邻的两个元素对换，称为**相邻对换**.

定理 1-1　一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明　先证一次相邻对换改变奇偶性.

设排列为 $a_1\cdots a_sABb_1\cdots b_t$，对换 A 与 B，变为 $a_1\cdots a_sBAb_1\cdots b_t$. 显然经对换后元素 a_1，…，a_s，b_1，…，b_t 的逆序数没改变，而 A，B 两元素的逆序数改变为：当 $A<B$ 时，对换后 A 的逆序数增加 1 而 B 的逆序数不变；当 $A>B$ 时，对换后 A 的逆序数不变而 B 的逆序数减少 1. 所以排列 $a_1\cdots a_sABb_1\cdots b_t$ 与排列 $a_1\cdots a_sBAb_1\cdots b_t$ 的奇偶性不同.

再证一般对换情形.

设排列为 $a_1\cdots a_sAb_1\cdots b_tBc_1\cdots c_m$，先对 A 作 t 次相邻对换，变为 $a_1\cdots a_sb_1\cdots b_tABc_1\cdots c_m$，再对 B 作 $t+1$ 次相邻对换，变为 $a_1\cdots a_sBb_1\cdots b_tAc_1\cdots c_m$. 可以看出，对换 A 与 B 相当于作 $2t+1$ 次相邻对换，因为一次相邻对换改变奇偶性，而 $2t+1$ 为奇数，所以排列改变奇偶性.

由定理 1，奇排列变成偶排列对换次数为奇数，偶排列变成偶排列对换次数为偶数，而标准排列为偶排列，由此可得

推论 1-1　排列变为标准排列的对换次数与该排列的逆序数奇偶性相同.

推论 1-2　标准排列变为某个新排列的对换次数与新排列的逆序数奇偶性相同.

下面给出行列式定义的另一种表示法.

先讨论，对于行列式的任一项

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}, \tag{1-8}$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 设式（1-8）中因子对换 t 次，可使列标排列由 $p_1p_2\cdots p_n$ 变为标准排列 $12\cdots n$，由推论 1 可知，t 与 τ 的奇偶性相同. 此时行标排列也会相应地由标准排列 $12\cdots n$ 经过 t 次对换变为某个新排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 λ. 根据推论 2，λ 与 μ 奇偶性相同，所以 λ 与 τ 的奇偶性相同，因此

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\lambda}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

如果 $p_i=j$，根据 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$，可得 $q_j=i$，这说明当 p_i 一定时，q_j 也一定，因此排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 唯一确定排列 $q_1q_2\cdots q_n$. 因此 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 唯一确定 $(-1)^{\lambda}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$.

定理 1-2　n 阶行列式也可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中，τ 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证明　根据第一节中行列式的定义

$$D=\sum\ (-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

设

$$D_1=\sum(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

由上面讨论可知，D 中任一项$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，总有且仅有 D_1 中的某一项$(-1)^{\lambda}a_{q_1 1}a_{q_2 2}\cdots a_{q_n n}$与之对应并相等；反之，$D_1$ 中任一项$(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}$，也总有且仅有 D 中某一项$(-1)^{\lambda}a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n}$与之对应并相等，于是 D 与 D_1 中的项可以一一对应并相等，从而 $D=D_1$.

二、行列式的性质

定义 1-6 将行列式 D 的行变为列，得到一个新行列式 D^{T}，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1-1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 设 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$，则 $b_{ij}=a_{ji}$，根据行列式的定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 逆序数，由定理 2，

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

所以 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质表明，行列式中行与列地位相同，凡是对行成立的性质对列也同样成立，反之亦然.

性质 1-2 对换行列式的两行（列），行列式变号.

证明 设 $D=\det(a_{ij})$，交换 i，j 两行后得到行列式 D_1，记 $D_1=\det(b_{ij})$，则当 $k\neq i$，j 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$，j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$，根据行列式的定义

$$\begin{aligned} D_1 &=\sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \end{aligned}.$$

这里 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，τ 为排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数，设排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots n$ 的逆序数为 λ，由定理 1 可知，$(-1)^{\tau}=-(-1)^{\lambda}$，因此

$$D_1=-\sum(-1)^{\lambda}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.$$

行列式的第 i 行记为 r_i，行列式的第 i 列记为 c_i. 交换 i，j 两行记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1-3 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式等于零.

证明 交换相同的这两行，有 $D=-D$，则 $D=0$.

性质 1-3 行列式的某一行（列）中的所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行（或列）乘以 k，记为 $r_i\times k$（或 $c_i\times k$）.

推论 1-4 行列式中的某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式记号的外面.

第 i 行（或列）提出公因子 k，记为 $r_i\div k$（或 $c_i\div k$）.

性质 1-4 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零.

性质 1-5 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和，如第 i 列元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

上式右端两个行列式的区别在第 i 列，除第 i 列外，两个行列式的其他各列元素都与左端原来行列式的对应列相同.

一般地，若 n 阶行列式的每个元素都是两数之和，则它可写成 2^n 个行列式的和. 例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

性质 1-6 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数，然后加到另一列（行）对应的元素上，行列式不变.

以数 k 乘第 j 列（或行）加到第 i 列（或行）上，记为 c_i+kc_j（或 r_i+kr_j），如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & & a_{nn} \end{vmatrix}(i\neq j).$$

性质 1-3～性质 1-6 的证明留给读者自己完成.

由例 1-5 结合本节性质，能够算得下三角行列式、次上（下）三角行列式的值（留作习题）.

性质 1-2，1-3，1-6 介绍了行列式关于行和关于列的三种运算，即 $r_i\leftrightarrow r_j$，$r_i\times k$，r_i+kr_j 和 $c_i\leftrightarrow c_j$，$c_i\times k$，c_i+kc_j，利用这些运算可以简化行列式的计算，特别是利用性质 1-6可以把行列式中许多元素化为 0. 用归纳法不难证明（这里不证）：任何 n 阶行列式总能利用运算 r_i+kr_j 化为上（下）三角行列式，或利用运算 c_i+kc_j 化为上（下）三角行列式. 这样便可以较易地算得行列式的值.

例 1-6 计算

$$D=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -7 & -3 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2}-\begin{vmatrix}1&5&2&-2\\-1&-3&3&-2\\0&1&1&-1\\-3&-7&-2&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+3r_1]{r_2+r_1}-\begin{vmatrix}1&5&2&-2\\0&2&5&-4\\0&1&1&-1\\0&8&4&-3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&5&2&-2\\0&1&1&-1\\0&2&5&-4\\0&8&4&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-8r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&5&2&-2\\0&1&1&-1\\0&0&3&-2\\0&0&-4&5\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+\frac{4}{3}r_3}\begin{vmatrix}1&5&2&-2\\0&1&1&-1\\0&0&3&-2\\0&0&0&7/3\end{vmatrix}=7.$$

说明：在上述解法中，先做运算 $c_1\leftrightarrow c_2$ 的目的是将 a_{11} 换成 1，从而利用运算 $r_i-a_{i1}r_1$ 即可把 a_{i1}（$i=2$，3，4）变为 0，若不先做运算 $c_1\leftrightarrow c_2$，此时 $a_{11}=5$，需做运算 $r_i-\frac{a_{i1}}{5}r_1$ 才可把 a_{i1} 化为 0，这样计算时就比较麻烦.

注意：第二步把 r_2+r_1 和 r_4+3r_1 写在一起，这是两次运算，并把第一次运算结果的书写省略了，这时要注意各个运算是有次序的，一般不能颠倒，例如

$$\begin{vmatrix}5&4\\1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}6&7\\1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}4&1\\-5&-4\end{vmatrix},$$

上式中前一次运算 r_1+r_2 改变了 r_1，而后一次运算 r_2-r_1 又用到了 r_1，此时就要用新的 r_1，再如

$$\begin{vmatrix}5&4\\1&3\end{vmatrix}\xlongequal{r_2-r_1}\begin{vmatrix}5&4\\-4&-1\end{vmatrix}\xlongequal{r_1+r_2}\begin{vmatrix}1&3\\-4&-1\end{vmatrix},$$

可见当两次运算次序不同时所得结果不同. 忽视后一次运算是作用在前一次运算的结果上，就会出错，如

$$\begin{vmatrix}5&4\\1&3\end{vmatrix}\xlongequal[r_2-r_1]{r_1+r_2}\begin{vmatrix}6&7\\-4&-1\end{vmatrix},$$

这样运算是错误的，出错的原因就是第二次运算找错了对象.

此外，还应注意 r_i+r_j 与 r_j+r_i 是不同的，r_i+kr_j 不能写作 kr_j+r_i（不能套用加法交换律）.

例 1-7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix},\quad 其中\ a+3b\neq 0.$$

解

$$D\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix}a+3b&a+3b&a+3b&a+3b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}\xlongequal{r\div(a+3b)}(a+3b)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}$$

$$\frac{\substack{r_2-br_1\\ r_3-br_1\\ r_4-br_1}}{}(a+3b)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&a-b&0&0\\0&0&a-b&0\\0&0&0&a-b\end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3.$$

说明：注意到所求行列式各列 4 个数之和都是 $a+3b$，所以将 2、3、4 行同时加到第 1 行，提出公因子 $a+3b$，然后各行减去第一行的 b 倍，得到一个上三角行列式，即可求得结果.

例 1-8 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&3&6&10\\1&4&10&20\end{vmatrix}.$$

解 从第 4 行开始，后行减前行，

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&1&3&6\\0&1&4&10\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&1&4\end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$$

例 1-9 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{k1}&\cdots&a_{kk}&0&\cdots&0\\ c_{11}&\cdots&c_{1k}&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ c_{n1}&\cdots&c_{nk}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1k}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{k1}&\cdots&a_{kk}\end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

证明：$D=D_1D_2$.

证明 利用行运算 $r_i+\lambda r_j$，可将 D_1 化为下三角行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}p_{11}&&0\\ \vdots&\ddots&\\ p_{k1}&\cdots&p_{kk}\end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk},$$

利用列运算 $c_i+\lambda c_j$，可将 D_2 化为下三角行列式

$$D_2=\begin{vmatrix}q_{11}&&0\\ \vdots&\ddots&\\ q_{n1}&\cdots&q_{nn}\end{vmatrix}=q_{11}\cdots q_{nn},$$

于是，先对 D 的前 k 行作上述行运算 $r_i+\lambda r_j$，再对 D 的后 n 列作上述列运算 $c_i+\lambda c_j$，此时 D 化为下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix},$$

因此 $D=p_{11}\cdots p_{kk}\cdot q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2$.

第三节 行列式按行（列）展开

在行列式的计算中，阶数较低的行列式显然比阶数高的行列式计算起来简单，例 9 中，一个高阶数的行列式可以用两个低阶数行列式表示，从而能够简化计算. 如果对于任意的行列式都能用阶数较低的行列式表示，就能起到简化计算的作用，本节将讨论通过降低行列式的阶数计算行列式的方法.

一、行列式按行（列）展开法则

定义 1-7 在 n 阶行列式中，把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后，余下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；把$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}.

由定义可知，代数余子式 A_{ij} 与元素 a_{ij} 无关.

例如：四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

元素 a_{23} 代数余子式为

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$$

引理 1-1 如果在一个 n 阶行列式 D 中，第 i 行元素除 a_{ij} 外其余都为零，那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积，即

$$D=a_{ij}A_{ij}$$

证明 先证 a_{ij} 位于第一行第一列的情形，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

由例 1-9 可知，