数学分析讲义

（下册）

主　编　龚循华
副主编　董秋仙

科学出版社

数学分析讲义

（下册）

主　编　　龚循华
副主编　　董秋仙

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本教材分上、下两册，本书为下册. 内容包括数项级数、函数项级数与函数列、幂级数、傅里叶级数、多元函数的极限与连续、多元函数微分学、隐函数、含参变量的积分、重积分、曲线积分、曲面积分. 本书在章节安排上，由浅入深，逐步展开，编排合理；注重对基础知识的讲述与基本能力的训练；结合微积分的发展史与几何意义引进相关的概念与定理，具有启发性；注重新概念、新定理以及精彩定理证明的评注；证明详细，难点处理透彻，例题丰富，便于教学和读者自学.

本书可作为综合性大学与师范院校数学系各专业的教材，也可作为理工科院校数学要求较高专业的自学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析讲义(下册)/龚循华主编. —北京：科学出版社，2016.8
ISBN 978-7-03-049427-6
Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①龚… Ⅲ. ①数学分析—高等学校—教材 Ⅳ. ①O17
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016) 第 167642 号

责任编辑：胡海霞 陈曰德／责任校对：彭 涛
责任印制：张 伟／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2016 年 8 月第一次印刷 印张：29 1/2
字数：594 000

定价：63.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前 言

数学分析是数学系本科生最重要的一门课程, 是几乎所有后续数学课程的必备基础, 数学分析的思想、理论与方法还将直接影响到学生毕业后的科学研究与应用.

我们吸取了南昌大学数学系老教师处理数学分析教材的经验与一些教材的优点, 结合自己 30 多年讲授数学分析课程的心得以及从事数学研究的体会, 在原有数学分析讲稿的基础上编写了本教材.

为使读者更好地接受数学分析的理论与方法, 我们本着由浅入深、逐步展开的思想来编写. 本教材一开始简要介绍数学分析这门课程形成的历史, 初步引出描述性的极限概念, 强调极限概念将贯穿于数学分析始终, 突出极限概念的重要性. 为使极限概念变得容易接受, 我们将极限的描述性定义逐步过渡到严谨定义, 让读者逐步理解极限的概念. 本教材把实数系的完备性理论的几个定理分散处理, 先把其中几个定理逐个应用于极限与连续函数的整体性质的证明, 然后在稍后的章节集中阐述实数系的完备性定理之间的等价性及其应用, 分散了难点.

反证法是数学中的重要方法, 涉及对命题的正确否定. 本教材添加了用肯定的语气否定命题这一节内容, 用一层一层剥笋似的办法对命题进行否定, 这对读者正确地否定命题有帮助.

提出一个命题, 要么证明它是正确的, 要么举出一个反例说明它是错误的. 在数学发展历史上, 一些精彩的反例同样推动了数学的发展. 本教材对举反例给予了重视.

本教材结合微积分的发展历史引入一些相关定义与定理, 适当简要介绍数学大师的相关贡献, 表述数学当时的发展情况, 有助于提高读者的学习与钻研兴趣; 另外结合几何意义较自然地引进相关的概念与定理, 具有启发性, 也让读者看到, 可通过几何意义发现概念、发现定理、发现定理的证明方法.

本教材的书名为数学分析讲义, 作为讲义, 本教材注重对概念、方法、定理的评注, 对精彩定理的证明进行品析, 有助于读者理解新概念、吸收运用重要证明方法. 极限理论、实数理论、一致连续、非一致连续、一致收敛、非一致收敛、定积分的可积准则、隐函数存在性定理及其应用都是数学分析中的难点. 本教材对定理的证明详细, 对普遍公认的难点都作了深入浅出的处理, 点出了处理这些难点的关键所在, 便于教师教学和读者自学. 利用前苏联数学家辛钦在数学分析简明教程中证明二重积分换元法的粗略的证明框架, 我们给出了二重积分换元法的详细证明.

学习的目的不仅是为了掌握新概念、新理论、新方法, 还应像数学先辈们那样

不断地创造出新的数学理论, 并把数学用来解决各种实际问题, 这就需要培养能提出问题、解决问题的能力. 要培养解决问题的能力, 没有捷径, 需要做大量的习题, 要认真严谨地做题, 要勇于做难题. 编者的前辈王仁藻先生曾说过, "学数学的人必须具备两个品格: 一是严谨, 二是不怕烦", 傅万涛先生也曾说过 "只要长时间思考一个问题, 就会有突破". 编者能完成本教材的编写, 得益于他们的教导.

本教材主要由龚循华执笔编写, 其中, 董秋仙编写了上册的第 1, 5, 9 章, 并主要编写了下册的习题部分. 南昌大学数学系的余国松、王三华、刘凯、朱咏前、邱天珍、宋军老师打印了上册部分书稿, 南昌航空大学科技学院的孟旭东老师、华侨大学数学科学学院的陈斌老师、硕士研究生韩瑜、刘芳、以及南昌大学数学系本科 2012 级数学与应用数学专业的部分学生参加打印下册部分书稿, 在此向他们表示衷心感谢. 科学出版社的编辑胡海霞、陈曰德对本教材的出版付出了辛勤的劳动, 在此表示衷心感谢. 本教材的出版得到南昌大学教务处和管理科学与工程重点学科的经费资助, 在此一并表示衷心感谢.

由于编者水平、经验有限, 书中的错误和不足在所难免, 恳请读者提出宝贵意见.

编　者

2014 年 12 月于南昌大学

目　　录

第12章　数项级数

在这一章中, 我们将用极限的思想研究无限个数的和, 先给出级数收敛与发散以及级数和的概念, 进而研究收敛级数的性质. 级数的清晰概念是在 19 世纪初, 随着极限概念一起形成的, 并且逐渐成为数学分析的重要组成部分.

12.1　级数的收敛性

12.1.1　级数收敛与发散的概念

若有有限个数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$, 我们把它们依次相加起来, 就得到有限个数的和 $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. 有限个数的和的概念已不能完全适应自然科学、工程技术以及数学本身的发展需要, 需要把有限个数的和的概念推广到无限个数的和.

设有一数列 $\{u_n\}$, 即

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots, \tag{12.1.1}$$

将数列 (12.1.1) 的各项依次相加起来, 即

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad 或 \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{12.1.2}$$

称式 (12.1.2) 为**数项级数**, 简称为**级数**, 其中 u_n 称为级数 (12.1.2) 的**第**n**项**或**通项**.

从级数的定义来看, 级数是形式上把式 (12.1.1) 中的各项依次无限相加起来, 它是不是具有 “和” 呢? 这个 “和” 的确切意义又是什么呢? 人们总是用有限去把握无限, 可先从式 (12.1.1) 的前 n 项的和着手. $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 令

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \quad 或 \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{12.1.3}$$

S_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和, 是一个确定的数. 由 $n \in \mathbf{N}_+$ 的任意性以及式 (12.1.3), 可以得到一个与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 相关的数列 $\{S_n\}$, 数列 $\{S_n\}$ 称为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**部分和数列**.

定义 12.1.1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛, 设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = S,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, S 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**, 记为

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**.

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S, 把 $S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 记为 r_n, 称 r_n 是收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项**余和**.

注: (1) 级数收敛或级数和的概念是借助有限个数的和与极限这两个概念得到的, 体现在 $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 在求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和时, 涉及有限和运算与极限运算.

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与发散是借助于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛与发散来定义的. 研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与发散问题, 实质上就是研究部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛问题, 这就使得我们可以利用熟知的数列的理论来研究级数.

下面我们利用定义 12.1.1 来判断一些级数的敛散性.

例 1 讨论几何级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

的敛散性, 其中 $a \neq 0$, r 是公比.

解 1) 当 $|r| \neq 1$ 时, 已知几何级数的前 n 项和

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

当 $|r|<1$ 时, 有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}.$$

由定义 12.1.1 知, 当 $|r|<1$ 时, 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

当 $|r|>1$ 时,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \infty,$$

由定义 12.1.1, 当 $|r|>1$ 时, 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 发散.

2) 当 $|r|=1$ 时, 有两种情形:

(1) $r=1$. 几何级数是

$$a+a+a+\cdots+a+\cdots.$$
$$S_n = na.$$

由 $a\neq 0$, 显然 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, 于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 发散.

(2) $r=-1$. 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 是

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots.$$

显然 $\{S_n\}$ 发散. 由定义知当 $|r|=1$ 时, 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 发散.

综上所述, 几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 在 $|r|<1$ 时收敛, 其和是 $\frac{a}{1-r}$; 在 $|r|\geqslant 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 发散.

由例 1, 可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = 1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例 2　证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\cdots+\frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}+\cdots$$

收敛, 并求其和.

证明 用拆项法. 由 $u_n = \dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{4n-3} - \dfrac{1}{4n+1}\right)$, 级数的前 n 项和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 9} + \frac{1}{9\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right). \end{aligned}$$

因此可得

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4}.$$

于是, 级数收敛, 其和是 $\dfrac{1}{4}$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)} = \frac{1}{4}.$$

例 3 证明调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

发散.

证明 设调和级数的前 n 项和为 S_n, 即

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

已知数列 $\{S_n\}$ 发散, 从而调和级数发散.

从级数的定义来看, 是先有一个数列 $\{u_n\}$, 再对数列的各项依次相加, 得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. 当 $u_m \neq u_n$ 时, 若互换 u_m 与 u_n 的位置, 则得到的是一个新的数列. 对这个新的数列的各项依次相加得到的是另一个级数.

12.1.2 收敛级数的性质

从定义出发来判别级数的收敛, 通常会遇到级数的前 n 项和 S_n 不易求. 即使 S_n 可求得, 而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 也不易求, 就需要寻找别的判别法.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛与它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的收敛是等价的. 已知数列 $\{S_n\}$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

设 S_n 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和, 则有

$$S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}.$$

于是有下面级数的柯西收敛准则.

定理 12.1.1 (柯西收敛准则)　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

从定理 12.1.1 容易得到下面两个推论:

推论 1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

推论 2　若去掉、增添或改变级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的有限项, 则改变后的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 同为收敛或同为发散.

推论 1 是非常有用的, 它是一个粗筛子, 把那些一般项不趋于 0 的发散级数筛去.

例如: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在, 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 发散.

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1 \neq 0$, 知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-1}{n}$ 发散.

但这只是必要条件, 不能从 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 去断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 例如级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$.

例 4　利用柯西收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证明　设 $u_n = \dfrac{1}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}_+$. $\forall n, p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.
\end{aligned} \tag{12.1.4}$$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, $\forall n > N$, $\forall p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

由柯西收敛准则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

定理 12.1.2　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 也收敛, 其和是 cS, 其中 c 是常数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n = c\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 的前 n 项和分别是 S_n 与 A_n, 有

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} cu_k = c\sum_{k=1}^{n} u_k = cS_n.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 有

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = cS,$$

因此, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 收敛, 其和是 cS.

定理 12.1.2 表明收敛级数满足数的分配律.

注　当 $c \neq 0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cu_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有相同的敛散性.

由数列极限的性质与级数和的定义, 可得到下面的定理.

定理 12.1.3　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 其和分别是 A 与 B, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ 也收敛, 其和分别是 $A+B$ 与 $A-B$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

注　由定理 12.1.3 可知, 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n - v_n)$ 发散.

下面我们将会看到, 收敛级数可像有限个数的和那样满足结合律.

定理 12.1.4　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 其和是 S, 则不改变级数每项的位置, 按原有的顺序将其某些项结合在一起, 构成的新级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots \tag{12.1.5}$$

也收敛, 其和也是 S.

证法　建立级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列与新级数 (12.1.5) 的部分和数列的联系.

证明　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和是 S_n. 新级数 (12.1.5) 的前 k 项和是 A_k, 则有

$$\begin{aligned} A_k &= (u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) \\ &= u_1 + \cdots + u_{n_k} = S_{n_k}, \end{aligned}$$

即新级数 (12.1.5) 的部分和数列 $\{A_k\}$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 的子数列. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} = S$. 于是新级数 (12.1.5) 也收敛, 且其和也是 S.

定理 12.1.4 说明在收敛级数中可以任意添加括号, 添括号后得到的新的级数仍然收敛且其和不变.

推论 若把级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的项不改变顺序添加括号后得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

注 一个级数经过添加括号后构成新的级数收敛, 不能断定去掉括号之后的级数也收敛. 例如, 级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

是收敛的, 但级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

发散的.

一般情况下不能企图通过添加括号后的级数收敛去判断原来级数也收敛.

定理 12.1.5 设在级数

$$(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k})+\cdots \tag{12.1.6}$$

中, 同一括号中的项都有相同的符号. 若级数 (12.1.6) 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 而且二者有相同的和.

证法 建立级数 (12.1.6) 的部分和数列与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列的联系.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项和是 S_n. 级数 (12.1.6) 的前 k 项和是 A_k, 则有

$$\begin{aligned}
&A_k=(u_1+\cdots+u_{n_1})+(u_{n_1+1}+\cdots+u_{n_2})+\cdots+(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}),\\
&S_{n_k}=A_k,\quad S_{n_{k+1}}=A_{k+1}.
\end{aligned}$$

由级数 (12.1.6) 收敛, 设收敛到 A, 则 $\lim\limits_{k\to\infty} A_k=A$, 于是 $\forall\varepsilon>0, \exists k_0\in\mathbf{N}_+, \forall k\geqslant k_0$, 有

$$|A_k-A|<\varepsilon,\quad |A_{k+1}-A_k|<\varepsilon. \tag{12.1.7}$$

由级数 (12.1.6) 同一括号中的项都有相同的符号, 知

$$|A_{k+1}-A_k|=\left|u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}}\right|=\left|u_{n_k+1}\right|+\cdots+\left|u_{n_{k+1}}\right|<\varepsilon. \tag{12.1.8}$$

取 $N = n_{k_0}, \forall n > N, \exists k \geqslant k_0$, 使 $n_k < n \leqslant n_{k+1}$. 则 S_n 为 $u_1 + u_2 + \cdots + u_{n_k} = A_k$ 再加上 $u_{n_k+1}, \cdots, u_{n_{k+1}}$ 中的若干项, 于是由式 (12.1.7) 与式 (12.1.8), 有

$$|S_n - A| \leqslant |S_n - A_k| + |A_k - A| \leqslant |u_{n_k+1}| + \cdots + \left|u_{n_{k+1}}\right| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

因此,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = A,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛, 且和为 A.

习　题　12.1

1. 求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^{3n}}{9^n}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geqslant 0)$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛, 反之是否成立?

3. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 发散.

4. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n, n = 1, 2, \cdots$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

5. 证明: 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k-1}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{2k}$ 都收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

6. 证明: 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_{2k-1} + a_{2k})$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

7. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geqslant 0)$ 收敛且数列 $\{a_n\}$ 递减, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$.

8. 证明: 若数列 $\{n a_n\}$ 收敛, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

9. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且数列 $\{a_n\}$ 递减趋于 0, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛.

10. 利用柯西收敛准则证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

12.2 正项级数

设 $\{S_n\}$ 是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列. 若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有 $u_n \geqslant 0$, 或 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有 $u_n \leqslant 0$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的通项保持同号, 由 $S_{n+1} = S_n + u_{n+1}$, 则 $\{S_n\}$ 就是单调增加或单调减少数列, 判断 $\{S_n\}$ 是否收敛, 由单调有界定理, 只要判断 $\{S_n\}$ 是否有界.

同号级数是指级数

$$u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

的每一项 u_n 的符号都是非负或都是非正的. 若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有 $u_n \geqslant 0$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**正项级数**; 若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$, 有 $u_n \leqslant 0$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是**负项级数**. 正项级数与负项级数统称为**同号级数**. 由定理 12.1.2 的注, 我们只需讨论正项级数的敛散性.

正项级数在数项级数中是简单的一种, 判别它的收敛性的方法也较多.

由单调有界定理, 我们可得下面的定理.

定理 12.2.1 　正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是: 它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界.

例 1 　证明正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

收敛.

证明 　$\forall n \in \mathbf{N}_+$, 由

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 2} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

可知 $\forall n \geqslant 2$, 有

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} \leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-2}} < 3,$$