北大燕园

李正元·范培华考研数学

2017

数学预测试卷

（全真模拟经典400题）精编

数学一

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2017年李正元·范培华考研数学

数学

预测试卷

（全真模拟经典400题）精编

数学一

参考答案及详解

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

2016·北京

图书在版编目（CIP）数据

2017年李正元·范培华考研数学数学预测试卷. 数学一/李正元，尤承业，范培华主编. —北京：中国政法大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5620-6937-9

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②尤… ③范… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第185648号

出版者　中国政法大学出版社
地　址　北京市海淀区西土城路25号
邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088
网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）
电　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)
承　印　保定市中画美凯印刷有限公司
开　本　787mm×1092mm　1/16
印　张　8.75
字　数　130千字
版　次　2016年8月第1版
印　次　2016年8月第1次印刷
定　价　25.80元

预测试卷　卷(一)　答案及详解

一、选择题: 1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 【答案】 B.

【分析】 这是已知导数求某数列的极限. 若已知 $f'(b) = a$,可求得数列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(b+x_n)-f(b)}{x_n} = f'(b)$$

只要其中数列 x_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

为了用条件 $f'(1) = a$,将所求极限 I 改写成求导数的形式.

$$I = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left[f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)\right]-\left[f\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-f(1)\right]}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} - \lim_{n\to+\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-f(1)}{\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

其中
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0,$$

因此 $I = f'(1)\cdot 1 - f'(1)\cdot 0 = a$　因此选(B).

> **评注**　① 若假设 $f(x)$ 在 $x=1$ 邻域内可导且 $f'(x)$ 在 $x=1$ 连续,我们可把该 $\frac{0}{0}$ 型数列极限转化为函数极限,然后用洛必达法则.
>
> $$I = \lim_{x\to 0+}\frac{f(1+x)-f(1+x^2)}{x+x^2}\quad\left(将\frac{1}{n}改为 x\right)$$
>
> $$\overset{\frac{0}{0}}{=\!=}\lim_{x\to 0+}\frac{f'(1+x)-f'(1+x^2)\cdot 2x}{1+2x}$$
>
> $$= \frac{f'(1)-0}{1+0} = f'(1) = a$$
>
> 作为填空题或选择题,只看最后结果,我们仍可得正确答案. 若是解答题,这种解法是错误的,因为题中只假定 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导,因条件不够,不能用上述解法.
>
> ② 该题的一个变式是:

设$f(x,y)$在$(1,1)$可偏导,$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=a,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=b$,则数列极限

$I=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left[f\left(1+\frac{1}{n^2},1\right)-f\left(1,1-\frac{2}{n^2}\right)\right]=$______.

解 为了利用偏导数,改写为

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[f\left(1+\frac{1}{n^2},1\right)-f(1,1)\right]-\left[f\left(1,1-\frac{2}{n^2}\right)-f(1,1)\right]}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1+\frac{1}{n^2},1\right)-f(1,1)}{\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(1,1-\frac{2}{n^2}\right)-f(1,1)}{-\frac{2}{n^2}}\cdot 2$$

$$=a+2b.$$

---

(2) **【答案】** D.

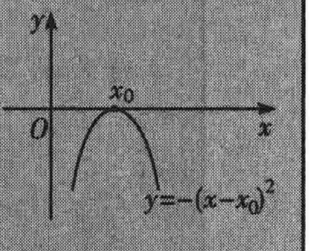
【分析】 $f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 由极限的不等式性质$\Rightarrow\exists\delta>0$,当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$且$x\neq x_0$时,$\frac{f'(x)}{x-x_0}<0\Rightarrow$当$x\in(x_0-\delta,x_0)$时,$f'(x)>0$;当$x\in(x_0,x_0+\delta)$时,$f'(x)<0$. 又$f(x)$在$x=x_0$连续$\Rightarrow f(x)$在$(x_0-\delta,x_0]$单调增加,在$[x_0,x_0+\delta)$单调减少. 故应选(D).

评注 ① 若$\exists x_0$的某邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$使得$f(x)>f(x_0)$ $(x\in(x_0-\delta,x_0))$,且$f(x)<f(x_0)$ $(x\in(x_0,x_0+\delta))$,则称$f(x)$在x_0是下降的. 由$f'(x_0)<0\Rightarrow f(x)$在$x_0$是下降的. 由此结论知,$f''(x_0)<0\Rightarrow f'(x)$在$x_0$下降,再由$f'(x_0)=0$,于是有结论(D).

② 若用特殊选取法,取$f(x)=-(x-x_0)^2$,满足题中条件:$f'(x_0)=-2(x-x_0)\big|_{x=x_0}=0,f''(x_0)=-2<0$. $y=f(x)$如右图. 此时(A),(C)均不正确,但对此$f(x)$,(B)、(D)均对.

若(B)正确,由于$f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$一阶可导,由$f(x)$的凸性$\Rightarrow f'(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)\searrow\Rightarrow$

$$f'(x)=\begin{cases}>0, & x\in(x_0-\delta,x_0)\\ =0, & x=x_0\\ <0, & x\in(x_0,x_0+\delta)\end{cases}$$



$\Rightarrow f(x)$在$(x_0-\delta,x_0]\nearrow$,在$[x_0,x_0+\delta)\searrow\Rightarrow$(D)正确.

由四选一原则,此时(B)一定不正确. 因此我们选(D).

③ 若$f''(x_0)<0$,又$f''(x)$在$x=x_0$连续$\Rightarrow\exists\delta>0$,$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时,$f''(x)<0\Rightarrow f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$是凸的. 但若$f''(x_0)<0$,又$f''(x)$在$x_0$不连续$\nRightarrow\exists\delta>0$,当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时,$f(x)$是凸的.

④ 本题是利用$f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$(其中$f'(x_0)=0$)及极限的不等式性质得结论. 按照这一思路,本题可有如下变式:

设 $\delta > 0$，$f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 有连续的三阶导数，$f'(0) = f''(0) = 0$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)}{|x|} = 2$，则下列结论正确的是

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(0, f(0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0, f(0))$ 也不是 $y = f(x)$ 的拐点.

分析 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'''(x)}{|x|} = 2 \Rightarrow \exists\delta_0 > 0$，当 $0 < |x| < \delta_0$ 时，

$$\frac{f'''(x)}{|x|} > 0, \text{即} f'''(x) > 0$$

$$\Rightarrow f''(x) \text{ 在} (-\delta_0,\delta_0) \text{ 单调上升} \Rightarrow f''(x)\begin{cases} < 0, & -\delta_0 < x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ > 0, & 0 < x < \delta_0, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(0, f(0))$ 是 $y = f(x)$ 的拐点. 故应选(C).

对这类选择题也可用特殊取法. 取 $f(x)$ 满足 $f'''(x) = 2|x|$，为此只需

$$f''(x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ -x^2, & x \leqslant 0, \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \geqslant 0, \\ -\frac{1}{3}x^3, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

于是取 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{12}x^4, & x \geqslant 0, \\ -\frac{1}{12}x^4, & x \leqslant 0, \end{cases}$ 满足所有条件，$(0,f(0))$ 是它的拐点，$x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，选(C).

(3) 【答案】 B.

【分析一】 显然有

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1, x \leqslant 0 \\ e^x + b\sin x^2, x \geqslant 0 \end{cases}$$

即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续，先求出

$$f'_-(0) = (x^2 + ax + 1)'\big|_{x=0} = a$$

$$f'_+(0) = (e^x + b\sin x^2)'\big|_{x=0} = (e^x + 2bx\cos x^2)\big|_{x=0} = 1$$

要求 $f'(0)\exists \Leftrightarrow f'_+(0) = f'_-(0)$ 即 $a = 1$. 此时

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leqslant 0 \\ e^x + 2bx\cos x^2, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad f''_-(0) = (2x + 1)'\big|_{x=0} = 2,$$

$$f''_+(0) = (e^x + 2bx\cos x^2)'\big|_{x=0} = (e^x + 2b\cos x^2 - 4bx^2\sin x^2)\big|_{x=0} = 1 + 2b$$

要求 $f''(0)\exists \Leftrightarrow f''_-(0) = f''_+(0)$ 即 $2 = 1 + 2b$，$b = \dfrac{1}{2}$.

因此选(B).

【分析二】 我们考虑分段函数

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x<x_0\\ f_2(x), & x\geqslant x_0\end{cases}$$

其中$f_1(x)$和$f_2(x)$均在$x=x_0$邻域k阶可导,则$f(x)$在分界点$x=x_0$有k阶导数的充要条件是$f_1(x)$和$f_2(x)$有$x=x_0$有相同的k阶泰勒公式:

$f_1(x)=f_2(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^k)(x\to x_0)$

把这一结论用于本题:取$x_0=0$.

$$f_1(x)=1+ax+x^2$$

$$f_2(x)=\mathrm{e}^x+b\sin x^2=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+b(x^2+o(x^2))$$

$$=1+x+\left(b+\frac{1}{2}\right)x^2+o(x^2).$$

因此$f(x)$在$x=0$时二阶可导$\Leftrightarrow$

$$a=1,b+\frac{1}{2}=1\text{ 即 }a=1,b=\frac{1}{2}.$$

选(B).

---

(4) **【答案】** B.

【分析】 由在L上$y+z=0\Rightarrow$

$$I=\int_L(x^2+3y+3z)\,\mathrm{d}s=\int_L x^2\,\mathrm{d}s+3\int_L(y+z)\,\mathrm{d}s=\int_L x^2\,\mathrm{d}s.$$

易写出L的参数方程:

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ y+z=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+2y^2=a^2,\\ z=-y,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=a\cos t,\\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\sin t,(0\leqslant t\leqslant 2\pi),\\ z=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}a\sin t,\end{cases}$$

又 $$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\sqrt{a^2\sin^2t+\frac{1}{2}a^2\cos^2t+\frac{1}{2}a^2\cos^2t}\,\mathrm{d}t=a\,\mathrm{d}t,$$

于是 $$I=\int_0^{2\pi}a^2\cos^2t\cdot a\,\mathrm{d}t=a^3\int_0^{2\pi}\cos^2t\,\mathrm{d}t=\pi a^3.\text{ 选(B)}.$$

评注 本题有如下变式:

① 设L为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+y+z=0,\end{cases}$ $a>0$,则$\int_L xy\,\mathrm{d}s=$______.

若先写出曲线的参数方程,然后再利用曲线积分计算公式较为复杂.

若利用变量的轮换对称性以及L的方程可简化计算

$$I=\int_L xy\,\mathrm{d}s=\int_L yz\,\mathrm{d}s=\int_L zx\,\mathrm{d}s$$

$\Rightarrow$ $$I=\frac{1}{3}\int_L(xy+yz+zx)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{6}\int_L[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)]\,\mathrm{d}s$$

在L上$x+y+z=0,x^2+y^2+z^2=a^2$ $\Rightarrow$

$$I=-\frac{a^2}{6}\int_L\mathrm{d}s$$

L 是以原点为圆心，a 为半径的圆周 $\Rightarrow$

$$I = -\frac{a^2}{6}\cdot 2\pi a = -\frac{1}{3}\pi a^3.$$

② 曲线 $L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ y+z=0 \end{cases}$ 在 $P\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$ 处的切线方程是______.

方法 1° 如同前面已写出 L 的参数方程，点 P 对应 $t=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$ 曲线 L 在 P 点的切向量

$$\tau = \{x'(t),y'(t),z'(t)\}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = \left\{-a\sin t,\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,-\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t\right\}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{a}{2}\{\sqrt{2},-1,1\}$$

于是 L 在 P 点处的切线方程是

$$\frac{x-\frac{a}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = -\left(y-\frac{a}{2}\right) = z+\frac{a}{2}$$

方法 2° 曲线 L 作为两曲面的交线，在 P 点的切向量

$$\tau = \mathrm{grad}(x^2+y^2+z^2-a^2)\times \mathrm{grad}(y+z)\Big|_P$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 2z \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}_P = 2\{y-z,-x,x\}\Big|_P$$

$$= 2\left\{a,-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}}\right\} = \sqrt{2}a\{\sqrt{2},-1,1\}$$

同样得上述切线方程.

---

(5) **【答案】** B.

【分析】 方程组有唯一解的充分必要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩和增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{\beta})$ 的秩相等并且等于未知数的个数 n（也就是 $\boldsymbol{A}$ 的列数.）. 显然(B)正确.

(A) 不对，因为唯一解只能推出 $m \geqslant n$，不必 $m=n$.

(C) 不对，在方程组有解时，$m<n$ 是有无穷多解的充分条件，不是必要条件.

(D) 不对，在方程组有解时，有无穷多解的充分必要条件是 $r(\boldsymbol{A})<n$.

---

(6) **【答案】** D.

【分析】 首先可排除(A)，因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，而(A)矩阵的秩为 1，所以它与 $\boldsymbol{A}$ 不合同.

两个实对称矩阵合同的充分必要条件是它们的特征值的正负性一样（即正，负数的个数对应相等）. 而相似的充分必要条件是它们的特征值相同. 因此应该从计算特征值下手.

求出 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0，-3，3.

显然(C)中矩阵的特征值也是 0，-3，3，因此它和 $\boldsymbol{A}$ 相似，可排除.

剩下(B)(D)两个矩阵中，只要看一个.(D)中矩阵的特征值容易求出，为 0，-1，1，因此它和 $\boldsymbol{A}$ 合同而不相似（也可计算出(B)中矩阵的特征值为 0，1，4，因此它和 $\boldsymbol{A}$ 不合同）.

评注 做好本题的关键是熟悉两个实对称矩阵合同和相似的判别方法.

---

(7) **【答案】** B.

【分析】 设 A 表示"第一次取出是次品",B 表示"在余下的洗衣机中任取两台为正品",则由全概率公式,有

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid \overline{A})=\frac{3}{10}\times\frac{C_7^2}{C_9^2}+\frac{7}{10}\times\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{7}{15}.$$

由贝叶斯公式,可得

$$P(A\mid B)=\frac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}\times\frac{C_7^2}{C_9^2}}{\frac{7}{15}}=\frac{3}{8}.$$

故应选(B).

(8) 【答案】 A.

【分析】 由于 $\overline{X}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ 与 X_{n+1} 三者相互独立,且

$$X_{n+1}-\overline{X}\sim N\left(0,\frac{n+1}{n}\sigma^2\right),\quad \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\sim N(0,1),$$

$$T=\frac{(X_{n+1}-\overline{X})\Big/\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sim t(n-1),$$

故 $k=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, $m=n-1$,所以选(A).

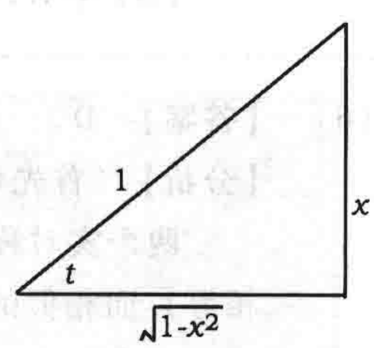
二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 【答案】 $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

【分析一】 按题意,$F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$. 为先求 $f(x)$,将 $\int x^2f(x)\,dx$ 求导得

$$x^2f(x)=\left[\int x^2f(x)\,dx\right]'=(\arcsin x+C)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\Rightarrow\quad F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x\frac{1}{t^2\sqrt{1-t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int_1^x\frac{d\frac{1}{t^2}}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}$$



$$=-\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}\,\Bigg|_1^x=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\quad(x>0).$$

【分析二】 同前,求出 $f(x)=\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$,令 $x=\sin t$,则

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{\cos t}{\sin^2t\cos t}dt=-\cot t+C=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+C.$$

由 $F(1)=0$,定出 $C=0\ \Rightarrow\ F(x)=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

(10) 【答案】 $\dfrac{kMm}{l}\ln\left(1+\dfrac{l}{r_0}\right)$.

【分析】 以 AB 为 x 轴,近端点为原点,x 轴正向指向 C. C 的坐标为 x,则杆对 C 的引力

$$F(x)=\frac{kMm}{x(l+x)}.$$

于是,C 从 r_0 移至无穷远时,引力做的功

$$W=\int_{r_0}^{+\infty}\frac{kMm}{x(l+x)}\mathrm{d}x=\frac{kMm}{l}\int_{r_0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+l}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{kMm}{l}\ln\frac{x}{x+l}\Bigg|_{r_0}^{+\infty}=\frac{kMm}{l}\ln\left(1+\frac{l}{r_0}\right).$$

---

(11) 【答案】 $\dfrac{x}{4}\sin 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

【分析】 $y''+4y=\cos 2x$ 对应的齐次方程的特征方程是 $r^2+4=0$.

它的两个特征根为 $r_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$. 因此对应的齐次方程的通解为 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

$\lambda\pm\omega\mathrm{i}=\pm 2\mathrm{i}$ 是特征方程的根,所以,设非齐次方程的特解为

$$y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

则

$$(y^*)'=x(-2A\sin 2x+2B\cos 2x)+A\cos 2x+B\sin 2x,$$

$$(y^*)''=-x(4A\cos 2x+4B\sin 2x)-4A\sin 2x+4B\cos 2x.$$

将上两式代入方程 $y''+4y=\cos 2x$ 中,得 $-4A\sin 2x+4B\cos 2x=\cos 2x$.

比较上式系数得 $A=0,B=\dfrac{1}{4}$.

故原方程的通解为 $y=\dfrac{x}{4}\sin 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

> **评注** 这是一个二阶常系数线性非齐次方程的求解问题,对于本题考生容易犯的错误是将非齐次方程的特解设为 $y^*=xA\cos 2x$. 注意,形如 $y''+4y=p\cos 2x$, $y''+4y=q\sin 2x$, $y''+4y=p\cos 2x+q\sin 2x$ (其中 p,q 是不等于零的常数),其特解都应设为 $y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

---

(12) 【答案】 $\dfrac{1}{2}x^2y+\dfrac{1}{2}xy^2+ax+c(y)$($a$ 为 $\forall$ 常数,$c(y)$ 为 $\forall$ 二阶连续可导函数)

【分析】 由$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=y$ 得$\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=y$,对 x 积分得$\dfrac{\partial f}{\partial x}=xy+c_1(y)$,再由$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=x+c_1'(y)=x+y$,得 $c_1'(y)=y\Rightarrow c_1(y)=\dfrac{1}{2}y^2+a$($a$ 为 $\forall$ 常数). 于是$\dfrac{\partial f}{\partial x}=xy+\dfrac{1}{2}y^2+a$. 再对 x 积分得

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+ax+c(y)$$

$c(y)$ 为任意二阶连续可导函数.

---

(13) 【答案】 $\dfrac{\sqrt{35}}{35}(1,5,3,0)^{\mathrm{T}},\dfrac{\sqrt{35}}{35}(-3,0,1,5)^{\mathrm{T}}$.

【分析】 先求出 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个基础解系,它就是解空间的一个基. 然后对它进行施密特正交化即可.

$$\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\4&-5&7&1\\2&-7&11&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\0&-9&15&-3\\0&-9&15&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&3&-6&3\\0&3&-5&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&0&-1&2\\0&3&-5&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个同解方程组：

$$\begin{cases}3x_1 \quad\quad - x_3 + 2x_4 = 0,\\ \quad\quad 3x_2 - 5x_3 \quad + x_4 = 0,\end{cases}$$

求得一个基础解系，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,5,3,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,-1,0,3)^{\mathrm{T}}$.

正交化：令 $\boldsymbol{\alpha}_2'=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\alpha_1,\alpha_2)}{(\alpha_1,\alpha_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=(-2,-1,0,3)^{\mathrm{T}}+\dfrac{1}{5}(1,5,3,0)^{\mathrm{T}}=\dfrac{3}{5}(-3,0,1,5)^{\mathrm{T}}$，

单位化：作 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1/\|\boldsymbol{\alpha}_1\|=\dfrac{\sqrt{35}}{35}(1,5,3,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2'/\|\boldsymbol{\alpha}_2'\|=\dfrac{\sqrt{35}}{35}(-3,0,1,5)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个单位正交基础解系，也就是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解空间的一个规范正交基.

评注　本题的解不是唯一的.

---

(14)　**【答案】**

X \ Y	0	1
0	1/4	0
1	1/4	1/2

.

【分析】　依题意，$EX=\dfrac{3}{4}$，$DX=\dfrac{3}{16}$，$EY=\dfrac{1}{2}$，$DY=\dfrac{1}{4}$，

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$E(XY)=\operatorname{cov}(X,Y)+EXEY=\frac{1}{8}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

设 (X,Y) 的联合分布与边缘分布如下表：

X \ Y	0	1	
0	p_{11}	p_{12}	$\frac{1}{4}$
1	p_{21}	p_{22}	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

由于 X,Y 只取 0,1 两个值，所以 $E(XY)=p_{22}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$，即 $p_{22}=\dfrac{1}{2}$.

再由 (X,Y) 的联合分布与边缘分布的关系，可得 $p_{12}=0$，$p_{11}=p_{21}=\dfrac{1}{4}$.

评注　从 X 与 Y 的联合分布可以直接求出边缘分布，但仅从 X,Y 的边缘分布是无法得出 X 与 Y 的联合分布的. 必须再附加一些条件才能求出联合分布，比如 X 与 Y 独立、关于其中一个随机变量的条件分布或者某些有关事件的概率等等. 本题难点是从已知条件设法求出 $E(XY)$，从而根据 X,Y 只取 0 和 1 两个值的特点，求出概率 $P\{X=1,Y=1\}$，即 p_{22}.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)　**【分析与求解】**　先证明 $x=t\ln t$ 单调，必 ∃ 反函数，于是 $y=\dfrac{\ln t}{t}$ 确定 $y=y(x)$，再用参数求导

法求出$\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$,然后确定函数的单调性与凹凸性区间等.

(Ⅰ)因为$x'_t=(t\ln t)'=1+\ln t>0(t\geqslant 1)$,$x\big|_{t=1}=0$,$\lim\limits_{t\to+\infty}x=\lim\limits_{t\to+\infty}t\ln t=+\infty\Rightarrow x=t\ln t$在$[1,+\infty)$单调上升,值域是$[0,+\infty)\Rightarrow x=t\ln t\ \exists$ 反函数,记为$t=t(x)$,它在$[0,+\infty)$连续,$t(x)\geqslant 1$(单调连续函数的反函数连续).再由连续复合函数的连续性$\Rightarrow y=\frac{\ln t(x)}{t(x)}\xlongequal{\text{记}}y(x)$在$[0,+\infty)$连续.即该参数方程确定连续函数$y=y(x)(x\in[0,+\infty))$

(Ⅱ)
$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\frac{1-\ln t}{t^2}}{1+\ln t}=\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}\begin{cases}>0, & 1<t<e\\ =0, & t=e\\ <0, & t>e\end{cases}$$

$t\in[1,e]\Leftrightarrow x\in[0,e]$,$t\in[e,+\infty)\Leftrightarrow x\in[e,+\infty)$

因此$y(x)$的单调增区间为$[0,e]$,单调减区间为$[e,+\infty)$,极大值点$x=e$.

(Ⅲ)
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{1-\ln t}{t^2(1+\ln t)}\right]'\frac{dt}{dx}=\frac{-\frac{1}{t}t^2(1+\ln t)-(1-\ln t)[2t(1+\ln t)+t]}{t^4(1+\ln t)^3}$$
$$=\frac{-t(1+\ln t)-2t(1-\ln^2 t)-t(1-\ln t)}{t^4(1+\ln t)^3}$$
$$=\frac{2(\ln^2 t-2)}{t^3(1+\ln t)^3}\begin{cases}<0, & 1<t<e^{\sqrt{2}}\\ =0, & t=e^{\sqrt{2}}\\ >0, & t>e^{\sqrt{2}}\end{cases}$$

$t\in[1,e^{\sqrt{2}}]\Leftrightarrow x\in[0,\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}]$,$t\in[e^{\sqrt{2}},+\infty)\Leftrightarrow x\in[\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},+\infty)$.

因此$y(x)$的凸区间为$[0,\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}]$,凹区间为$[\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},+\infty)$,拐点为$\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}},\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$.

评注 $x=t\ln t$,$t\to+\infty\Leftrightarrow x\to+\infty$,于是
$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$$
因此$y=y(x)$有渐近线$y=0$.

---

(16) **【分析与求解】** (Ⅰ)令$t=\frac{1-x}{1+x}$,问题转化为求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}t^n$的收敛域.先求收敛区间,再考察收敛区间的端点.求解如下:

令$t=\frac{1-x}{1+x}$,我们考察幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$,其中$a_n=\frac{3^n+(-2)^n}{n}$.由
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}}=3$$
$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$的收敛区间是$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.由于$t=\frac{1}{3}$时
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]\text{发散}\left(\text{因为}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{发散},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\text{收敛}\right),$$
而$t=-\frac{1}{3}$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛,因此,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$的收敛域是

$\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

又 $-\frac{1}{3} \leqslant t = \frac{1-x}{1+x} < \frac{1}{3}$ 对应于 $\frac{1}{2} < x \leqslant 2$,因此,原级数的收敛域是 $\left(\frac{1}{2},2\right]$.

(Ⅱ)为证当 $x \in [0,+\infty)$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^2 e^{-nx}$ 收敛,且和函数 $S(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界,自然的想法是给出级数一般项的估计 $0 \leqslant \sqrt{n}x^2 e^{-nx} \leqslant M_n (x \in [0,+\infty))$,只要 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛就可得出结论.

为了在 $[0,+\infty)$ 上估计 $\sqrt{n}x^2 e^{-nx}$,我们求 $f(x) = x^2 e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值:由

$$f'(x) = e^{-nx}(2x - nx^2) = xe^{-nx}(2-nx)\begin{cases} >0, & 0<x<\frac{2}{n}, \\ =0, & x=\frac{2}{n}, \\ <0, & x>\frac{2}{n}, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ 在 $x = \frac{2}{n}$ 取 $[0,+\infty)$ 上的最大值,即

$$f(x) = x^2 e^{-nx} \leqslant \frac{4}{n^2}e^{-2}, x \in [0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \quad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^2 e^{-nx} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\frac{4}{n^2}e^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4e^{-2}}{n^{3/2}}, x \in [0,+\infty).$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4e^{-2}}{n^{3/2}}$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}x^2 e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 收敛,且 $S(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界.

评注 我们也可以用如下方法估计 x^2e^{-nx}: $x^2e^{-nx} = \frac{(nx)^2e^{-nx}}{n^2}$,注意 z^2e^{-z} 在 $[0,+\infty)$ 上连续,$\lim\limits_{z\to+\infty} z^2e^{-z} = 0 \Rightarrow z^2e^{-z}$ 在 $[0,+\infty)$ 有界 $\Rightarrow 0 \leqslant z^2e^{-z} \leqslant M(z \in [0,+\infty)) \Rightarrow 0 \leqslant x^2e^{-nx} = \frac{(nx)^2e^{-nx}}{n^2} \leqslant \frac{M}{n^2}, x \in [0,+\infty)$,其中 $M>0$ 是某常数.

---

(17) **【分析与求解】** (Ⅰ) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial u} + y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial u} - y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial v} + y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= -y^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}(-y^{-\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot y^{-\frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$+ y^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}(-y^{-\frac{1}{2}}) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}y^{-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$= y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

代入原方程得

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) - y\left(y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + y^{-1}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial u} + y^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

即 $$4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$$

（Ⅱ） 由$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0$得

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $$\frac{\partial z}{\partial u} = h(u)$$

$\Leftrightarrow$ $$z = \varphi(u) + \psi(v)$$

其中 $\varphi(u),\psi(v)$ 为任意二次连续可微函数,于是原方程的解是

$$z = \varphi(x - 2\sqrt{y}) + \psi(x + 2\sqrt{y}).$$

---

(18) **【分析与求解一】** 在$(-\infty, +\infty)$上先分析 $g(x)$ 的单调性区间:

$$g'(x) = e^x + 6a\begin{cases} < 0, x < x^* \\ = 0, x = \ln(-6a) \xlongequal{\text{记}} x^* \\ > 0, x > x^* \end{cases}$$

$\Rightarrow g(x)$ 在$(-\infty, x^*]\searrow$,在$[x^*, +\infty)\nearrow \Rightarrow g(x) > g(x^*)(x \neq x^*)$. 又

$$g(x^*) = e^{\ln(-6a)} + 6a\ln(-6a) = -6a[1 - \ln(-6a)]$$

$$\begin{cases} < 0, 1 - \ln(-6a) < 0, \text{即 } a < -\dfrac{e}{6} \\ = 0, 1 - \ln(-6a) = 0, \text{即 } a = -\dfrac{e}{6} \\ > 0, 1 - \ln(-6a) > 0, \text{即 } a > -\dfrac{e}{6} \end{cases}$$

$\Rightarrow a > -\frac{e}{6}$时,$g(x) \geqslant g(x^*) > 0(x \in (-\infty, +\infty))$,$g(x)$ 无零点. $a = -\frac{e}{6}$时,$g(x) > g(x^*) = 0(x \neq x^*)$,$g(x)$ 有唯一零点(即 $x = x^* = 1$).

当 $a < -\frac{e}{6}$ 时,$g(x^*) < 0$,再考察

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(e^x + 6ax) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(1 + \frac{6ax}{e^x}\right) = +\infty$$

$\Rightarrow g(x)$ 在$(-\infty, x^*)$,$(x^*, +\infty)$各有唯一零点,分别记为 x_1, x_2.

因此结论是：$-\frac{e}{6}<a<0$ 时 $g(x)$ 无零点；$a=-\frac{e}{6}$ 时 $g(x)$ 有唯一零点 $x=1$；

$a<-\frac{e}{6}$ 时 $g(x)$ 仅有两个零点.

【分析与求解二】 显然 $g(0)\neq 0$，于是 $g(x)$ 的零点即是 $h(x)\xlongequal{\text{记}}\frac{e^x}{x}+6a$ 的零点. 下面考察 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 上零点的个数. 只需考察 $h(x)$ 的单调区间，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}h(x)$，$\lim\limits_{x\to 0\pm}h(x)$ 及 $h(x)$ 的极值的正负号.

$$h'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}\begin{cases}<0,-\infty<x<0\\<0,0<x<1\\=0,x=1\\>0,1<x<+\infty\end{cases}$$

(1) $x\in(-\infty,0)$ 时 $h(x)\searrow$，又

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{x}+6a\right)=6a<0$$

$$\lim_{x\to 0-}h(x)=-\infty$$

$\Rightarrow h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 无零点，即 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 无零点.

(2) $x\in(0,+\infty)$ 时 $h(x)$ 在 $(0,1]\searrow$，在 $[1,+\infty)\nearrow\Rightarrow h(x)>h(1)(x>0,x\neq 1)$，又由

$$h(1)=e+6a\begin{cases}<0,a<-\frac{e}{6},\\=0,a=-\frac{e}{6},\\>0,a>\frac{e}{6},\end{cases}$$

$\Rightarrow a>-\frac{e}{6}$ 时 $h(x)\geqslant h(1)>0(x>0)\Rightarrow h(x)$ 即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点. 当 $a=-\frac{e}{6}$ 时 $h(x)>h(1)=0(x>0,x\neq 1)\Rightarrow h(x)$ 即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有唯一零点（即 $x=1$）.

当 $a<-\frac{e}{6}$ 时，$h(1)<0$，又

$$\lim_{x\to 0+}h(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$$

$\Rightarrow h(x)$ 即 $g(x)$ 在 $(0,1)$，$(1,+\infty)$ 各有唯一零点.

评注 本题有如下变式：

（Ⅰ）求函数 $g(x)=e^x+6ax$ 的零点个数，其中 $a>0$ 为参数.

解 $g'(x)=e^x+6a>0(x\in(-\infty,+\infty))\Rightarrow g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)\nearrow$，又 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+6ax)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+6ax)=+\infty$. 因此 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有唯一零点.

（Ⅱ）讨论曲线 $y=f(x)=e^x+ax^3$ 的拐点的个数，其中 $a<0$ 为参数.

解 先求出 $f''(x)=e^x+6ax$，曲线 $y=f(x)$ 的拐点即 $g(x)=e^x+6ax$ 的零点且零点两侧异号. 如同前面所讨论，当 $-\frac{e}{6}<a<0$ 时 $g(x)$ 无零点，当 $a=-\frac{e}{6}$ 时 $g(x)$ 有唯一零点 $(x=x^*)$，但 $g(x)>0,(x\neq x^*)$.

因此 $-\frac{e}{6}\leqslant a<0$ 时 $f(x)$ 无拐点. 如同前面所讨论, 当 $a<-\frac{e}{6}$ 时 $g(x)$ 仅有两个零点, 且每个零点两侧 $g(x)$ 异号. 因此当 $a<-\frac{e}{6}$ 时 $f(x)$ 仅有两个拐点.

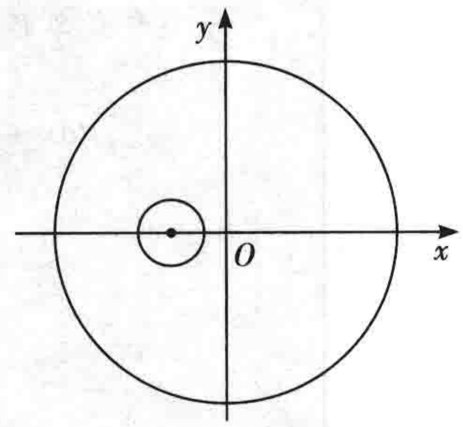
(19) 【分析与求解】

(Ⅰ) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-[(x+1)^2+y^2]-(x+1-y)\cdot 2y}{((x+1)^2+y^2)^2}=\frac{y^2-(x+1)^2-2(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x+1)^2+y^2-(x+1+y)2(x+1)}{((x+1)^2+y^2)^2}=\frac{y^2-(x+1)^2-2(x+1)y}{((x+1)^2+y^2)^2}$$

(Ⅱ) 因为 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}((x,y)\neq(-1,0))$

可考虑用格林公式计算 J. 因为 P,Q 在点 $(-1,0)$ 处没定义, 所以不能在 C 围成的区域 D 上直接用格林公式. 但可在 D 中挖掉以 $(-1,0)$ 为圆心, $\varepsilon>0$ 充分小为半径的圆所余下的区域中用格林公式见右图. 求解如下:



以 $(-1,0)$ 为圆心 $\varepsilon>0$ 充分小为半径作圆周 C_ε^-(取顺时针方向), C_ε 与 C 围成的区域记为 D_ε, 在 D_ε 上用格林公式得

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{C_\varepsilon^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_{D_\varepsilon}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=0$$

$$\Rightarrow\qquad J=\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{C_\varepsilon^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{C_\varepsilon^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \qquad (*)$$

其中 C_ε^+ 取逆时针方向.

用"挖洞法"求得(*)式后, 可用 C_ε 的方程

$$(x+1)^2+y^2=\varepsilon^2$$

简化被积表达式, 然后用格林公式得

$$J=\int_{C_\varepsilon^+}\frac{(x+1-y)\mathrm{d}x+(x+1+y)\mathrm{d}y}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D^*_\varepsilon}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\pi\varepsilon^2=2\pi$$

其中 D_ε^* 是 C_ε^+ 所围的区域.

评注 ① 我们用 C_ε^+ 的参数方程

$$x+1=\varepsilon\cos t,\quad y=\varepsilon\sin t,\quad t\in[0,2\pi]$$

来计算 $$J=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{C_\varepsilon^+}(x+1-y)\mathrm{d}x+(x+1+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}[\varepsilon^2(\cos t-\sin t)(-\sin t)+\varepsilon^2(\cos t+\sin t)\cos t]\mathrm{d}t=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\varepsilon^2\mathrm{d}t=2\pi$$

② 本题有如下变式:

(Ⅲ) 分别讨论在 $y>0$ 与 $x<0$ 且 $(x,y)\neq(-1,0)$ 时积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是否与路径无关.

解 $y>0$ 是单连通区域, 且有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$, 因此 $y>0$ 中积分与路径无关.

区域 D: $x<0,(x,y)\neq(-1,0)$ 不是单连通区域, 此时还需求出某积分 $\int_{C_0}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$, C_0 是环绕 $(-1,0)$ 的某闭曲线. 题(Ⅱ)中已求出

$$\int_{C_\varepsilon^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 2\pi$$

取 C_ε^+ 使得 C_ε^+ 包含在 D 中，因为在 D 中 ∃ 一条闭曲线 $L = C_\varepsilon^+$，使得

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \neq 0$$

$\Rightarrow \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在区域 $D: x < 0, (x,y) \neq (-1,0)$ 内不是与路径无关的.

(Ⅳ) 分别讨论 $y > 0$ 与 $x < 0$ 且 $(x,y) \neq (-1,0)$ 时 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是否 ∃ 原函数，若 ∃ 并求出原函数.

【解】 注意 P,Q 在区域 D 连续时

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \text{ 在 } D \, \exists \text{ 原函数} \Leftrightarrow \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \text{ 在 } D \text{ 与路径无关}.$$

$y > 0$ 是单连通区域，且有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$，因此 $y > 0$ 时 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ ∃ 原函数

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{y\mathrm{d}y}{(x+1)^2+y^2} + \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{(x+1)\mathrm{d}y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}((x+1)^2+y^2)}{(x+1)^2+y^2} + \frac{-\dfrac{y}{y^2}\mathrm{d}x + \dfrac{x+1}{y^2}\mathrm{d}y}{1 + \left(\dfrac{x+1}{y}\right)^2}$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+y^2)\right) - \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{x+1}{y}\right)}{1+\left(\dfrac{x+1}{y}\right)^2}$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\ln((x+1)^2+y^2) - \arctan\frac{x+1}{y}\right)$$

$\Rightarrow$ $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的原函数为

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+y^2) - \arctan\frac{x+1}{y} + C$$

C 为 ∀ 常数.

这里用凑微分法求得 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 的原函数，也可用其他方法如不定积分法或特殊路径积分法求得原函数.

$x < 0$ 且 $(x,y) \neq (-1,0)$ 时，$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 不 ∃ 原函数.

(20) **【解】** ① $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，则 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) < 3$.

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 17 \\ 5 & a & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a-10 & -26 \\ 0 & 6 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2a-6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

得 $a = -3$.

② 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都正交的非零向量即齐次方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + 17x_2 - x_3 + 7x_4 = 0, \end{cases}$$

的非零解，解此方程组：