军队“2110”工程三期建设教材

电磁场与微波技术基础

DIANCICHANG YU WEIBO JISHU JICHU

姜勤波　余志勇　张　辉◎编著

北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

军队"2110"工程三期建设教材

电磁场与微波技术基础

姜勤波　余志勇　张　辉　编著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书内容分四部分。第一部分由第 1 章和第 2 章组成，介绍电磁场理论的数学基础。第二部分由第 3～6 章组成，介绍电磁场理论。第三部分由第 7 章和第 8 章组成，介绍电磁波的产生与传播的规律。第四部分由第 9～11 章组成，介绍微波技术基础。

本书的特点是以数学基础和基本物理概念为起点，把基本理论和基本技术写清楚和讲明白，同时以典型工程应用来设计例题和习题，目的是把读者领进门，为继续学习微波工程、天线设计、电波传播和电磁兼容技术等更侧重工程应用方面的课程打下坚实的理论基础。

本书可作为信息类学科本科生的“电磁场与微波技术”课程的教材，也可作为从事电磁领域相关工作的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与微波技术基础 / 姜勤波，余志勇，张辉编著. -- 北京 ：北京航空航天大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-5124-2140-0

Ⅰ. ① 电… Ⅱ. ①姜… ②余… ③张… Ⅲ. ①电磁场-高等学校-教材②微波技术-高等学校-教材 Ⅳ. ①O441.4②TN015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 117330 号

版权所有，侵权必究。

电磁场与微波技术基础

姜勤波　余志勇　张　辉　编著

责任编辑　王慕冰

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191)　http://www.buaapress.com.cn

发行部电话:(010)82317024　传真:(010)82328026

读者信箱: goodtextbook@126.com　邮购电话:(010)82316936

北京兴华昌盛印刷有限公司印装　各地书店经销

*

开本:787×1 092　1/16　印张:17.5　字数:448 千字

2016 年 7 月第 1 版　2016 年 7 月第 1 次印刷　印数:2 000 册

ISBN 978-7-5124-2140-0　定价:39.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题，请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前　言

“电磁场与微波技术基础”是电子科学与技术和信息工程等专业的一门重要专业基础课程。本书依据中国人民解放军火箭军工程大学电子工程、信息工程和通信工程人才培养方案以及“电磁场与电磁波”、“微波技术与天线”和“电磁场与微波技术”的课程标准编写而成。

本书内容上重在把数学基础、基本理论和基本技术写清楚和讲明白，目的是把学生领进门，提高学习后续课程的自学能力。对于从事微波工程、天线设计、电波传播和电磁兼容的研究者，还需要进一步学习更侧重于工程应用的课程。

本书主要包括四大部分内容。第一部分介绍学习电磁场理论的数学基础，包括第 1 章“矢量代数和坐标系”和第 2 章“矢量微积分”；第二部分介绍电磁场理论，包括第 3 章“静电场”、第 4 章“稳恒电流”、第 5 章“静磁场”以及第 6 章“时变场和 Maxwell 方程”；第三部分介绍电磁波的产生与传播规律，包括第 7 章“平面时谐电磁波”和第 8 章“电磁辐射和天线基础”；第四部分介绍微波技术，包括第 9 章“传输线理论”、第 10 章“同轴线和矩形波导”和第 11 章“网络理论”。

在编写本书的过程中，作者参考了国内外的有关教材或参考书，尤其是 Yoen Ho Lee 著的 *Introduction to Engineering Electromagneitcs*，David M. Pozar 著的 *Microwave Engineering* 和梁昌洪老师著的《简明微波》，在此作者向这些优秀教材的编著者致以崇高的敬意。本书由姜勤波老师主编，张辉老师参与了第 8 章的编写工作，余志勇老师审定了书稿，电磁组的李卉和苗倩老师做了部分校对工作。在本书编写的过程中还得到了火箭军工程大学信息工程系以及电子信息工程教研室的有关领导和同事们的多方鼓励与支持，这里作者向这些同志表示衷心的谢意。此外，还要感谢北京航空航天大学出版社的编辑为本书的出版付出的艰辛劳动。

由于编者水平有限且时间十分仓促，书中难免出现疏漏甚至错误，敬请读者指正，编者十分感谢和欢迎。

编　者

2015 年 12 月 31 日

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 章　矢量代数和坐标系

电磁学是研究自由空间或介质中电现象和磁现象的一门学科，包括研究静电场的静电学、研究静磁场的静磁学以及研究时变电场和磁场的电动力学。电磁场理论由一系列电磁学模型组成，包括：①产生电磁现象的源，如电荷和电流；②描述电磁现象的物理量，如电场强度和磁场强度；③运算规则，如矢量代数和坐标系；④基本的电磁定律，如库仑定律和 Maxwell 方程。本书前两章主要讨论运算规则，包括矢量代数、坐标系和矢量微积分。

电磁学中的基本物理量可用标量和矢量来表示。标量是只有大小的量，如电势和电流等（一般用大写字母来表示，如 V、I）。矢量是具有大小和方向的量，如电场强度、电流密度等（一般用带箭头的大写字母来表示，如$\vec{E}$、$\vec{J}$）。在时谐稳态条件下，电磁物理量都随着时间做简谐变化，这时这些物理量（可以是标量或者矢量）用复数（一般用大写字母上带波浪标记，如$\tilde{V}$）来表示会带来方便。当矢量的分量是复数时，这样的矢量称为复数矢量。一般情况下，电磁物理量都是时间和空间位置的函数；而静电场和静磁场中的量只是空间位置的函数。因此在电磁学中，我们都是处理标量场和矢量场。在静电场和静磁场中处理的是静态标量场（随空间位置变化的标量函数，如用 $V(\vec{r})$ 来表示）和静态矢量场（随空间位置变化的矢量函数，如用$\vec{U}(\vec{r})$来表示）；在时变电磁场中会涉及时变标量场（随空间位置和时间变化的标量函数，如用 $V(\vec{r},t)$ 来表示）和时变矢量场（随空间位置和时间变化的矢量场，如用$\vec{U}(\vec{r},t)$来表示）。在讨论时谐电磁场时还常用相量表示随空间位置变化的复数矢量。为了更加简洁、抽象地研究各种场，还引入位置矢量（一般用 $\vec{r}$ 来表示）和距离矢量（一般用 $\vec{R}$ 来表示）等辅助矢量。

数学工具对于简洁地表达电磁学中的概念和建立电磁模型都非常重要。在电磁学中，矢量代数、矢量微积分和坐标系是三个基本的数学工具。矢量代数关注矢量加、矢量的尺度变化和矢量乘。矢量微积分处理标量场和矢量场的微分与积分运算，其中主要的运算是梯度、散度和旋度。引入坐标系后，可以用数学方程或者位置矢量函数来表示几何模型，如点、线、面和体。虽然物理量、物理定律和矢量运算是独立于坐标系的，但在解决具体电磁学问题时，选择适合的坐标系会带来极大的方便。

尽管矢量的定义非常浅显，但我们在处理矢量场时还必须小心，因为矢量场中不同类型的矢量很容易混淆。位置矢量总是起始于坐标原点而终于空间中的一点，而这个矢量定义在矢量终端位置。距离矢量起始于一点而终于另一点，定义两点之间的距离和从起点到终点的方向；同样，距离矢量定义在矢量终端位置。矢量场中的每个矢量都定义在一个空间位置点，这个矢量的大小和方向都属于这个矢量的起点（也即属于这个空间位置点），因而一个矢量从一点移动到另一点并无意义。在这种情况下，这个矢量终端处的空间坐标没有意义。基矢量是一组三个相互正交的单位矢量，它们的方向一般会随着位置点的变化而变化。

1.1　矢量和矢量场

矢量是具有大小和方向的量。矢量的大小也称为矢量幅度或模值，模值必须大于或等于零。矢量可用带箭头的线段来表示。箭头表示矢量的方向，线段的长度代表矢量的大小。箭头的尾部称为矢量的起点，而箭头头部称为矢量的终端。矢量一般用黑体的字母来表示(如 **A** 和 **B**)，或者用带箭头的字母来表示(如 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$)。**本书用带箭头的字母来表示矢量，便于在教学中和手写体一致。**矢量 $\vec{A}$ 在数学上可以表示为

$$\vec{A} = A\hat{a}_A = |\vec{A}|\hat{a}_A = |\vec{A}|\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{1-1-1}$$

这里矢量 $\vec{A}$ 的大小用不带箭头的字母如 A 或者 $|\vec{A}|$ 表示，是一个大于或等于零的实数，带有物理矢量的单位(量纲)。在以后章节中，还要把矢量的大小扩展成复数。矢量 $\vec{A}$ 的方向用 $\hat{a}_A$ 来表示，$\hat{a}_A=\vec{A}/|\vec{A}|$。$\hat{a}_A$ 称为矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量，它的大小 $|\hat{a}_A|=1$。(**注意：**单位矢量用的是三角，而不是普通矢量的箭头，下标 A 表明是 $\vec{A}$ 的单位矢量)。单位矢量是指大小等于 1 的矢量。$\hat{a}_A$ 和 $-\hat{a}_A$ 表示是两个方向相反的单位矢量。矢量的图形表示和符号表示如图 1-1-1 所示。

例 1-1-1　求矢量 $\vec{E}=-5\,\hat{a}_E$(V/m)的大小和方向。

解　可把矢量写成 $\vec{E}=5$(V/m)$(-\hat{a}_E)$，因此该矢量的大小是 5(V/m)，方向为 $-\hat{a}_E$。

在直角坐标系(也称笛卡尔坐标系，Cartesian coordinate system)中，空间中任一点 p_1 可以用三个坐标 x_1、y_1、z_1 来表示。在本书中标记为 $p_1:(x_1,y_1,z_1)$，这里的“:”用来区分标量场 $p(x,y,z)$。空间中的点也可用位置矢量来表示。

空间点的位置矢量：矢量的起点为坐标系原点，矢量的终端为空间点，大小表示原点到空间点的距离，矢量的方向从坐标系原点指向空间点。位置矢量定义在矢量尾部所在的空间点(**注意：**这一点非常重要，关系到位置矢量在具体坐标系中用分量表示时基矢量的选择)。空间中每一个点 $p:(x,y,z)$ 都唯一对应一个位置矢量 $\vec{r}$。例如，图 1-1-2 中 p_1 点所对应的位置矢量是 $\vec{r}_1$。位置矢量 $\vec{r}$ 和对应空间点的坐标之间的关系在各种坐标系中不同，这会在讲述具体坐标系时再论述。

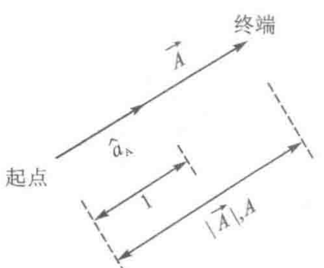


图 1-1-1　矢量的图形表示和符号表示

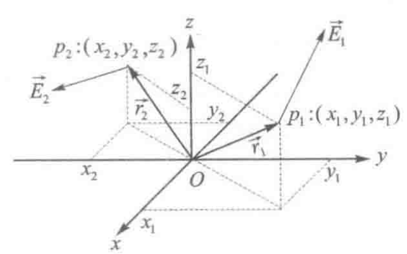


图 1-1-2　三维空间中的(电场强度)矢量场

如果在某个空间区域内的每个点都定义一个标量，那么就说在这个区域内存在一个**标量**

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

场。在数学上标量场可以用自变量为空间位置的标量函数来表示，如 $T(\vec{r})$，$\vec{r}$ 表示位置矢量。一般来说标量场同时还可以是时变的，这时标量场可表示为 $T(\vec{r},t)$。在直角坐标系中，$T(\vec{\gamma})$ 和 $T(x,y,z)$ 是等价的，$T(\vec{r},t)$ 和 $T(x,y,z,t)$ 是等价的；$\vec{r}$ 和 $p:(x,y,z)$ 表示的是空间中的同一个位置点。如果在某个空间区域内的每个点上都定义一个矢量，那么就说在这个区域内存在一个**矢量场**。在数学上矢量场可用自变量为空间位置的矢量函数来表示，如$\vec{U}(\vec{r})$，$\vec{r}$ 表示位置矢量。同样矢量场也可以是时变的，这时矢量场可表示为$\vec{U}(\vec{r},t)$。在直角坐标系中，$\vec{U}(\vec{r})$和$\vec{U}(x,y,z)$是等价的，$\vec{U}(\vec{r},t)$和$\vec{U}(x,y,z,t)$是等价的。

根据以上矢量的定义，就可以用数学语言清楚地表示矢量场和标量场。例如房子中的温度是一个标量场，可用 $T(\vec{r},t)$表示，则在t_0 时刻房子中某一点$p_1:(x_1,y_1,z_1)$处的温度为

$$T(x_1,y_1,z_1,t_0)=T(\vec{r}_1,t_0)=T_1 \tag{1-1-2}$$

式中，$\vec{r}_1$为p_1点的位置矢量，T_1为一个具体的温度值。如果该温度场不随时间变化，那么可直接用 $T(\vec{r})$来表示温度场。空间中的电场是一个矢量场，可用 $\vec{E}(\vec{r},t)$表示，如图 1-1-2 所示，则在t_0 时刻空间中点$p_1:(x_1,y_1,z_1)$处的电场可表示为

$$\vec{E}(x_1,y_1,z_1,t_0)=\vec{E}(\vec{r}_1,t_0)=\vec{E}_1 \tag{1-1-3}$$

式中，$\vec{r}_1$为p_1点的位置矢量，$\vec{E}_1$为一个具体的电场矢量。如果在同时刻点$p_2:(x_2,y_2,z_2)$处电场矢量为$\vec{E}_2$，即使有$\vec{E}_2$ 等于$\vec{E}_1$(矢量的大小和方向都相等)，这两个矢量也不完全相同，因为它们表示的是不同空间点处的电场。所以，这里特别强调矢量场中的矢量是有位置特性的，对两个不同位置的矢量进行某种运算时要特别注意。

图 1-1-3 给出了一个正负电荷在空间形成的电场(矢量场)。

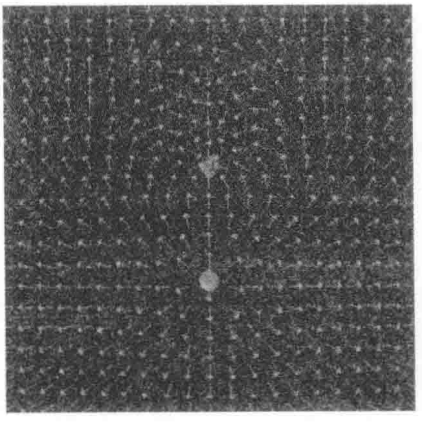


图 1-1-3　正负电荷在空间形成电场

例 1-1-2　判断下面的表达式是否为矢量场：

(1) $\vec{A}(x_1,y_1,z_1,t_0)$；　(2) $\vec{A}(x_1,y_1,z_1)$；　(3) $\vec{A}(x,y,z)$；　(4) $\vec{A}(x)$；

(5) $\vec{A}(\vec{r},t)$；　(6) $A(\vec{r},t)$；　(7) $A(\vec{r})$；　(8) $\vec{A}(\vec{r}-\vec{r}_1)$。

解

(1) 不是；(2) 不是；(3) 是；(4) 是；(5) 是；(6) 不是；(7) 不是；(8)是。

1.2 矢量代数

1.2.1 矢量的加减法

两个矢量相加表示为

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{C} \tag{1-2-1}$$

一般情况下,矢量相加的两个矢量都具有共同的矢量起点,也即它们属于空间中的同一个点。得到的结果$\vec{C}$和 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 一样都有共同的矢量起点。

矢量相加的计算法则有平行四边形法则和头尾相连法则。例如,图 1-2-1(a)表示矢量相加的平行四边形法则。矢量加所得的结果矢量$\vec{C}$为由 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 构成平行四边形的对角线。图 1-2-1(b)、(c)表示矢量相加的两种头尾连接法则。头尾连接法则 1 是移动第二个矢量(加号后面的矢量,即矢量 $\vec{B}$);头尾连接法则 2 是移动第一个矢量(即加号前面的矢量,即矢量 $\vec{A}$)。平行移动矢量 $\vec{B}$(或者 $\vec{A}$),使得该矢量的起点和矢量 $\vec{A}$(或者 $\vec{B}$)的尾端重合。结果矢量$\vec{C}$就是从 $\vec{A}$(或者 $\vec{B}$)的起点到 $\vec{B}$(或者 $\vec{A}$)矢量尾端的矢量。

注意:这里矢量的平移仅仅用于图形化的矢量加运算。尽管一个矢量可以在空间中从一点移动到另一点,并完成矢量加,但在绝大部分情况下这样的矢量平移和不同点的两个矢量相加并没有什么物理意义,因为矢量场中的矢量都属于空间中的某一个点。

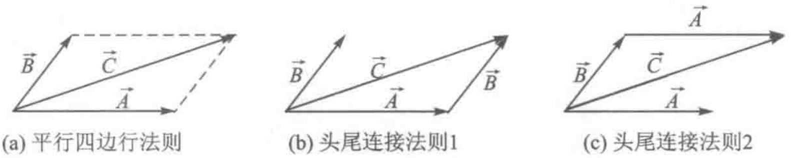


图 1-2-1 矢量加$\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$

矢量相加满足结合律和交换律:

结合律 $$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C} \tag{1-2-2a}$$

交换律 $$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A} \tag{1-2-2b}$$

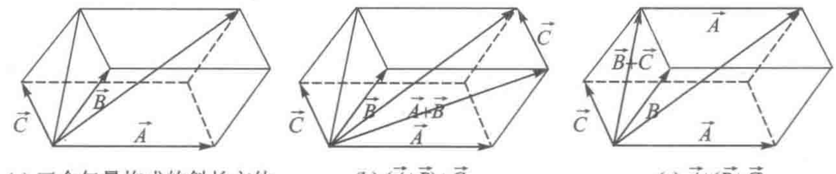
根据矢量加的头尾连接法则 1,可知 $\vec{A}+\vec{B}$ 和 $\vec{B}+\vec{A}$ 都等于由 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 两个矢量构成的平行四边形的对角线矢量,因此矢量加满足交换律。

如图 1-2-2(a)所示,三个矢量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 和$\vec{C}$构成一个斜长方体。根据矢量加的运算规则可得$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$等于斜长方体的对角矢量,如图 1-2-2(b)所示;同样可得 $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$等于斜长方体的对角矢量,如图 1-2-2(c)所示。因此证明了矢量加满足结合律。从图 1-2-2 可以看出,多个矢量的加与矢量加的顺序无关。

矢量 $\vec{A}$ 减去矢量 $\vec{B}$ 等于矢量 $\vec{A}$ 加上负的矢量 $\vec{B}$,即

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{A}+B(-\hat{a}_B) \tag{1-2-3}$$

负的矢量$-\vec{B}$ 和矢量 $\vec{B}$ 两者大小相等,但方向相反,且两者的起点在同一点。矢量减的图形化方法和矢量加相同,如图 1-2-3 所示。



(a) 三个矢量构成的斜长方体　(b) $(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$　(c) $\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

图 1-2-2　矢量加满足结合律

两个位置矢量$\vec{r}_1$和$\vec{r}_2$的矢量减可表示为$\vec{R}_{1-2}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$，该矢量称为**距离矢量**。如图 1-2-4 所示，距离矢量$\vec{R}_{1-2}$的方向是从点p_2指向点p_1。我们总是假设距离矢量属于点p_1，也即距离矢量的终端位置。换句话说，距离矢量用于表述在点p_1处的物理量。距离矢量$\vec{R}_{1-2}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$，读作从点 2 到点 1 的距离矢量。

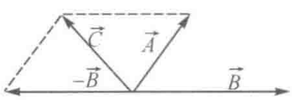


图 1-2-3　矢量减$\vec{C}=\vec{A}-\vec{B}$

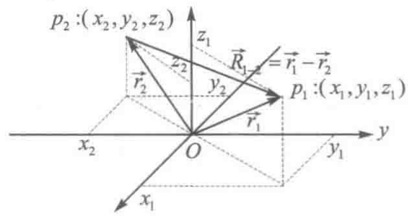


图 1-2-4　距离矢量

1.2.2　矢量的尺度变换

一个矢量和一个标量相乘称为矢量的尺度变换。矢量尺度变换的定义为

$$k\vec{A}=kA\,\hat{a}_A \tag{1-2-4}$$

当标量$k>0$时，它增加或缩短矢量的长度，但不改变矢量的方向。当$k<0$时，不仅改变矢量的大小，还把矢量的方向改变到相反方向。

矢量的尺度变换满足结合律、交换律和分配律：

结合律
$$k(l\vec{A})=l(k\vec{A}) \tag{1-2-5a}$$

交换律
$$k\vec{A}=\vec{A}k \tag{1-2-5b}$$

分配律
$$(k+l)\vec{A}=k\vec{A}+l\vec{A} \tag{1-2-5c}$$

1.2.3　矢量的标量乘(点乘)

标量乘和矢量乘是矢量代数中定义的两个独特运算。如名称所示，两个矢量的标量乘得到一个标量，而矢量乘得到一个新矢量。标量乘涉及两个矢量夹角的余弦值，而矢量乘涉及两个矢量夹角的正弦值。

矢量的标量乘对于计算一个矢量在另一个矢量上的投影非常重要。而一个矢量在另一个矢量上的投影对于矢量的分解又十分重要。文中一般用点乘来称呼标量乘。

矢量$\vec{A}$和$\vec{B}$的点乘标记为$\vec{A}\cdot\vec{B}$，定义为

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta_{AB} \tag{1-2-6}$$

式中，A 和 B 分别为矢量的大小；θ_{AB} 为两个矢量较小的夹角（小于或等于 180°）。当 $0°\leqslant\theta_{AB}<90°$ 时，结果大于零；当 $90°<\theta_{AB}\leqslant 180°$ 时，结果小于零；当 $\theta_{AB}=90°$ 时，结果等于零，也即矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 正交，如图 1-2-5 所示。当需要确定两个矢量是否正交（垂直）时，只要验证这两个矢量的点乘是否等于零即可。

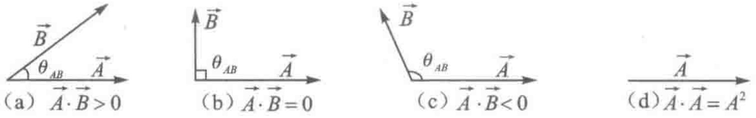


图 1-2-5　标量乘

由式(1-2-6)可知，两个矢量的点乘小于两个矢量各自幅度（模值）的乘积，即

$$|\vec{A}\cdot\vec{B}|\leqslant AB \tag{1-2-7}$$

一个矢量和自己的点积等于该矢量幅度的平方，即

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2 \tag{1-2-8}$$

因此可通过式(1-2-8)来求得矢量的幅度，即

$$A=|\vec{A}|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}} \tag{1-2-9}$$

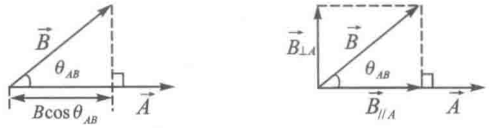
根据点乘的定义，还可以证明点乘满足：

$$k(\vec{A}\cdot\vec{B})=(k\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(k\vec{B}) \tag{1-2-10}$$

式(1-2-10)中，k 为实数。

根据点乘的定义可知，$\vec{B}\cdot\hat{a}_A=B\cos\theta_{AB}$，称 $\vec{B}\cdot\hat{a}_A$ 为矢量 $\vec{B}$ 在矢量 $\vec{A}$ 上的投影（标）量，如图 1-2-6(a)所示。由 $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta_{AB}=A(\vec{B}\cdot\hat{a}_A)=B(A\cos\theta_{AB})=B(\vec{A}\cdot\hat{a}_B)$ 可知，$\vec{A}\cdot\vec{B}$ 可以看成 A 与矢量 $\vec{B}$ 在矢量 $\vec{A}$ 上投影量的乘积，或者看成 B 与矢量 $\vec{A}$ 在矢量 $\vec{B}$ 上投影量的乘积。

矢量 $\vec{B}$ 在矢量 $\vec{A}$ 上的投影矢量可表示为 $(\vec{B}\cdot\hat{a}_A)\hat{a}_A$，其中 $\vec{B}\cdot\hat{a}_A$ 就是 $\vec{B}$ 在 $\vec{A}$ 上的投影量，$\hat{a}_A$ 是矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量。



(a) $\vec{B}$在矢量$\vec{A}$上的投影量　(b) $\vec{B}$在矢量$\vec{A}$上的投影矢量

图 1-2-6　矢量的投影

矢量 $\vec{B}$ 在矢量 $\vec{A}$ 上的投影量和投影矢量的计算式还可以写成：

$$\vec{B}\cdot\hat{a}_A=\frac{\vec{B}\cdot\vec{A}}{|\vec{A}|} \tag{1-2-11a}$$

$$\vec{B}_{//A}=(\hat{a}_A\cdot\vec{B})\hat{a}_A=\frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A}}{|\vec{A}|^2} \tag{1-2-11b}$$

其中，$\vec{B}_{//A}=(\vec{B}\cdot\hat{a}_A)\hat{a}_A$ 是把矢量 $\vec{B}$ 在矢量 $\vec{A}$ 上的投影矢量。根据矢量加的定义，还可求得 $\vec{B}$ 在矢量 $\vec{A}$ 垂直方向上的矢量投影（用$\vec{B}_{\perp A}$来标记）：

$$\vec{B}_{\perp A}=\vec{B}-\vec{B}_{//A}=\vec{B}-\frac{(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{A}}{|\vec{A}|^2} \tag{1-2-11c}$$

矢量的标量乘满足交换律和分配律，即

交换律　$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A} \tag{1-2-12a}$$

分配律　$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C} \tag{1-2-12b}$$

根据矢量点乘的定义可知 $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta_{AB}$，而 $\vec{B}\cdot\vec{A}=BA\cos\theta_{BA}$，因为$\theta_{AB}=\theta_{BA}$，所以 $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$，即点乘交换律成立。从图 1-2-7 可以看出，$\vec{B}$ 在 $\vec{A}$ 上的标量投影为 $\vec{B}\cdot\hat{a}_A$，$\vec{C}$ 在$\vec{A}$ 上的标量投影为$\vec{C}\cdot\hat{a}_A$，$(\vec{B}+\vec{C})$在 $\vec{A}$ 上的标量投影为$(\vec{B}+\vec{C})\cdot\hat{a}_A$，根据几何关系可得：

$$(\vec{B}+\vec{C})\cdot\hat{a}_A=\vec{B}\cdot\hat{a}_A+\vec{C}\cdot\hat{a}_A \tag{1-2-13}$$

在式(1-2-13)等号两边同时乘以 A，即可得到式(1-2-12)，从而证明了矢量点乘满足分配律。

在矢量代数中，经常需要计算一个矢量在一个面上的矢量投影。如图 1-2-8 所示，记面 S 的法向矢量为 $\hat{a}_N$，$\vec{A}_N$是矢量 $\vec{A}$ 在面 S 法向矢量上的投影矢量，$\vec{A}_T$是 $\vec{A}$ 在面 S 切向矢量上的投影矢量，即

$$\vec{A}_N=(\vec{A}\cdot\hat{a}_N)\hat{a}_N \tag{1-2-14}$$

$$\vec{A}_T=\vec{A}-\vec{A}_N=\vec{A}-(\vec{A}\cdot\hat{a}_N)\hat{a}_N \tag{1-2-15}$$

下标 N 和 T 分别表示法向(Normal)和切向(Tangential)，有时还需要计算一个矢量在一个面上的一个矢量上的投影矢量，例如求解矢量 $\vec{A}$ 在面 S 内矢量 $\vec{B}$ 上的投影矢量，这可以用二步投影法。

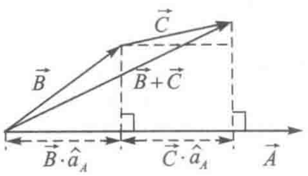


图 1-2-7　标量乘的交换律

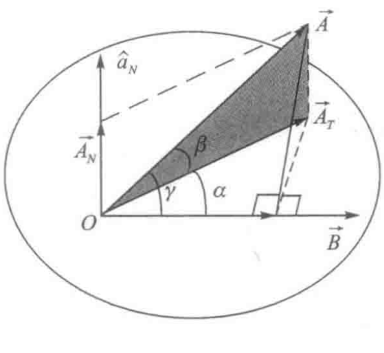


图 1-2-8　矢量的二步投影法

二步投影法：求解矢量 $\vec{A}$ 在矢量 $\vec{B}$ 上的投影，可以分成两步。第一步求 $\vec{A}$ 在矢量 $\vec{B}$ 所在面上的投影得到$\vec{A}_T$；第二步把$\vec{A}_T$投影到 $\vec{B}$ 上。这是因为：

$$\vec{A}\cdot\hat{a}_B=(\vec{A}_T+\vec{A}_N)\cdot\hat{a}_B=\vec{A}_T\cdot\hat{a}_B \tag{1-2-16}$$

式(1-2-16)中使用了 $\vec{A}=\vec{A}_T+\vec{A}_N$，$\vec{A}_N\cdot\hat{a}_B=0$ 及矢量点乘的分配律即式(1-2-12b)。该式证明了 $\vec{A}$ 在 $\vec{B}$ 上的投影等于$\vec{A}_T$在 $\vec{B}$ 上的投影，因此证明了二步投影法的正确性。根据式(1-2-16)还可得 $\cos\gamma=\cos\beta\cos\alpha$，其中 β 是 $\vec{A}$ 和$\vec{A}_T$之间的夹角，α 是$\vec{A}_T$和 $\vec{B}$ 之间的夹角，γ

是 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 之间的夹角，推导过程参见后面的式(1-2-49)。

例 1-2-1 两个任意矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$(两个矢量的方向不同)，那么由 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 所构成的平面内的任何一个矢量$\vec{C}$都表示成 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的线性叠加：

$$\vec{C} = k\vec{A} + l\vec{B} \tag{1-2-17}$$

求解实数 k 和 l。

解

对式(1-2-17)的两边同时点乘 $\vec{A}$，可得：

$$\vec{A} \cdot \vec{C} = k\vec{A} \cdot \vec{A} + l\vec{A} \cdot \vec{B} \tag{1-2-18}$$

对式(1-2-17)的两边同时点乘 $\vec{B}$，可得：

$$\vec{B} \cdot \vec{C} = k\vec{B} \cdot \vec{A} + l\vec{B} \cdot \vec{B} \tag{1-2-19}$$

根据式(1-2-18)和式(1-2-19)可得：

$$\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{A} \cdot \vec{A} & \vec{A} \cdot \vec{B} \\ \vec{A} \cdot \vec{B} & \vec{B} \cdot \vec{B} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{A} \cdot \vec{C} \\ \vec{B} \cdot \vec{C} \end{bmatrix} \tag{1-2-20}$$

同理，可以把空间任意一个矢量$\vec{K}$，表示成空间中任意三个矢量 $\vec{A}$、$\vec{B}$ 和$\vec{C}$的线性叠加：

$$\vec{K} = k\vec{A} + l\vec{B} + m\vec{C} \tag{1-2-21}$$

$$\begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{A} \cdot \vec{A} & \vec{A} \cdot \vec{B} & \vec{A} \cdot \vec{C} \\ \vec{B} \cdot \vec{A} & \vec{B} \cdot \vec{B} & \vec{B} \cdot \vec{C} \\ \vec{C} \cdot \vec{A} & \vec{C} \cdot \vec{B} & \vec{C} \cdot \vec{C} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \vec{A} \cdot \vec{K} \\ \vec{B} \cdot \vec{K} \\ \vec{C} \cdot \vec{K} \end{bmatrix} \tag{1-2-22}$$

例 1-2-2 证明余弦定理，如图 1-2-9 所示。

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta \tag{1-2-23}$$

证明

根据矢量的关系：

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} \tag{1-2-24}$$

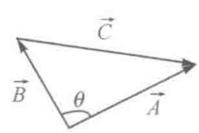


图 1-2-9 余弦定理

对式(1-2-24)两边的矢量各自求模的平方，可得：

$$\vec{C} \cdot \vec{C} = (\vec{A} - \vec{B}) \cdot (\vec{A} - \vec{B}) \tag{1-2-25}$$

对式(1-2-25)的左边应用点乘的两次应用分配律，可得：

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2\vec{A} \cdot \vec{B} = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta \tag{1-2-26}$$

1.2.4 矢量的矢量乘(叉乘)

矢量 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的矢量乘(也称叉乘)标记为 $\vec{A} \times \vec{B}$，定义为

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta_{AB}\,\hat{a}_N \tag{1-2-27}$$

式(1-2-27)中，A 和 B 分别为矢量的大小；θ_{AB} 为两个矢量较小的夹角；$\hat{a}_N$ 是两个矢量所构成平面的法向矢量，$\hat{a}_N$ 的方向服从右手规则，即右手四指从 $\vec{A}$ 沿着两个矢量较小的夹角转到 $\vec{B}$，大拇指竖起的方向即为$\hat{a}_N$，如图 1-2-10 所示。叉乘的两个矢量必须在空间的同一个点。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com