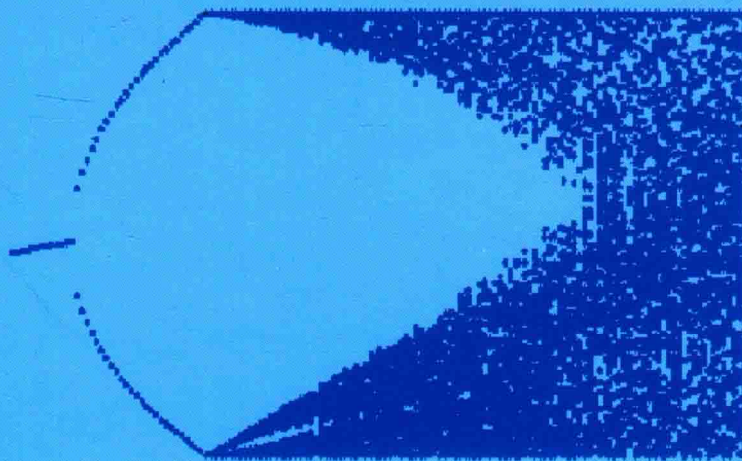




电力电子系统的 非线性动力学分析

马西奎 等 著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

电力电子系统的非线性 动力学分析

马西奎 等著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统总结作者及其学术团队 16 年来在电力电子系统的非线性动力学分析方面的科学研究成果。全书共 11 章。第 1 章是绪论。第 2 章介绍电力电子系统的非线性动力学分析基础。第 3 章介绍 DC-DC 变换器的非线性动力学分析。第 4 章介绍 AC-DC 变换器的非线性动力学分析。第 5 章介绍 DC-AC 变换器的非线性动力学分析。第 6 章介绍开关变换器中的未充分发展分岔与不对称性。第 7 章介绍输入滤波器对开关变换器非线性动力学行为的影响。第 8 章介绍并联和级联开关变换器的非线性动力学分析。第 9 章介绍数字控制对开关变换器非线性动力学行为的影响。第 10 章介绍双馈风力发电机组中的分岔现象。第 11 章介绍并网双馈风力发电系统电压失稳和崩溃的机理。

本书试图较为有机地介绍电力电子系统非线性动力学分析所涉及的主要内容和一些重要的工具,把作者的研究工作体会及成果尽可能深入浅出地写出来。希望在不需要很深知识的情况下尽量让读者较严谨地掌握这些内容,起码能大体上对这些领域有一个概貌性的了解,以便在某一方向能做深入的探索。

本书可供从事电气工程、电力电子技术及相关专业领域研究和开发工作的科技人员参考,也可作为高等学校相关专业高年级本科生和研究生的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

电力电子系统的非线性动力学分析/马西奎等著. —北京:科学出版社, 2017. 1

ISBN 978-7-03-051516-2

I. ①电… II. ①马… III. ①电子系统-非线性-动力学分析 IV. ①TN103

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 324074 号

责任编辑:陈构洪 赵微微 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:肖 兴 / 封面设计:铭轩堂

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 1 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2017 年 1 月第一次印刷 印张: 26

字数: 509 000

定价: 196.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

本书撰写人员

- | | |
|-----|--------------|
| 马西奎 | 西安交通大学 |
| 邹建龙 | 西安交通大学 |
| 张 浩 | 西安交通大学 |
| 王发强 | 西安交通大学 |
| 杨黎晖 | 西安交通大学 |
| 杨晓平 | 西安西电电力系统有限公司 |

序 言

数易其稿,直至今刻才算定稿,在略感轻松之片刻和欣喜之余,现在却要为之作“序”。其实,在我们这个大千的自然世界里,万事万物的产生和发展都是有序的。就拿“混沌”这一种貌似随机的运动来看,在表象上它是无序的,但内在却是有序的。什么是混沌?恐怕是一个很难准确回答的问题。但是,它在电力电子系统中经常出现。如同其他的非线性系统一样,至今人们已经发现在电力电子系统中通向混沌也有如下几条道路:倍周期分岔通向混沌、阵发性通向混沌、由准周期运动通向混沌、由准周期环面破裂通向混沌、激变途径。这些现象都可以称作非线性现象,只有深入地了解非线性现象,才能走出非线性现象(避免其发生或对其进行利用)。在读了这本书之后,若读者能对上述说法有所体会,那就是我们的最大愿望之一。

今天和明天的电力电子工程师,假如想切实分析一些有难度的技术问题,或者想有效解决一些有一定难度的工程问题,又想回避非线性,而仅仅囿于线性方法,这肯定是不可能的了。在实践中经常遇到的一些不规则现象,如刺耳的电磁噪声、控制系统的间歇不稳定和临界运行的突然崩溃等,都不能用线性方法来解决。只有运用非线性分析方法,才能揭示这些所谓“奇怪的”非线性现象的特点及其发生机理,才能解决一些长期困扰电力电子工程师的问题。已有的研究表明,当电力电子系统中出现分岔和混沌运动时,会导致大幅度的噪声和不稳定现象,在实际应用中是十分有害的,所以要尽量避免分岔现象和混沌运动。但是,如果将系统参数设计得离分岔边界太远,又会降低系统的动态响应速度等性能指标。因此,实际的设计方法必须考虑设计上的某种平衡。在这种情况下,对电力电子系统中分岔现象和混沌运动的研究将对实际的设计方法产生重要的影响。若关心这些问题的有关人员可以用较短的时间理解这些问题的概要,加深对这些问题的关注和支持,那就是我们写这本书的最大愿望之二。

16年来,我们科研小组对电力电子系统中的非线性动力学现象进行了系统深入的研究,先后有10位博士研究生和30余位硕士研究生参加了这一课题的研究。他们是完成这一课题研究工作的生力军,做出了创造性成果,并在国内外学术期刊上发表了一系列论文。本书着重总结了我們承担的国家自然科学基金项目(50577047、50607015、51007068、51177118、51207122、51377124)、教育部高等学校

博士学科点专项科研项目(20050698004、20130201110008、20100201120028)和陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2006 E₁ 13、2012JQ7026)的研究工作成果。从本书目录看,我们试图较为有机地介绍电力电子系统非线性动力学分析所涉及的主要内容和一些重要的工具,把我们的体会及成果尽可能深入浅出地写出来。希望在不需要很深知识的情况下尽量让读者较严谨地掌握这些内容,起码能大体上对这些领域有一个概貌性的了解,以便在某一方向能做深入的探索。由于受到篇幅的限制,要想在本书中包罗方方面面,就不可能了。这样,选材就要有所讲究,这是不容易做好的。只能说,我们已尽到努力,现在的希望只是本书能对读者有所帮助。

本书的出版与作者课题组多年来的科研工作是密不可分的,在此向为本书所包括的研究成果做出过宝贵贡献的研究生表示感谢。同时,感谢所有协助本书出版的人们。本书的出版得到了2016年度国家科学技术学术著作出版基金的资助。此外,在撰写和出版过程中,本书得到了西安交通大学电气工程学院、电力设备电气绝缘国家重点实验室和科学出版社的大力支持。在此,我们一并表示衷心的感谢。

参加本书撰写的有马西奎、邹建龙、张浩、王发强、杨黎晖、杨晓平。

限于我们的学识水平,虽然数易其稿,书中可能会有不足和疏漏,热忱欢迎各位读者对本书提出宝贵意见。

马西奎

2016年6月于西安交通大学

目 录

序言

第 1 章 绪论	1
1.1 不能“小觑”非线性问题	1
1.1.1 线性问题和非线性问题	1
1.1.2 从虫口模型一瞥非线性现象	2
1.2 电力电子系统中的非线性现象	6
1.2.1 分岔	7
1.2.2 混沌	9
1.2.3 准周期态	10
1.3 电力电子系统中非线性动力学研究的动因、意义和方法	11
1.3.1 研究的动因和意义	11
1.3.2 研究方法	12
1.4 本书的目的和内容	12
参考文献	14
第 2 章 电力电子系统的非线性动力学分析基础	21
2.1 电力电子系统的控制模式和工作模式	21
2.1.1 控制模式	21
2.1.2 工作模式	23
2.2 离散时间映射法	25
2.2.1 理想开关模型	25
2.2.2 离散时间映射法的迭代公式	26
2.3 状态空间平均法	28
2.4 小信号分析方法	29
2.5 系统的小干扰稳定性分析	30
2.5.1 运动稳定性	31
2.5.2 小干扰稳定性分析方法	32
2.5.3 电力电子系统小干扰稳定性分析	33
2.6 捕获非线性动力学现象	34
2.6.1 采样数据法	34
2.6.2 相图	34

2.6.3	庞加莱截面	35
2.6.4	分岔图	37
2.7	混沌数值识别	38
2.7.1	李雅普诺夫指数	38
2.7.2	功率谱分析	41
2.7.3	自相关函数	42
2.7.4	功率谱和自相关函数的计算	43
2.7.5	频闪采样法	43
	参考文献	44
第3章	DC-DC 变换器的非线性动力学分析	45
3.1	电压型 Buck 变换器中的低频振荡现象分析	45
3.1.1	电路工作原理与建模	46
3.1.2	低频振荡影响	48
3.1.3	低频振荡特性参数预测	51
3.1.4	仿真和实验验证	54
3.2	电流型 Buck-Boost 变换器中的边界碰撞分岔分析	56
3.2.1	Buck-Boost 变换器的离散建模	57
3.2.2	数值模拟结果	59
3.2.3	结果分析	64
3.2.4	实验研究及结果	70
3.3	电流型 SEPIC 变换器中的倍周期分岔、Hopf 分岔与共存吸引子 分析	75
3.3.1	SEPIC 变换器的工作原理与建模	76
3.3.2	分岔分析	78
3.3.3	数值结果与分析	79
3.4	本章小结	86
	参考文献	86
第4章	AC-DC 变换器的非线性动力学分析	88
4.1	PFC 变换器中的快尺度分岔分析	88
4.1.1	峰值电流控制 Boost PFC 变换器中的快尺度分岔分析	89
4.1.2	平均电流控制 Boost PFC 变换器中的快尺度分岔分析	100
4.1.3	SSIPP 中的快尺度分岔分析	108
4.2	PFC 变换器中的慢尺度分岔分析	124
4.2.1	平均电流控制 Boost PFC 变换器中的慢尺度倍周期分岔分析	124
4.2.2	慢尺度 Hopf 分岔分析	139

4.2.3 平均电流控制 Boost PFC 变换器中饱和引起的慢尺度分岔	144
4.3 PFC 变换器中的中尺度分岔分析	160
4.3.1 平均电流控制 Boost PFC 电路中的中尺度分岔分析	160
4.3.2 SSIPP 中的中尺度分岔分析	166
4.3.3 单周期控制 Cuk PFC 变换器中的中尺度分岔分析	183
4.4 本章小结	197
参考文献	198
第 5 章 DC-AC 变换器的非线性动力学分析	203
5.1 电路模型与工作原理	203
5.2 数值仿真研究	205
5.2.1 中尺度不稳定现象	205
5.2.2 快尺度不稳定现象	207
5.3 理论分析	210
5.3.1 基于平均法的 Hopf 分岔分析	210
5.3.2 基于离散法的倍周期分岔分析	212
5.3.3 分岔与频域响应的关系	216
5.4 实验验证	218
5.5 本章小结	220
参考文献	221
第 6 章 开关变换器中的未充分发展分岔与不对称性	222
6.1 PFC Buck-Boost 变换器中的未充分发展分岔分析	222
6.1.1 工作原理和离散时间模型	222
6.1.2 快尺度分岔	226
6.1.3 临界相角位置与未充分发展分岔	229
6.2 双频非线性系统中的未充分发展分岔特征分析及应用	230
6.2.1 双频非线性系统动力学行为的典型特征及其机理	230
6.2.2 利用双频驱动抑制甚至消除混沌	234
6.3 本章小结	237
参考文献	237
第 7 章 输入滤波器对开关变换器非线性动力学行为的影响	239
7.1 引言	239
7.2 输入滤波器对电流型 Buck 变换器非线性动力学行为的影响	240
7.2.1 电路模型及数值仿真	240
7.2.2 理论分析	244
7.2.3 实验验证	248

7.3	输入滤波器对电压型 Buck 变换器非线性动力学行为的影响	250
7.3.1	电路模型和频域建模	250
7.3.2	稳定性分析	252
7.3.3	实验验证	255
7.4	输入滤波器对平均电流控制 Boost PFC 变换器非线性动力学行为的影响	257
7.4.1	工作原理及数值仿真	257
7.4.2	理论推导及影响分析	259
7.4.3	电路设计及实验验证	264
7.5	本章小结	265
	参考文献	266
第 8 章	并联和级联开关变换器的非线性动力学分析	268
8.1	引言	268
8.2	并联 Buck 变换器中的 Hopf 分岔分析	269
8.2.1	电路工作原理与数值仿真	270
8.2.2	离散映射建模与分析	277
8.2.3	PSpice 仿真验证	282
8.3	并联 PFC 电路中慢尺度分岔分析	284
8.3.1	电路模型与数值仿真	285
8.3.2	简化模型与分岔分析	287
8.4	级联 Buck 变换器中双向低频振荡分析	289
8.4.1	电路工作原理与数值仿真	290
8.4.2	平均模型及稳定性分析	294
8.4.3	电路实验	301
8.5	级联 PFC 电路中多尺度分岔分析	303
8.5.1	工作原理及非线性建模	303
8.5.2	中尺度分岔分析	305
8.5.3	慢尺度分岔分析	310
8.6	本章小结	318
	参考文献	319
第 9 章	数字控制对开关变换器非线性动力学行为的影响	322
9.1	数字控制 DC-DC Buck 变换器中低频振荡现象分析	323
9.1.1	电路工作原理	323
9.1.2	数值仿真结果	324
9.1.3	系统建模与稳定性分析	326

9.1.4	电路仿真实验结果	330
9.2	数字控制单相 PFC 变换器中两种时间尺度的分岔分析	333
9.2.1	数字控制单相 PFC 变换器工作原理	333
9.2.2	小信号模型	334
9.2.3	两种时间尺度的分岔及其机理	339
9.3	数字控制三相 PFC 变换器中的工频周期内振荡行为分析	345
9.3.1	工作原理	345
9.3.2	系统模型	347
9.3.3	数值仿真与分岔分析	351
9.3.4	实验验证	361
9.4	本章小结	365
	参考文献	366
第 10 章	双馈风力发电机组中的分岔现象	369
10.1	工作原理及系统建模	369
10.1.1	风力发电系统轴系模型	370
10.1.2	空气动力学模型	371
10.1.3	桨距角模型	371
10.1.4	双馈感应电机及其励磁控制系统的模型	372
10.2	理论分析	375
10.2.1	雅可比矩阵特征值轨迹	376
10.2.2	Hopf 分岔及稳定性分析	379
10.2.3	特征值分析	381
10.3	数值仿真验证	384
10.3.1	稳定运行状态	384
10.3.2	低频振荡现象	385
10.3.3	Hopf 分岔边界	386
10.4	本章小结	388
	参考文献	388
第 11 章	并网双馈风力发电系统电压失稳和崩溃的机理分析	390
11.1	系统建模	390
11.1.1	双馈风力发电机组的简化模型	391
11.1.2	动态负荷的模型	393
11.1.3	网络方程	393
11.2	系统失稳乃至电压崩溃的发生发展过程	394
11.2.1	低频振荡现象	394

11.2.2 电压崩溃现象	395
11.3 理论分析	396
11.3.1 平衡解流形的追踪	396
11.3.2 分岔现象和电压稳定性分析	399
11.4 MATLAB/Simulink 仿真验证	402
11.5 本章小结	403
参考文献	404

第 1 章 绪 论

在本章中,首先,概述了线性问题和非线性问题。其次,简要介绍了电力电子系统中的非线性现象,以及电力电子系统中非线性动力学研究的动因、意义和方法。最后,介绍了本书的目的和内容。

1.1 不能“小觑”非线性问题

非线性现象广泛地出现在物理、化学、生命、电子工程、电气工程、机械工程、动力工程各个领域(甚至社会、经济等领域),线性现象只是在平衡状态附近的近似结果。随着科学技术的发展,人们对于非线性现象本质认识的要求越来越迫切,这就使得我们不得不直接地面对非线性问题,研究非线性现象的普遍规律。在本节中,首先简要介绍非线性问题,然后通过虫口模型粗略地看看一些非线性现象,说明非线性现象研究的重要性。

1.1.1 线性问题和非线性问题

在电路理论中讲过,一个线性电阻元件两端的电压 U 与流过其中的电流 I 成正比。在电压和电流的参考方向选得一致的情况下,它可写成如下形式:

$$U = RI \quad (1.1.1)$$

式中,比例常数 R 表示这个电阻元件的电阻。这就是欧姆定律。这样,人们往往习惯于采用“叠加”的思想来处理所发生的情形:电流 I 流过一个电阻时,该电阻两端的电压为 U 。若电流 mI 流过该电阻,则其两端的电压为 mU 。之所以可以这样去处理,原因是其数学描述 $U = RI$ 为线性方程,属于线性范畴。可是在实际情形中,它只是真实问题在特定状态附近线性化近似处理的结果,或者说线性只是理想的。严格来说,当电流和电压改变时,所有实际电阻元件的电阻数值也会改变,这样的电阻称为非线性电阻。很明显,非线性电阻上的电压和电流关系是不遵守欧姆定律的,其数学描述为非线性方程,属于非线性范畴。但是,对于金属膜电阻、碳膜电阻、线绕电阻等实际元件,在一定范围内,它们的电阻基本不变,如作为线性电阻来处理,可以得出满足实际需要的结果。反过来,非线性处理却能包含真实问题中不可忽视的复杂性。可以这样说,线性现象只是在平衡状态附近的近似结果,而非线性现象却是自然界中广泛存在着的。

在数学上,一个线性方程的任意两个解加在一起仍然是该方程的解,这就是著名的线性系统的叠加原理。它告诉我们,可以把整个问题分解成许多个“小”问题,再把各个“小”问题的解叠加起来而得到整个问题的解。但是,对于一个非线性问题,则不可如此处理,因为非线性方程不满足叠加原理,所以必须整体地考虑原来的问题。不过,在人们的认识史上,首先是用相对简单的线性关系来描述问题,对于那些非线性因素不能完全忽略的情况,则往往采用线性近似或线性迭代的方法来处理。这样做也常常能得到较好的结果,但是这种处理方法一般只适用于比较“简单”的非线性问题,或者只是研究一些“常规”行为特征,仅限于一定的范围。当非线性因素较强时,就不能“小觑”非线性问题了,这时若仍强行用线性近似理论去分析,那么它所得出的结果不仅误差过大,而且无法对非线性问题中出现的如跳跃、分岔和混沌这些特殊现象做出解释。

随着对自然认识的不断深化,人们意识到自然界的本质应该非线性的。即使是一些表面看上去很简单的非线性问题,也可能会表现出令人十分惊异的复杂行为和现象,于是,近 40 年来,人们越来越重视对自然界中非线性现象的研究,今天已经诞生出一门科学——非线性科学。它是以现实世界中那些杂乱无章的空间形态和似乎毫无规律的时间序列作为研究现象,研究它们的共性,并解释各种非线性现象的物理本质。

非线性问题的研究极其困难,没有像傅里叶变换那样的处理线性问题的普遍有效的系统求解方法,很难得到精确的解析解,或者没有一种公认的规范方法,而更多的是对典型范例的研究和做某些定量分析。

1.1.2 从虫口模型一瞥非线性现象^[1-3]

这里,探讨一个简单而又典型的非线性问题:生物学中的虫口模型。在对这一模型的定性分析过程中,初步认识非线性动力学分析中常用的一些概念,如平衡态、稳定性、吸引子、分岔、突变、极限环和混沌等。

设 x_n 为虫口群体第 n 代的数目, x_{n+1} 为第 $n+1$ 代的数目,那么可以用 logistic 方程的离散形式来描述该虫口群体数目随世代的变化:

$$x_{n+1} = ax_n - bx_n^2 \quad (1.1.2)$$

$f(x_n) = ax_n - bx_n^2$ 是由第 n 代到第 $n+1$ 代的映射函数或映射。这是一个看起来似乎很简单的非线性差分方程,但它却有极其复杂的动力学行为。除了一些特殊的参量以外,并不容易写出它的解来。

如果重新定义变量和参数,或者适当选择坐标,可以把式(1.1.2)写成其他等价形式。例如,常见的标准形式为

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n) \quad (0 < x_n \leq 1; 0 < \mu < 4) \quad (1.1.3)$$

式中, μ 为一个参数。一旦选定初始条件 x_0 , 其后的 x_1 值即确定; 再把 x_1 作为新的变量, 计算 x_2 ; 如此重复上述过程(迭代), 就可以得出在映射 $f(x) = \mu x(1-x)$ 下 x 的一条向前的轨道:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots \quad (1.1.4)$$

式中, 每个 x_i 是一个轨道点。

在非线性动力学分析中, 本书主要关心轨道(1.1.4)的长时间行为, 即迭代次数 i 超过某个足够大的 N 以后, 极限集合 $\{x_i\}_{i>N}$ 表现出什么样的稳定行为? 一般说来, 轨道(1.1.4)的长时间行为可能会有这样几种方式: 不动点、周期态(轨道)、倍周期分岔、准周期态(轨道)和随机轨道, 甚至混沌态(轨道)。

如果从某次迭代开始, 所有的 x_i 都不再变化, 为一个恒值 x^* , 即

$$x_i = x^*, \quad \forall i \geq N \quad (1.1.5)$$

那么, x^* 就称为迭代(1.1.3)的不动点或平衡态。对于映射式(1.1.3), 其不动点方程为

$$x^* = \mu x^* (1 - x^*) \quad (1.1.6)$$

由此解得两个不动点, 分别为 $x^* = 0$ 和 $x^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ 。

在给定一个初值 x_0 后, 若迭代过程能收敛到某个不动点, 则称该点是稳定的不动点。这里, 简单介绍使运动保持稳定的条件和使运动失稳的条件, 并分析失稳后运动如何进一步演化。令不动点由式(1.1.7)定义:

$$x^* = f(x^*) \quad (1.1.7)$$

并使轨道从稍微偏离 x^* 的某点出发, 定义一个小的数 ϵ_n , 使

$$x_n = x^* + \epsilon_n \quad (1.1.8)$$

于是, 有

$$x^* + \epsilon_{n+1} = f(x^* + \epsilon_n) \approx f(x^*) + f'(x^*) \epsilon_n \quad (1.1.9)$$

即

$$\epsilon_{n+1} \approx f'(x^*) \epsilon_n \quad (1.1.10)$$

式中, $f'(x^*)$ 是映射函数 $f(x)$ 对 x 在 x^* 处的导数。因此, 当满足条件

$$|f'(x^*)| < 1 \quad (1.1.11)$$

时, 才能保证不动点是稳定的。也就是说, 式(1.1.11)是不动点的稳定条件。它意味着, 当迭代次数 i 足够大时, x_n 就趋向于不动点 x^* 。

现在,对于 logistic 映射式(1.1.3),在不动点处求导,可得

$$f'(x^*) = \mu - 2\mu x^* \quad (1.1.12)$$

由此可见,不动点的稳定性依赖于参数 μ 。因此,当参数 μ 从零变大且取不同的数值时,迭代过程式(1.1.3)有不同的动态行为。当 $0 < \mu < 1$ 时,在 $[0, 1]$ 内只有一个不动点 $x^* = 0$ 。由于 $f'(0) = \mu < 1$, 所以不动点 $x^* = 0$ 是稳定的。当 $1 < \mu < 3$ 时,在 $[0, 1]$ 内有两个不动点 $O(x^* = 0)$ 和 $A(x^* = 1 - \frac{1}{\mu})$ 。对于 O 点,由于 $f'(0) = \mu > 1$, 所以它是不稳定的。对于 A 点,因为 $f'(1 - \frac{1}{\mu}) = |2 - \mu| < 1$, 所以它是稳定的。因此,由任意初值 x_0 出发的迭代过程总是离开不动点 O 而趋于不动点 A 。特别地,在 $\mu = 2$ 时,有 $f'(1 - \frac{1}{\mu}) = 0$, 这样的情况,称为超稳定。在超稳定情况下,迭代过程朝着稳定的不动点收敛的速度,要比在线性情况下的指数速度还会快得多。根据上述讨论,当 $\mu = 1$ 时, $f'(0) = 1$, 稳定的不动点 O 失去其稳定性。同样,当 $\mu = 3$ 时, $f'(1 - \frac{1}{\mu}) = -1$, 稳定的不动点 A 也失去其稳定性。尽管它们仍然是不动点,但都已从吸引子变为排斥点,这种现象称作分岔。分岔的概念是整个动力学系统理论的最基本概念之一。

如果从某次迭代开始, x_i 周而复始地进入有限个数字无限重复的状态,例如,在 $i > N$ 后,有

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{N+p-1}$$

和

$$x_{N+p}, x_{N+p+1}, \dots, x_{N+2p-1}$$

完全相同,这称为周期 p 轨道。显然,周期 1 轨道就是不动点。周期 p 轨道也有稳定和不稳定之分。在这里,考察 logistic 映射式(1.1.3)的周期 2 轨道的稳定性。对于周期 2 轨道,其轨道方程为

$$\begin{cases} x_2^* = \mu x_1^* (1 - x_1^*) \\ x_1^* = \mu x_2^* (1 - x_2^*) \end{cases} \quad (1.1.13)$$

只有当 $\mu \geq 3$ 时,才有如下解:

$$x_{1,2}^* = \frac{\mu + 1 \pm \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}}{2\mu} \quad (1.1.14)$$

显然, x_1^* 和 x_2^* 是映射函数 $F(x) = f(f(x))$ 的不动点。这样,有

$$\begin{aligned}
 F'(x_1^*, x_2^*) &= f'(x_1^*)f'(x_2^*) \\
 &= \mu^2(1-2x_1^*)(1-2x_2^*) \\
 &= 1 - (\mu+1)(\mu-3)
 \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

当 $\mu = 3$ 时, $F'(x_1^*, x_2^*) = 1$; 而当 $\mu = 1 + \sqrt{6} = 3.4494\cdots$ 时, $F'(x_1^*, x_2^*) = -1$ 。这表明, 当 $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$ 时, 在 $[0, 1]$ 内任取初值 x_0 , 考察历次迭代结果, 可看到经过不长的过渡阶段后, x_n 在两个值 x_1^* 和 x_2^* 上来回跳动, 即周期 2 轨道是稳定的。如果增加 μ 的值至 $\mu = 1 + \sqrt{6} = 3.4494\cdots$ 时, $F'(x_1^*, x_2^*) = -1$, 表明周期 $p = 2$ 的两个值 x_1^* 和 x_2^* 又不稳定。如果进一步增加 μ 的值, 则当 $3.4496 < \mu < 3.545$ 时, 周期 $p = 2$ 的两个值由稳定变为不稳定, 且各自产生一对新的不动点, 此时 x_n 在 4 个值上跳动, 这叫周期 4 轨道。随着 μ 的值逐渐增加, 会不断地继续这种一分为二的过程: 周期 1 轨道不稳定时, 产生出周期 2 轨道; 周期 2 轨道不稳定时, 产生出周期 4 轨道; 周期 $p = 2^n$ 轨道不稳定时, 产生出周期 $p = 2^{n+1}$ 轨道。从分岔的观点看, 这种过程称为倍周期分岔, 它是一种相当普遍的现象。不难发现, 这种倍周期分岔发生在使 $F'(x^*) = -1$ 的 μ 值处。

如果盯住一个点 x_R , 每迭代一定次数, 轨道点就回到 x_R 附近来; 如果要求轨道点更靠近 x_R , 就必须进行更多次迭代, 但却不会准确重复 x_R 的数值。这种情形称为准周期轨道。如果所有轨道点 x_i 取值没有任何规律性, 就像是出现在一定范围内的一批随机数字。偶尔会遇到某个轨道点的数值很靠近先前有过的一点, 但是不仅不准确相同, 而且靠近出现间隔也无规律可循, 这是一条随机轨道。

随着 μ 的值逐渐增加, 经过足够次数的倍周期分岔后, 周期长度 (等于 2^n , n 为分岔次数) 变得相当长, 周期性已不明显。直到 $\mu > 3.57 = \mu_\infty$ 时, 轨道 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ 像是分布在区间 $[0, 1]$ 上的随机数。但取出有限长一段轨道点进行精度有限的观察时, 又会发现其中有某些近似的重复图式或“结构”。这些近似的重复图式在整个轨道中的出现方式却是随机的。这是一种混沌的轨道。随机轨道是混沌的特例, 其中近似重复图式的长度为 1, 没有任何局部结构。当 $\mu_\infty < \mu \leq 4$ 时, 说 logistic 映射式是混沌映射。首先, 这是由于它对于初始条件具有敏感的依赖性, 变得不可预测。例如, 两个在初始状态相互接近的轨道, 会随时间的推移越来越分离。其次, 它是非周期的, 不能被细分。最后, 在映射轨道中仍然存在着某种有规律性的成分。参数区间 $[\mu_\infty, 4)$ 称为 logistic 映射的混沌区, 但并不意味着在这个区域内仅存在混沌轨道。事实上, 还存在着许多 μ 值的区间窗口, 窗口内有一些周期轨道。同时, 窗口内还有混沌, 窗口的混沌区内还有窗口。这种结构往往有无穷多的层次, 而且每一层次都有上个层次的重复。这是一种自相似的结构。

为了清楚地说明演化对初始条件的变化十分敏感, 不妨取 $\mu = 4$ 代入式 (1.1.3) 中, 有