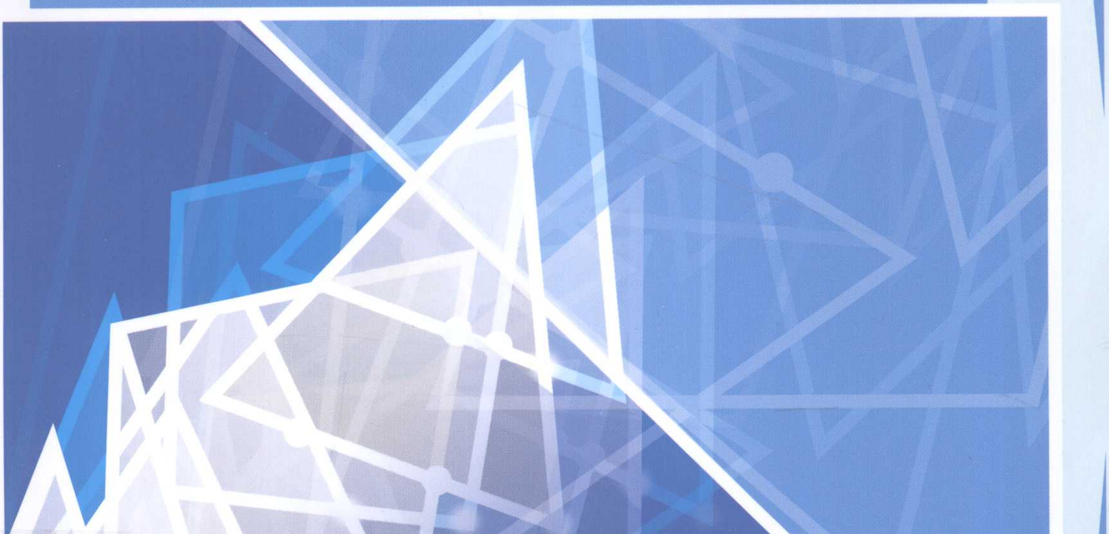
辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材

线性代数及其应用

（第二版）



阎慧臻 主编

科学出版社

辽宁省"十二五"普通高等教育本科省级规划教材

线性代数及其应用

（第二版）

阎慧臻　主　编
张玉杰　副主编

科 学 出 版 社
北　京

内 容 简 介

本书依据教育部审定的本科“线性代数课程教学基本要求”，结合编者多年的教学经验编写而成. 全书共 6 章，内容包括行列式、矩阵、n 维向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型和线性代数的 MATLAB 实现. 各章习题按难易程度分成 A、B 两类，以适合不同层次读者的需求. 本书在强调内容的适用性和通用性的同时，注重代数概念应用背景的介绍和线性代数在各领域中的应用，以及学生计算机应用能力的培养.

本书具有条理清晰、讲述详细、通俗易懂、简约实用、注重应用等特点，可作为应用型本科院校理工类、经管类专业的教材或教学参考书，也可供自学者或科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用 / 阎慧臻主编. —2 版. —北京：科学出版社，2016.7
(辽宁省“十二五”普通高等教育本科省级规划教材)
ISBN 978-7-03-049497-9

Ⅰ.①线… Ⅱ.①阎… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 174795 号

责任编辑：朱 敏 宋 丽 王 为 / 责任校对：马英菊
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 3 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2016 年 7 月第 二 版 印张：13
2016 年 7 月第六次印刷 字数：262 000

定价：31.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈骏杰〉)
销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135927-2032

前　言

线性代数是高等院校一门重要的数学基础课，是学习后续课程的工具，在培养大学生的计算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力等方面发挥着重要作用.随着科学技术突飞猛进的发展，特别是电子计算机使用的日益普及，作为处理离散问题工具的线性代数，已经深入到自然科学、社会科学、工程技术、网络信息、经济管理等各个领域，成为从事科学研究和工程设计的科技人员必不可少的数学工具之一.

线性代数具有较强的抽象性与逻辑性.如何掌握好线性代数的基本概念、基本理论和方法，并能灵活运用线性代数知识解决实际问题，是线性代数教学的主要任务.如何对线性代数这门重要的数学基础课进行改革是一个值得研究的课题.基于这些认识，我们编写了本书.

本书内容的选择与安排既注意保持线性代数本身的完整性和结构的合理性，又考虑到应用型本科大学生学习的实际情况，在编写过程中力求做到“简约实用”：减少了一些抽象的理论推导，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明.在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学，学生比较容易理解.

本书注重代数概念应用背景的介绍，在重要概念引入时尽可能做到简明、自然和浅显.利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念，尽量以提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开教材，努力使学生能知其所以然.在习题中，安排了一些简单的应用题，力求拓宽学生的视野，培养学生利用代数知识解决实际问题的能力.

本书第 6 章介绍了 MATLAB 在线性代数计算中的用法，让学生学会如何借助数学软件，应用线性代数知识解决实际问题.同时帮助学生理解抽象的线性代数概念，加深对线性代数理论知识的认识.

本书由大连工业大学应用数学系组织编写.第 1、2 章由阎慧臻编写，第 3、4 章由张玉杰编写，第 5 章由王玮莉编写，第 6 章由张大海编写.全书由阎慧臻统稿并最后定稿.

由于编者水平有限，书中难免存在不足和疏漏之处，敬请读者批评指正.

编　者

2016 年 6 月

目　　录

第 1 章　行　列　式

行列式是一个重要的数学工具，不但在数学的各个领域中，而且在其他各学科中都有广泛的应用，特别在线性代数中更是一个不可缺少的工具. 本章主要讨论 n 阶行列式的定义、性质及计算方法，进而介绍用行列式求解一类特殊线性方程组的克莱姆法则.

1.1　行列式的定义

1.1.1　2 阶和 3 阶行列式

我们从解线性方程组引进 2、3 阶行列式.

含有两个未知量两个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用加减消元法分别消去方程组(1.1)中的 x_1、x_2，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2}$$

是线性方程组(1.1)的解.

我们用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为 2 阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.3}$$

数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式(1.3)的元素或元. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 2 阶行列式含有两行两列(横排叫做行，竖排叫做列). 例如，a_{11}，a_{12} 构成行列式的第一行，a_{12}，a_{22} 构成行列式的第二列. 由式(1.3)可知，2 阶行列式是这样两项的代数和：一项是左上角到右下角的对角线(图 1.1 中的实连线，称为主对角线)上的两个数的乘积，取正号；另一项是右上角到左下角(图 1.1 中的虚连线，称为副对角线)上两个数的乘积，取负号. 于是 2 阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上的两元素之

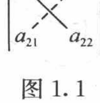


图 1.1

积所得的差.

根据 2 阶行列式的定义,式(1.2)中的两个分子可分别写成

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$,$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$,则方程组(1.1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

其中分母是方程组(1.1)的系数按它们在方程组中的次序排列构成的行列式,称为方程组的系数行列式;分子是用常数项 b_1,b_2 分别替换系数行列式中 x_1 所在列的系数和 x_2 所在列的系数后构成的 2 阶行列式.

例 1.1 求解线性方程组 $\begin{cases} 2x+4y=1 \\ x+3y=2 \end{cases}$.

解 因为 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6-4=2$,$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=3-8=-5$,$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3$,

所以
$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{5}{2},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{3}{2}.$$

类似地,对于三元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

其系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,表示的代数和为 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$,称为 3 阶行列式.

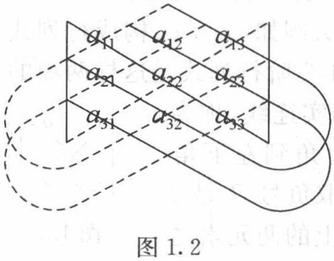


图 1.2

上述定义表明,3 阶行列式含 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其规律遵循图 1.2 所示的对角线法则:图中的三条实线看作是平行于主对角线的连线,实线上连接的三个元素的乘积取正号;三条虚线看作是平行于副对角线的连线,虚线上连接的三个元素的乘积取负号.然后这6 项

之和即为3阶行列式的值.

若令 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$,

则当系数行列式 $D\neq 0$ 时,方程组(1.4)的求解公式为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2 求3阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{vmatrix}$ 的值.

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D=&1\times 5\times(-9)+4\times(-8)\times 3+(-7)\times 6\times 2-3\times 5\times(-7)\\ &-2\times 4\times(-9)-1\times(-8)\times 6=0. \end{aligned}$$

注:对角线法则仅适用于2阶与3阶行列式,对于4阶及更高阶的行列式,可以采用递归法做定义.

1.1.2 n 阶行列式的定义

类似于2、3阶行列式,把 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称为 n 阶行列式,简记作 $\det(a_{ij})$.n 阶行列式表示一个数,把这个数称为此行列式的值.行列式通常指所对应的行列式的值.

为了给出 n 阶行列式的值的定义,先给出行列式的元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的余子式与代数余子式的概念.

定义 1.1 把 n 阶行列式(1.5)中的元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列删去后,剩下的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式(记做 M_{ij}),即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

将 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式,记做 A_{ij}.

下面通过分析2、3阶行列式的展开式,给出 n 阶行列式的定义.

2 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12};$$

3 阶行列式

$$\begin{aligned} D=&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ =&a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ =&a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}) \\ =&a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ =&a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

可见,2 阶与 3 阶行列式都等于第一行各个元素与其对应的代数余子式的乘积之和.这称为行列式按第一行展开,它们都是用一些低阶行列式表示高一阶的行列式.因此,人们自然会想到用这种递归的方法来定义一般的 n 阶行列式.

定义 1.2　n 阶行列式(1.5)是一个代数和式.当 $n=1$ 时,定义

$$D=|a_{11}|=a_{11};$$

当 $n\geqslant 2$ 时,定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

其中 $A_{1j}(j=1,2,\cdots,n)$为 D 中元素 a_{1j} 的代数余子式.

由定义可知,n 阶行列式的值是由其 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$构成的 n 次齐次多项式,它共有 $n!$ 项,每一项都是不同行不同列的 n 个元素的乘积,在全部 $n!$ 项中,带正号与带负号的项各占一半(以上结论可根据定义,用数学归纳法证明).当第一行元素为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 时,n 阶行列式是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次多项式.

特别注意的是,1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$,不要与数的绝对值混淆.

例 1.3　计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$的值.

解　根据定义得

$$\begin{aligned} D&=3\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &=3\times 2\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$=3\times2\times(-5+4)=-6.$$

例 1.4 证明:下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 由定义得

$$D=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理可得,上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 1.5 证明:副对角行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$

证 $D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$=(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}a_{1,n}a_{2,n-1}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{3,n-2} \\ 0 & \cdots & a_{4,n-3} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(-1)^{1+n}\times(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}|a_{n1}|$$

$$=(-1)^{(n-1)+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-1)+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

同理可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

1.2　行列式的性质

1.2.1　行列式的性质

利用 n 阶行列式的定义,可将 n 阶行列式表示为第一行各元素与其对应的代数余子式的乘积之和,这个过程可以依次进行下去,直到求出行列式的值.但是当行列式的阶数较高时,计算量是非常大的.为简化行列式的计算,我们将讨论行列式的性质.由于这些性质的证明几乎都可通过对行列式的阶数 n 用数学归纳法来完成,故不再一一写出其证明过程.

设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,记 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

即把 D 的各行换成同序号的列(行列互换),所得到的行列式记为 D^{T},D^{T} 称为 D 的转置行列式.显然,D 与 D^{T} 互为转置行列式.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1 可知,行列式的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.反之亦然.因此,以下叙述的性质均以行为例来说明.

性质 2 互换行列式的两行(列),行列式的值改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 如果行列式有两行(列)对应元素完全相同,则此行列式等于零.

性质 3 行列式的某一行(列)的所有元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

特别地,若行列式中有一行(列)的所有元素全为零,则此行列式的值为零.

推论 行列式某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质 4 如果行列式中有两行(列)对应元素成比例,则此行列式为零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,则此行列式可以写成两个行列式的和.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1.2.2 利用行列式的性质计算行列式

在行列式的计算中，通常用 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$ 表示第 i 行(列)与第 j 行(列)交换；用 $r_i \times k(c_i \times k)$ 表示用数 k 乘以第 i 行(列)元素；用 $r_i + kr_j(c_i + kc_j)$ 表示第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)的对应元素上去.

例 1.6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+(-2)r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+(-1)r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times (-1) \times (-2) \times (-2) = 4.$$

上述解法中，先用了运算 $r_1 \leftrightarrow r_2$，其目的是把 a_{11} 换成 1，从而利用运算 $r_i + (-a_{i1})r_1$，即可把 $a_{i1}(i=2,3,4)$ 变为 0.第二步把 $r_3 + r_1$ 和 $r_4 + (-2)r_1$ 写在一起，这是两次运算，并把第一次运算结果的书写省略了.

例 1.7 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

解 这个行列式的特点是各行 4 个元素之和都是 10.故把第 2,3,4 列同时加到第一列，提出公因子 10.

$$D \xlongequal[\substack{c_1+c_3 \\ c_1+c_4}]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \times \frac{1}{10}} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_1 \\ r_4+(-1)r_1}]{r_2+(-1)r_1} 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \times \frac{1}{2}} 20\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+r_2]{r_3+(-1)r_2} 20\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 1 & -3\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{vmatrix}=20\times 8=160.$$

例 1.8 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d\\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d\\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$.

解 $D\xlongequal[\substack{r_3+(-1)r_2\\ r_2+(-1)r_1}]{r_4+(-1)r_3}\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ 0 & a & a+b & a+b+c\\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c\\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+(-1)r_2]{r_4+(-1)r_3}\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ 0 & a & a+b & a+b+c\\ 0 & 0 & a & 2a+b\\ 0 & 0 & a & 3a+b\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+(-1)r_3}\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ 0 & a & a+b & a+b+c\\ 0 & 0 & a & 2a+b\\ 0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^4.$$

上述各例都是利用行列式的性质,将行列式化为上(下)三角行列式,而上(下)三角行列式的值等于对角线元素的乘积.

例 1.9 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 2 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 3 & 3 & 3 & 4 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解 此行列式的特点是除了对角线上的元素外,其余元素全为 3.特别地,第三行及第三列的所有元素均为 3.故可用第三行乘以(−1)加所有行,则此行列式多数元素均变为 0.

$$D_n\xlongequal[\substack{\vdots\\ r_n+(-1)r_3}]{\substack{r_1+(-1)r_3\\ r_2+(-1)r_3}}\begin{vmatrix}-2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3\end{vmatrix}$$