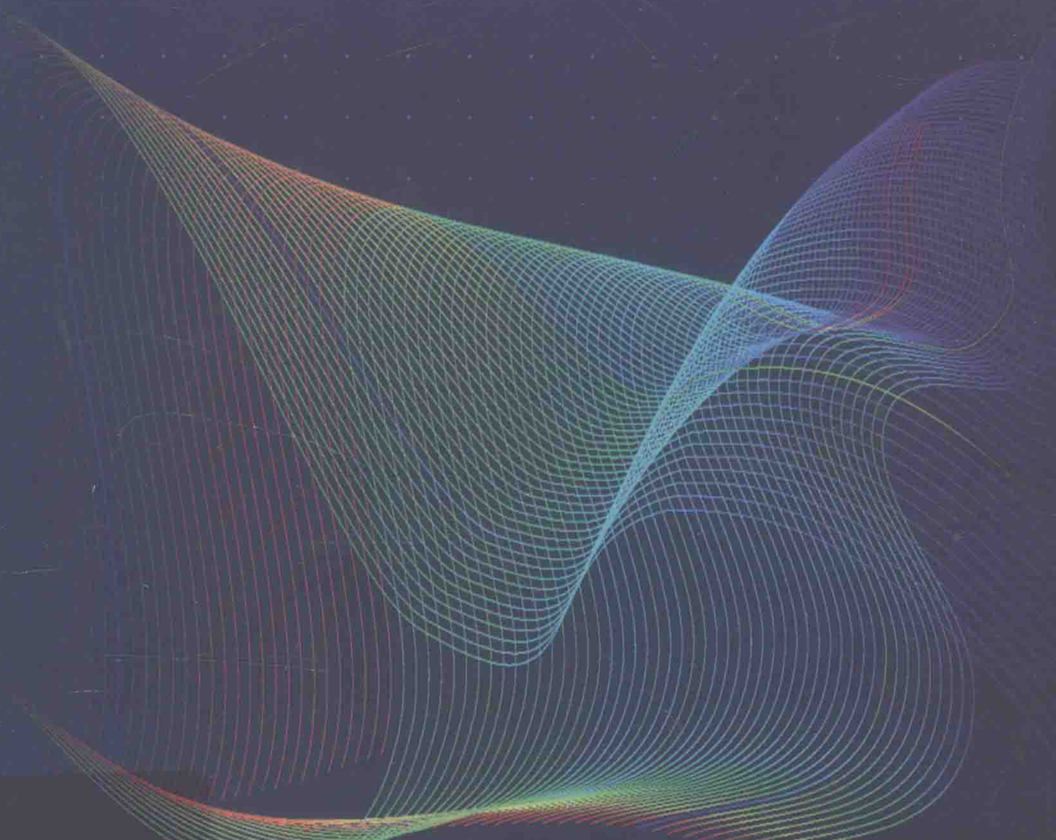
多介质流体界面问题的数值模拟

赵 宁 王东红 著



科 学 出 版 社

多介质流体界面问题的数值模拟

赵　宁　王东红　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书详细介绍作者以及课题组成员多年来在流体力学多介质流动界面问题的数值模拟方法的研究成果。对于多介质流动界面问题的数值模拟，给出一系列高精度、有效实用的方法，包括 Lagrange 方法及 ALE 方法、界面捕捉方法和界面追踪方法，并进行大量的数值试验；重点介绍交错网格下的 Lagrange 高精度有限体积格式、格心型 Lagrange 高精度有限体积格式、守恒重映方法与 ALE 方法数值模拟、自适应 ALE 方法、Level-Set 重新初始化新方法、多介质流动的高分辨γ-model 和体积分数方法、强间断问题的 Level-Set 方法、大密度比水气流动的 Level-Set 方法和 Phase Field 方法、水气多介质问题的界面处理方法、界面追踪方法中的激波限制器研究、二维可压缩多介质问题的界面追踪方法、守恒界面追踪方法。

本书可作为计算数学、计算流体力学以及工程计算等专业的研究生、高年级本科生及相关的教师、研究工作者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

多介质流体界面问题的数值模拟/赵宁，王东红著. —北京：科学出版社，2016. 9

ISBN 978-7-03-049840-3

I. ①多…　II. ① 赵…　② 王…　III. ①计算流体力学 – 数值模拟　IV. ①O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 213789 号

责任编辑：惠　雪　焦慧从 / 责任校对：贾娜娜
责任印制：张　倩 / 封面设计：许　瑞

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 10 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2016 年 10 月第一次印刷　印张：20 1/4
字数：408 000

定价：89.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

计算流体力学的重要研究课题之一是对多介质流体界面的研究。在现实生活中，会遇到很多界面问题：固体中的热传导，如结晶增长、固化和熔化界面问题；自由面问题，如水波和波浪的发展；介质内部的速度、压强、密度等的间断或各种不稳定现象，如流体力学界面不稳定性中的 Richtmyer-Meshkov 和 Richtmyer-Taylor 不稳定性，它是惯性约束热核聚变研究中的重要物理现象。因为涉及科学工程、化学工程、生物工程、水利水电、电子技术等领域的发展，所以多介质流体界面问题的研究具有极为重要的工程应用背景，同时又有重大的理论意义。

对于流体力学多介质流动界面问题，本书提出了一系列实用且有效的数值求解方法，并进行了大量的数值模拟。本书主要内容分为 4 部分，分别为基础知识、Lagrange 方法及任意 Lagrange -Euler 方法、界面捕捉方法、界面追踪方法。本书的主要内容是作者以及课题组成员多年来对流体力学多介质流动界面问题研究成果的总结。课题组成员王永健、张学莹、徐爽、卢海天等为本书撰写做出了重要贡献。

本书的宗旨是为那些已经具有数值模拟和工程计算基础，特别是具有初步数值模拟实践的读者，提供解决复杂多介质流动界面问题的数值方法方面的帮助。期望能为同行的教学、科研工作提供一点助益。本书适合从事内爆动力学、惯性约束聚变、界面不稳定、高速冲击等领域数值模拟研究与应用的科技工作者阅读使用，也可作为高等院校计算数学和计算流体力学专业研究生的参考书。

本书的出版得到了国家自然科学基金项目（10576015，91130030）的资助，同时还要感谢科学出版社的同志，是他们的支持和辛苦劳动，本书才以较高的出版质量奉献给读者。

由于本书涉及内容比较广泛，各种计算方法都在不断发展中，且作者的学术水平有限，书中不足和疏漏之处在所难免，热诚地欢迎各位同行专家和读者批评指正。

赵　宁

2015 年 12 月于南京

目　录

前言

第一部分　基础知识

第 1 章　计算流体力学基础……3
1.1　流体力学方程……3
1.1.1　基本的 Navier-Stokes 方程……3
1.1.2　状态方程的一般形式……4
1.1.3　直角坐标系下的 Navier-Stokes 方程和 Euler 方程……5
1.1.4　任意 Lagrange-Euler 守恒方程……6
1.2　间断条件、弱解以及熵条件……7
1.2.1　间断条件……7
1.2.2　弱解以及熵条件……8
1.3　Riemann 问题……10
参考文献……15

第二部分　Lagrange 方法及任意 Lagrange-Euler 方法

第 2 章　Lagrange 方法及任意 Lagrange-Euler 方法介绍……19
2.1　问题的背景……19
2.2　ALE 方法国内外研究现状……20
2.2.1　Lagrange 方法高精度格式发展与现状……20
2.2.2　网格重构方法的发展与现状……21
2.2.3　物理量重映方法的发展与现状……22
2.3　第 3 ~ 7 章的主要内容……25
参考文献……26
第 3 章　交错网格的高精度有限体积格式……31
3.1　高精度有限体积格式……31
3.1.1　变量控制体……31
3.1.2　ENO 多项式重构技术……32
3.1.3　交错网格的 ENO 型高精度有限体积格式……33
3.1.4　边界条件……36

3.2 数值模拟与验证 ······ 36
3.2.1 一维算例 ······ 36
3.2.2 精度测试 ······ 38
3.3 小结 ······ 39
参考文献 ······ 39
第 4 章 格心型高精度有限体积格式 ······ 40
4.1 格心型 LSM 型高精度 Lagrange 格式 ······ 40
4.1.1 变量控制体 ······ 40
4.1.2 空间离散 ······ 41
4.1.3 最小二乘法重构多项式技术 ······ 43
4.2 精度测试和验证 ······ 45
4.2.1 精度测试 ······ 45
4.2.2 收敛性测试 ······ 45
4.2.3 非振荡测试 ······ 46
4.3 格心型 ENO 型高精度 Lagrange 格式 ······ 48
4.4 数值模拟与验证 ······ 49
4.4.1 精度测试 ······ 49
4.4.2 收敛性测试 ······ 50
4.4.3 非振荡测试 ······ 51
4.5 小结 ······ 52
参考文献 ······ 53
第 5 章 守恒重映方法 ······ 54
5.1 守恒重映和守恒量 ······ 54
5.2 守恒重映方法 ······ 56
5.2.1 两个任意凸多边形的相交计算 ······ 56
5.2.2 一类通用重映方法 ······ 57
5.3 ENO 守恒重映算法 ······ 58
5.4 数值验证 ······ 60
5.5 近似积分守恒重映方法 ······ 62
5.5.1 ENO 近似积分守恒重映方法 ······ 64
5.5.2 LSM 近似积分守恒重映方法 ······ 66
5.6 小结 ······ 68
参考文献 ······ 68
第 6 章 网格重分与 ALE 方法数值模拟 ······ 70
6.1 网格技术 ······ 70

6.1.1 结构网格生成技术……70
6.1.2 网格重分技术……71
6.2 ALE 方法数值模拟……73
6.2.1 一维问题……74
6.2.2 二维问题……77
6.3 小结……81
参考文献……81
第 7 章 自适应 ALE 方法……82
7.1 自适应网格的 ALE 方法……82
7.1.1 运动网格方法的自适应重构网格技术……82
7.1.2 自适应网格 ALE 算法……84
7.1.3 自适应 ALE 方法数值模拟……84
7.2 小结……89
参考文献……90

第三部分 界面捕捉方法

第 8 章 界面捕捉方法介绍……93
8.1 多介质流体力学的界面捕捉方法……93
8.2 虚拟流体方法……96
8.3 水气运动模拟方法……98
8.4 第 9 ～ 14 章的主要内容……98
参考文献……100
第 9 章 Level-Set 重新初始化新方法……103
9.1 Level-Set 方程……103
9.2 用 FMM 重新初始化 Level-Set 函数……105
9.2.1 Eikonal 方程 $|\nabla u| = F(x,y)$ 的求解……105
9.2.2 构造延拓速度的方法……107
9.3 Level-Set 重新初始化新方法……109
9.4 数值实验……110
9.5 小结……114
参考文献……114
第 10 章 多介质流动的高分辨率 γ-model 和体积分数方法……115
10.1 界面捕捉等效方程……115
10.1.1 γ 方程的探讨……115
10.1.2 捕捉界面的等效方程……116

10.2 γ-model 方法的控制方程 ······ 118
10.2.1 二维耦合形式的方程组 ······ 118
10.2.2 三维问题的控制方程 ······ 119
10.3 体积分数方法 ······ 120
10.4 (M)WENO 插值 ······ 122
10.4.1 WENO 插值多项式的构造 ······ 122
10.4.2 MWENO 插值重构 ······ 124
10.5 多介质流体耦合型方程组（M）WENO 离散 ······ 125
10.6 中心型格式 ······ 129
10.7 NND 差分格式 ······ 131
10.8 数值算例 ······ 132
10.9 小结 ······ 138
参考文献 ······ 139
第 11 章 强间断问题的 Level-Set 方法 ······ 141
11.1 虚拟流体的构造 ······ 141
11.2 激波速度的计算 ······ 142
11.3 标量方程的间断跟踪方法 ······ 144
11.4 变量外推技术 ······ 145
11.5 推广到多维问题 ······ 147
11.6 数值方法 ······ 149
11.7 数值实验 ······ 150
11.8 小结 ······ 155
参考文献 ······ 155
第 12 章 基于 Level-Set 方法的大密度比水气流动模拟研究 ······ 157
12.1 控制方程 ······ 157
12.2 变密度投影算法 ······ 158
12.3 界面处理 ······ 159
12.4 表面张力的计算 ······ 160
12.5 算法总结 ······ 161
12.6 数值离散方法 ······ 161
12.6.1 对流项的离散 ······ 162
12.6.2 黏性项的离散 ······ 163
12.6.3 曲率的离散求解 ······ 164
12.6.4 变密度投影法的数值离散 ······ 164
12.6.5 时间方向上的离散 ······ 165

12.6.6 时间步长与边界条件 ······ 166
12.7 数值算例 ······ 166
12.7.1 收敛分析 ······ 166
12.7.2 表面张力的影响 ······ 172
12.7.3 黏性力的影响 ······ 176
12.7.4 水平方向运动的水滴落地 ······ 177
12.7.5 多水滴运动模拟 ······ 178
12.8 小结 ······ 179
参考文献 ······ 179
第 13 章 大密度比水气运动问题的 Phase Field 方法研究 ······ 181
13.1 Phase Field 方法 ······ 182
13.1.1 C-H 方程 ······ 182
13.1.2 自由内能 ······ 184
13.1.3 相变量初始化及表面张力处理 ······ 185
13.2 流场模拟和离散方法 ······ 185
13.2.1 求解不可压多介质流场的 Boltzmann 方法及离散方法 ······ 185
13.2.2 投影方法 ······ 187
13.2.3 投影方法的离散格式 ······ 189
13.2.4 C-H 方程的离散求解 ······ 190
13.3 边界条件和时间步长 ······ 192
13.3.1 边界条件 ······ 192
13.3.2 时间步长 ······ 192
13.4 数值算例及分析 ······ 192
13.4.1 PF-LBM 模型数值算例 ······ 192
13.4.2 PF-PM 模型数值算例 ······ 202
13.5 小结 ······ 207
参考文献 ······ 208
第 14 章 针对水气多介质问题的界面处理方法 ······ 210
14.1 数值方法 ······ 210
14.2 水气 Riemann 问题的解 ······ 211
14.3 水气多介质问题的界面处理方法 ······ 214
14.3.1 一维问题中定义界面边界条件 ······ 215
14.3.2 二维问题中定义界面边界条件 ······ 216
14.4 表面张力与时间步长 ······ 218
14.4.1 表面张力 ······ 218

14.4.2 时间步长 …… 219
14.5 算法小结 …… 220
14.6 数值算例 …… 220
14.6.1 一维算例 …… 220
14.6.2 二维算例 …… 225
14.7 小结 …… 231
参考文献 …… 231

第四部分 界面追踪方法

第 15 章 界面追踪方法介绍 …… 235
15.1 多介质流体界面追踪方法的研究现状 …… 235
15.2 第 16 ~ 19 章的主要内容 …… 236
参考文献 …… 237
第 16 章 界面追踪方法中的激波限制器的研究 …… 241
16.1 Euler 方程的离散 …… 241
16.2 界面追踪方法 …… 242
16.2.1 界面位置的确定 …… 242
16.2.2 预估校正方法 …… 243
16.3 激波限制器 …… 244
16.3.1 界面处 Riemann 问题初始值的确定 …… 244
16.3.2 激波限制器中参数的确定 …… 247
16.3.3 激波限制器的开关状态 …… 251
16.4 数值算例及分析 …… 252
16.5 小结 …… 264
参考文献 …… 265
第 17 章 可压缩多介质流动的界面追踪方法 …… 266
17.1 数值方法 …… 266
17.1.1 求解可压缩 Euler 方程 …… 266
17.1.2 界面追踪 …… 267
17.1.3 虚拟流体区域的判定 …… 268
17.1.4 真实虚拟流体方法 …… 269
17.1.5 方法步骤总结 …… 270
17.2 数值算例 …… 270
17.2.1 激波管 …… 270
17.2.2 激波气泡相互作用 …… 271

17.2.3 Richtmyer-Meshkov 不稳定算例 …… 273
17.2.4 气水界面 …… 276
17.3 小结 …… 277
参考文献 …… 277
第 18 章 可压缩多介质流动的 RKDG 界面追踪方法 …… 279
18.1 数值方法 …… 279
18.2 界面处理 …… 282
18.2.1 界面追踪方法 …… 282
18.2.2 RGFM …… 283
18.2.3 方法步骤总结 …… 284
18.3 数值算例 …… 284
18.4 小结 …… 290
参考文献 …… 291
第 19 章 一维多介质可压缩流动的守恒界面追踪方法 …… 293
19.1 单介质计算方法 …… 294
19.2 多介质守恒方法 …… 295
19.3 方法的守恒性 …… 298
19.4 数值算例 …… 298
19.5 小结 …… 308
参考文献 …… 308
索引 …… 311

第一部分
基础知识

第1章　计算流体力学基础

1.1　流体力学方程

1.1.1　基本的 Navier-Stokes 方程

流体力学的基本方程是计算流体力学的基础。流体的运动是用一组表达质量、动量、能量守恒关系的方程来描述的，在 CFD(计算流体力学) 中常把连续方程、动量方法和能量方程通称为纳维–斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程[1]。

在流场内无热源时，积分型 Navier-Stokes 方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho \mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\tau}^{*}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho E\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}\rho E\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\tau}^{*}\cdot\boldsymbol{u}-q)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.3}$$

式中，Ω 为积分方程的控制体，$\partial\Omega$ 为控制体表面，ρ 为密度，$\boldsymbol{u}$ 为流体运动的速度矢量，$\boldsymbol{F}$ 代表外力，E 是总能，$\rho E=\rho e+\dfrac{\rho}{2}\boldsymbol{u}^2$。对于牛顿（Newton）流体，$\boldsymbol{\tau}^{*}=-p\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\tau}$，其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位张量，p 为压力，$\boldsymbol{\tau}$ 为黏性应力张量。

在直角坐标系中，$\boldsymbol{\tau}$ 的分量形式为

$$\tau_{xx}=2\mu u_x+\lambda(u_x+v_y+w_z),\quad \tau_{yy}=2\mu v_y+\lambda(u_x+v_y+w_z)$$

$$\tau_{zz}=2\mu w_z+\lambda(u_x+v_y+w_z),\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu(u_y+v_x)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu(v_z+w_y),\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu(u_z+w_x)$$

其中，u,v,w 为速度矢量在直角坐标系 x,y 和 z 方向的分量，μ 是黏性系数，$\lambda=-\dfrac{2}{3}\mu$。方程（1.3）中的 q 为热通量，根据傅里叶（Fourier）导热定律，有 $q=-k\nabla T$，k 为热传导系数。

利用广义牛顿定律，动量方程（1.2）和能量方程（1.3）也可以分别表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}+p\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho E\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}(\rho E+p)\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{u}+k\nabla T)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.5}$$

方程（1.1）～ 方程（1.3）对应的微分型方程为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{F}+\nabla\cdot\boldsymbol{\tau}^* \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho E\boldsymbol{u})=\rho\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}-\nabla\cdot q+\nabla\cdot(\boldsymbol{\tau}^*\cdot\boldsymbol{u}) \tag{1.8}$$

上面给出了描述牛顿流体运动的积分型和微分型方程，这些方程都是守恒的，都可以称为守恒定律。

1.1.2　状态方程的一般形式

为了使上述方程封闭，还应当补充流体的状态方程，对于完全气体，有

$$p=(\gamma-1)\rho e \tag{1.9}$$

真实流体一般采用 Mie-Grüneisen状态方程[2,3]

$$p(\rho,e)=\Gamma(\rho)[\rho e-\rho e_{\mathrm{ref}}(\rho)]+p_{\mathrm{ref}}(\rho) \tag{1.10}$$

其中，$\Gamma(\rho)=\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial p}{\partial e}\right)_{\rho}$ 是介质的Grüneisen系数，$e_{\mathrm{ref}}(\rho)$ 和 $p_{\mathrm{ref}}(\rho)$ 均是密度的函数，分别表示压强和比内能在某参考曲线上的状态值。

通常情况下，压强和比内能可以表示为

$$\begin{aligned}p(V,T)&=p_{\mathrm{ref}}(V)+\frac{\Gamma(V)}{V}e_T(V,T)\\ e(V,T)&=e_{\mathrm{ref}}(V)+e_T(V,T)\end{aligned} \tag{1.11}$$

其中，T 是热力学温度，$V=1/\rho$ 是质量体积。

假设 $\Gamma(V)$ 仅是变量 V 的函数，具体可表示为

$$\Gamma(V)=\Gamma_0\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\alpha} \tag{1.12}$$

在这里，$\Gamma_0=\gamma_0-1$ 是 $V=V_0$ 时的Grüneisen系数。当 $\gamma_0>1$ 时，γ_0 便是通常定义下的比热比；α 是无量纲参数且 $\alpha\in[0,1]$。$e_{\mathrm{ref}}(\rho)$ 和 $p_{\mathrm{ref}}(\rho)$ 的解析式依赖于具体的参考曲线。

声速平方的表达式为

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e + \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial p}{\partial e}\right)_\rho \\
&= \left(\Gamma + 1 + \rho\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(\frac{p - p_{\mathrm{ref}}}{\rho}\right) + \Gamma\frac{p_{\mathrm{ref}}}{\rho} + p'_{\mathrm{ref}} - \Gamma\rho e'_{\mathrm{ref}} \\
&= \varphi + \psi\frac{p}{\rho}
\end{aligned}
\tag{1.13}
$$

其中，$\Gamma', p'_{\mathrm{ref}}, e'_{\mathrm{ref}}$ 分别表示 $\Gamma, p_{\mathrm{ref}}, e_{\mathrm{ref}}$ 对变量 ρ 的偏导数。

可压缩气体和水的 Stiffen 状态方程可以看成是 Mie-Grüneisen状态方程的一种特殊形式，且 $\Gamma(\rho) = \gamma - 1$，$e_{\mathrm{ref}}(\rho) = B/\rho$，$p_{\mathrm{ref}}(\rho) = -B$。当 γ=1.4，B=0 时，其为理想气体状态方程；当 γ=7.15，B=3309 时，其为水的状态方程。

1.1.3　直角坐标系下的 Navier-Stokes 方程和 Euler 方程

不计质量力的情况下，在直角坐标系中，守恒型 Navier-Stokes 方程可以写为下列向量形式

$$
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_{\mathrm{v}})}{\partial x} + \frac{\partial(\boldsymbol{G} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{v}})}{\partial y} \frac{\partial(\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_{\mathrm{v}})}{\partial z} = 0 \tag{1.14}
$$

其中

$$
\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u v \\ \rho u w \\ u(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u v \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ v(\rho E + p) \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u w \\ \rho v w \\ \rho w^2 + p \\ w(\rho E + p) \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{F}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + k\dfrac{\partial T}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad
\boldsymbol{G}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + k\dfrac{\partial T}{\partial y} \end{bmatrix}
$$

$$
\boldsymbol{H}_{\mathrm{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u\tau_{xz} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + k\dfrac{\partial T}{\partial z} \end{bmatrix}
$$

若忽略 Navier-Stokes 方程中的黏性和热传导，便得到 Euler 方程

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial y}+\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial z}=0 \tag{1.15}$$

方程（1.14）和方程（1.15）称为向量守恒型方程。

1.1.4 任意 Lagrange-Euler 守恒方程

任意 Lagrange-Euler（ALE）方法是在一个以任意速度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)$ 运动的参考坐标系中观察流体运动。当参考坐标系的运动速度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)=0$ 时，该方法是 Euler 方法；当运动速度 $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t)$ 和流场的速度相等时，该方法就是 Lagrange 方法[4]。

在没有热传导和外源，并且忽略质量力的情况下，设 $\Omega(t)$ 为流场中的任意一个活动区域，其边界 $\partial\Omega(t)$ 的速度为 $\boldsymbol{D}=(D_1,D_2,D_3)^{\mathrm{T}}$。$\boldsymbol{D}$ 为 $x\in\partial\Omega(t)$ 和 t 的函数。$\rho(\boldsymbol{x},t)$，$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 和 $E(\boldsymbol{x},t)$ 分别表示在 x 点处 t 时刻的密度、速度向量和单位质量的总能量。$\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega(t)$ 上的单位外法向量。ALE 观点下的质量、动量和能量守恒方程分别为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega(t)}\rho(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega(t)}\rho\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega(t)}p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho E\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega(t)}\rho E(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega(t)}p\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.18}$$

如果所取的控制体 $\Omega(t)$ 是静止的，守恒方程（1.16）～方程（1.18）中 $\boldsymbol{D}=0$，便得到 Euler 观点下的守恒流体力学方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega(t)}\rho\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho\boldsymbol{u}\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega(t)}\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega(t)}p\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho E\mathrm{d}V=-\int_{\partial\Omega(t)}\rho E\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S-\int_{\partial\Omega(t)}p\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S \tag{1.21}$$

对守恒方程（1.19）～方程（1.21），在直角坐标系中利用高斯公式可得方程（1.15）。

如果所取的控制体 $\Omega(t)$ 的边界速度等于流体的速度，在守恒方程（1.16）～方程（1.18）中取 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{u}$，便得到 Lagrange 观点下的守恒流体力学方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega(t)}\rho\mathrm{d}V=0 \tag{1.22}$$