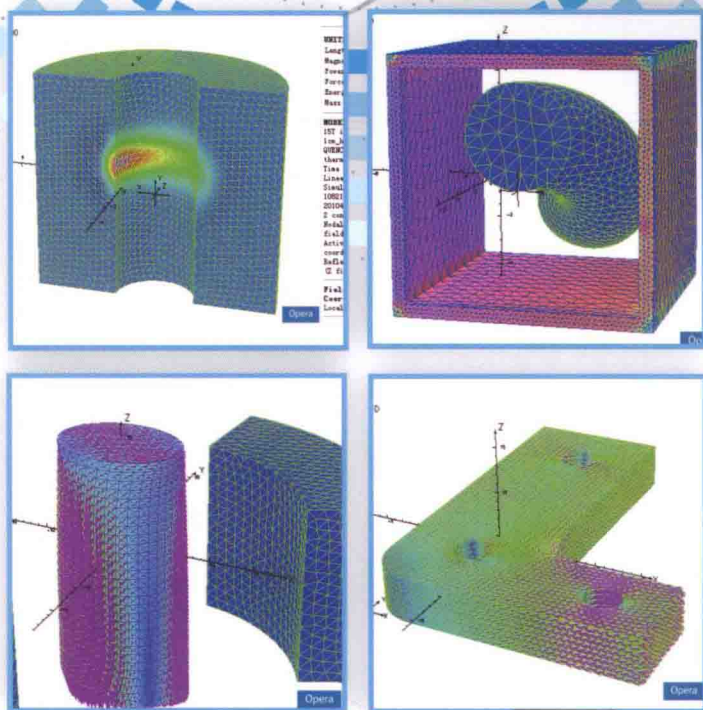


李毅 王秋良 著

# Opera3D

## 工程电磁场计算及多场耦合分析



清华大学出版社





李毅.王秋良 著

**Opera3D**

**工程电磁场计算及多场耦合分析**

清华大学出版社  
北京

## 内 容 简 介

Opera3D是一套具有很高专业性和准确性的三维电磁场分析软件,可处理各类电磁场问题及其相互耦合问题。

本书是有关如何操作该软件的工具书或自学手册。第1章简要介绍软件所用的电磁场计算理论、有限元法及积分法;第2章介绍建模程序及后处理程序的基本操作界面;第3~6章对各种三维电磁场问题进行范例解析,包括静态电磁场、时变电磁场、运动物体的电磁场、温度场等;第7章为多场耦合分析的范例介绍;第8章为电磁设计优化器的使用介绍。

本书的每一个范例都从最基本的几何建模到最后的后处理进行详细阐述,使工程人员不必从书的第1章开始便可以针对所关注的章节进行软件的学习,极大地节省了自学时间。

本书可供包括电子工程和电气工程等电磁场应用领域的工程技术人员、大学理学教师以及相关专业的本科生、研究生或博士生自学参考。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

Opera3D 工程电磁场计算及多场耦合分析/李毅,王秋良著.--北京:清华大学出版社,2016  
ISBN 978-7-302-43980-6

I. ①O… II. ①李… ②王… III. ①电磁场—应用软件 IV. ①O441.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 120629 号

责任编辑:梁颖  
封面设计:常雪影  
责任校对:李建庄  
责任印制:宋林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质量反馈:010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

课件下载: <http://www.tup.com.cn>, 010-62795954

印 装 者:北京鑫海金澳印刷有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:19.25

字 数:468千字

版 次:2016年10月第1版

印 次:2016年10月第1次印刷

定 价:79.00元

产品编号:068415-01

# 前言

## FOREWORD

电子、电气技术广泛应用于工业生产、科学研究领域,是人类生产生活中不可或缺的技术。各种电气装置的工作状态或物理特性均由电磁场和其他相关物理场决定。随着市场竞争的日趋激烈,电气制造商们需要越来越高效且低成本的电气产品。随着科研或军工领域技术要求的不断增长,需要设计出更高性能的电气装置。为了降低研发成本及优化设计参数,对电磁场问题进行计算仿真成为取代花费巨大的模拟试验的高效可靠的重要手段。随着计算机技术及有限元方法的发展,利用有限元计算机仿真成为复杂电磁场问题计算分析及优化设计必不可少的手段。

Opera3D(OPERating environment for Electromagnetic Research and Analysis)三维电磁分析软件正是在这一背景下应运而生,并不断发展。Opera3D 是英国矢量场软件公司(Vector Fields Software)经过多年研发并仍在不断发展的一款三维电磁场分析及优化软件。其应用领域日益扩大,主要包括电机、交直流传动、汽车制造、航空航天、风力发电、生物工程、医疗器械、高能物理、超导磁体、核磁共振成像系统、钢铁冶金、国防军工等诸多领域。该软件凭借其准确性及专业性已被 GE(通用电气)、SIMENS(西门子)、ITER(国际热核聚变实验堆计划)、美国能源部等诸多国际知名企业和著名科研机构采用和验证,在国际电磁场计算领域享有很高的知名度。

Opera3D 是一套完整的电磁场分析软件。它集成了多个计算模块,包括静磁场模块 TOSCA、交流电磁场模块 ELEKTRA、粒子束分析模块 SCALA、直线或旋转电机模块 CARMEN、高频电磁场模块 SOPRANO、磁滞分析模块 DEMAG、超导磁体失超仿真模块 QUENCH、应力场模块 STRESS 及温度场模块 TEMPO 等,同时还包括将这些模块相互耦合的功能。每个模块的计算都通过建模及后处理完成。

Opera3D 软件具有很高的电磁场计算准确性,可对线性及非线性材料、各向同性及各向异性材料、磁滞材料进行电磁场分析;有限元网格除了具有基本的四面体网格,还有六面体网格、棱台网格、壳网格及混合网格等,建模后各部分的网格参数均可以调整设置,并生成网格质量评估供使用者采纳或调整有限元网格参数;对于纯导体的电磁场分析,Opera3D 未采用有限元法,而采用数值积分计算法,不仅提高了计算速度,还大幅提高了计算精度,弥补了有限元法在电磁场计算精度上的不足,成为高精度磁场计算领域如高均匀度超导磁体设计中高效可靠的计算工具。

现今,国内外有关如何操作 Opera3D 软件的资料仅有随软件附送的英文帮助文档。该

文档编撰不符合一般工具书的阅读习惯,案例较少且大多介绍简略,不利于不同专业的工程人员根据自己所关注的领域进行自学和参考。本书是国内外至今唯一一本有关如何操作该软件的工具书或自学手册。本书包含基础电磁理论、有限元方法的简要介绍,并对几乎每一种三维电磁场问题进行案例解析,包括静态电磁场、时变电磁场、运动物体的电磁场、温度场等;本书还包括多场耦合分析的详细范例使用介绍,以及电磁设计优化器的使用介绍;不同于Opera3D自带帮助文档,本书对每一个范例都从最基本的几何建模到最后的后处理进行详细阐述,使工程人员不必从书的第1章看起便可以针对所关注的领域进行软件的操作学习,极大地节省了自学时间,提高工作效率。

本书由中国科学院电工研究所李毅博士编写,王秋良老师对全书的内容及结构提出了指导建议。由于编者水平有限,写作时间仓促,书中难免有不妥、疏漏之处,竭诚欢迎广大读者发电子邮件到编者邮箱 [liyi@mail.iee.ac.cn](mailto:liyi@mail.iee.ac.cn),对本书提出批评和建议。

祝大家学习愉快、工作顺利。

编者

2016年8月



# 目录

## CONTENTS

<b>第 1 章 Opera3D 软件简介及电磁场基本理论</b> .....	1
1.1 Opera3D 软件简介 .....	1
1.2 电磁场基本理论 .....	3
1.3 有限元方法简介 .....	6
1.4 边界条件 .....	8
<b>第 2 章 Opera3D 开发及应用环境</b> .....	10
2.1 Opera3D 建模的基本术语 .....	10
2.2 Opera Manager .....	11
2.3 Modeller 开发环境 .....	12
2.4 Post-Processor 应用环境 .....	17
<b>第 3 章 三维静磁场</b> .....	23
3.1 三维静磁场分析范例——永磁 MRI .....	23
3.1.1 几何模型建立 .....	24
3.1.2 指定实体属性 .....	29
3.1.3 解算模块设置 .....	31
3.1.4 设定材料参数 .....	32
3.1.5 设定边界条件或对称性 .....	35
3.1.6 建立有限元网格和生成解算数据进行解算 .....	36
3.1.7 后处理 .....	38
3.2 三维静磁场分析范例——超导线圈+铁磁 MRI .....	45
3.2.1 几何模型建立 .....	45
3.2.2 指定实体属性 .....	48
3.2.3 解算模块设置 .....	49
3.2.4 设定材料参数 .....	50
3.2.5 设定边界条件或对称性 .....	51



3.2.6 建立有限元网格,生成解算数据进行解算 ..... 53

3.2.7 后处理 ..... 55

3.3 Post-Processor: 单纯线圈产生的磁场 ..... 60

3.3.1 几何模型建立 ..... 60

3.3.2 场值计算 ..... 63

3.3.3 结果输出 ..... 64

**第 4 章 三维静电场** ..... 66

4.1 三维静电场分析范例——平板电容 ..... 66

4.1.1 几何模型建立 ..... 66

4.1.2 指定实体属性 ..... 69

4.1.3 设定边界条件 ..... 71

4.1.4 改进网格质量及设置对称性 ..... 73

4.1.5 解算模块设置 ..... 77

4.1.6 建立有限元网格并生成解算数据进行解算 ..... 77

4.1.7 后处理 ..... 80

4.1.8 改变几何参数重新计算 ..... 86

4.2 三维静电场分析范例——导电板内稳态电流场 ..... 91

4.2.1 几何模型建立 ..... 91

4.2.2 指定实体属性 ..... 98

4.2.3 设置材料参数 ..... 99

4.2.4 设定边界条件 ..... 99

4.2.5 设置背景空气域 ..... 102

4.2.6 解算模块设置 ..... 103

4.2.7 建立有限元网格并生成解算数据进行解算 ..... 103

4.2.8 后处理 ..... 108

**第 5 章 时变电磁场** ..... 117

5.1 暂态时变电磁场分析范例——金属冷屏内的涡流 ..... 117

5.1.1 几何模型建立 ..... 118

5.1.2 建立过渡空气域 ..... 124

5.1.3 指定实体属性 ..... 127

5.1.4 解算模块设置 ..... 131

5.1.5 设定材料参数 ..... 132

5.1.6 设定时变激励源 ..... 133

5.1.7 设定边界条件或对称性 ..... 134

5.1.8 建立有限元网格、生成解算数据进行解算 ..... 135

5.1.9 后处理 ..... 138

5.2 稳态时变电磁场分析范例——考虑趋肤效应的交变磁场加热铜板 ..... 146

5.2.1	几何模型建立 .....	147
5.2.2	指定实体属性 .....	150
5.2.3	解算模块设置 .....	151
5.2.4	设定材料参数 .....	152
5.2.5	设定边界条件或对称性 .....	153
5.2.6	建立有限元网格并生成解算数据进行解算 .....	154
5.2.7	后处理 .....	156
<b>第 6 章</b>	<b>运动物体的电磁场 .....</b>	<b>164</b>
6.1	静止场源与运动物体的电磁特性分析范例——金属棒在二极磁体中旋转 .....	164
6.1.1	几何模型建立 .....	165
6.1.2	指定实体属性 .....	166
6.1.3	解算模块设置 .....	168
6.1.4	设定材料参数 .....	169
6.1.5	设定体特性 .....	170
6.1.6	设定边界条件或对称性 .....	171
6.1.7	建立有限元网格并生成解算数据进行解算 .....	172
6.1.8	后处理 .....	175
6.2	场源运动的电磁特性分析范例——二极磁体围绕金属棒旋转 .....	182
6.2.1	几何模型建立 .....	183
6.2.2	指定实体属性 .....	185
6.2.3	解算模块设置 .....	189
6.2.4	设定材料参数 .....	191
6.2.5	设定体特性 .....	193
6.2.6	设定边界条件或对称性 .....	194
6.2.7	建立有限元网格并生成解算数据进行解算 .....	195
6.2.8	后处理 .....	199
<b>第 7 章</b>	<b>多物理场耦合 .....</b>	<b>208</b>
7.1	磁场温度场耦合分析范例——线圈交流场加热金属铜板 .....	208
7.1.1	电磁场模型的几何实体创建 .....	209
7.1.2	指定实体属性 .....	212
7.1.3	解算模块设置 .....	213
7.1.4	设定材料参数 .....	214
7.1.5	设定边界条件或对称性 .....	215
7.1.6	创建有限元网格并生成解算数据进行解算 .....	216
7.1.7	重建温度场模型 .....	218
7.1.8	温度场模型导出坐标 .....	225
7.1.9	交流电磁场模型中导入坐标并导出体功率密度 .....	226



7.1.10	温度场模型中导入体功率密度并进行解算 .....	228
7.1.11	后处理 .....	229
7.2	电流场磁场耦合分析范例——导线内电流场激发外包铁壳磁场 .....	231
7.2.1	电磁场模型的几何实体创建 .....	232
7.2.2	指定实体属性 .....	236
7.2.3	解算模块设置 .....	238
7.2.4	设定材料参数 .....	238
7.2.5	设定边界条件或对称性 .....	239
7.2.6	创建有限元网格并生成解算数据进行解算 .....	240
7.2.7	设置磁场模型 .....	243
7.2.8	静磁场模型导出坐标 .....	247
7.2.9	电流场模型中导入坐标并导出磁场强度作为一次场源 .....	248
7.2.10	静磁场模型中导入场源并进行解算 .....	250
7.2.11	后处理 .....	251
7.3	电热磁相互耦合范例——高温超导磁体失超过程分析 .....	257
7.3.1	超导线圈建模 .....	257
7.3.2	设定材料特性并指定材料属性 .....	261
7.3.3	设定电路参数 .....	264
7.3.4	设定对称性 .....	265
7.3.5	设置触发失超边界条件 .....	267
7.3.6	解算模块设置 .....	269
7.3.7	创建有限元网格并生成解算数据进行解算 .....	270
7.3.8	后处理 .....	273
<b>第 8 章</b>	<b>优化器</b> .....	<b>278</b>
8.1	降低多线圈磁体的磁场不均匀度：模型介绍 .....	278
8.2	建立导体线圈并参量化 .....	279
8.3	设置模型的优化参量 .....	282
8.4	建立用于优化器的有限元模型 .....	284
8.5	编写后处理命令脚本文件 .....	290
8.6	优化器设置 .....	293
8.7	优化计算 .....	295
<b>参考文献</b>	.....	<b>298</b>

# Opera3D软件简介及电磁场基本理论

## 1.1 Opera3D 软件简介

Opera3D 是 OPERating environment for Electromagnetic Research and Analysis(三维电磁场研究及分析平台)的简称,是英国矢量场软件公司(Vector Fields Software)经过近 30 年不断开发和完善的用于电磁场分析、电磁设备设计及优化的有限元软件。它计算准确、高效,在世界范围内广泛应用于工业工程、国防军事、科学研究等各领域,在业界具有很好的口碑。

有限元法是 Opera3D 计算及分析电磁场问题的主要方法,Opera3D 通过其 Modeller、Pre-Processor、Post-Processor 三个程序进行有限元建模、解算及后处理。Modeller 或 Pre-Processor 用于进行几何模型的建立,有限元网格的划分,物性材料的设定(例如对非线性、各向异性材料的描述),以及将所建有限元模型进行三维可视化用以检查。Post-Processor 对有限元模型的解算结果进行后处理,可计算电磁场强度及其相关物理量,并用图表及等高线等方式展示出来,还可以画出空间电荷在电磁场中的粒子轨迹。

Opera3D 主要包括以下 8 个电磁场及温度场的分析模块: TOSCA、ELEKTRA、SCALA、CARMEN、SOPRANO、DEMAG、QUENCH 和 TEMPO。

(1) TOSCA。主要对三维线性或非线性静磁场、静电场或静电流场进行分析。经过多年的完善,该模块的计算精度和计算效率都非常高。该模块基于不同区域设定总标量位(total scalar potential)或简化标量位(reduced scalar potential)方程,再利用有限元法处理待求电磁场。

(2) ELEKTRA。用于分析三维时变电磁场,包括涡流场。该模块共有三种分析模式:

暂态分析模式(TR)、稳态交流分析模式(SS)及涡流场分析模式(VL)。其中,涡流场分析可以处理直线或者旋转运动的导体在静电磁场中产生涡流的问题。涡流场分析问题适用于各部分只发生运动却无几何形变的情况,例如无限长导轨、转盘等。

(3) SCALA。在分析静电场中考虑带电粒子束产生的空间电荷效应。

(4) CARMEN。对直线电机或旋转电机进行暂态电磁场分析。考虑机械接触与耦合,从而决定移动部件的速度。

(5) SOPRANO。三维高频电磁场分析,包括两种分析模式:稳态交流模式及特征值提取。

(6) DEMAG。用于分析永磁材料的磁化过程,可以考虑三维变化电磁场及其涡流效应。

(7) QUENCH。用于模拟超导磁体中失超过程。该模型计算包括各种热源的温度场,以及由导体中变化电流产生的变化磁场。

(8) TEMPO。分析暂态或者稳态温度场。该温度场的热源可以是外部热源,也可以是由电磁场转化而来。电磁场可以通过其他模块计算得到,同时温度场的计算结果还可以反馈到材料物性,从而反过来影响电磁场,实现温度场与电磁场的相互耦合。

此外,还包括独立运行的 STRESS 模块,用于分析电磁力或温差产生的应力及应变。Optimizer 模块用于将模型参数化并对模型的多种方案解算和择优。

Opera3D 善于对各模块之间进行耦合协同分析,使不同模块同时在进程中解算,并通过各模块间的分析结果共享数据,从而实现耦合仿真。如:

#### (1) CARMEN

- 瞬态电磁场分析可以与应力分析进行耦合;
- 电磁场结果提供力学分析的应力数据;
- 力学分析提供电磁分析所需位置和运动姿态数据。

#### (2) 有耗介质

在 SCALA 和 TOSCA 中进行设置,用于计算低电导率材料的电场。

#### (3) 外部电路

所有瞬态电磁分析程序(CARMEN、DMAG、ELEKTRA/(SS and TR)、QUENCH)可以对外部电路进行建模,包括电压源、电流源、电阻、电容、二极管、开关等。

#### (4) QUENCH

可以同时分析以下问题:

- 电磁场计算的电流及磁场强度共同决定了超导线圈的临界电流,从而进行超导线圈热分析;
- 热效应分析得到的温度,反馈到电导率变化的电磁场中进行分析;
- 外部电路的电流。

#### (5) 涡流分析

导入 TEMPO 模块计算的温度结果,进行电导率修正。

#### (6) SCALA

计算电场和磁场混合场下的粒子运动轨迹,磁场由以下物质产生:线圈电流、粒子束、TOSCA 或者其他电磁分析程序的结果。

## (7) TOSCA

计算线圈电流产生的静磁场,还可以从其他分析模块中导入源数据。

## 1.2 电磁场基本理论

### 1. 标量势方程

Opera3D 依据 Maxwell(麦克斯韦)方程组求解电磁场,但是在求解具有不同特性空间的电磁场时,会采用不同的演化公式处理,从而与有限元法结合,得到更准确的计算结果。

任何三维静电磁场都可以表示为螺线场和旋度场之和。对于静电场而言,旋度分量为零,场可以由静电势  $V$  表示。电场强度  $\mathbf{E}$  表示为

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (1.2.1)$$

电通量密度  $\mathbf{D}$  的散度由电荷密度  $\rho$  决定:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.2.2)$$

将式(1.2.1)和式(1.2.2)联立,并引入介电常数张量  $\epsilon$ ,得到描述静电势的 Poisson(泊松)方程:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla V) = -\rho \quad (1.2.3)$$

其中  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ 。

类似地,电流场分析中有

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = 0 \quad (1.2.4)$$

其中,  $\sigma$  是电导率,且  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ 。

另一方面,静磁场一般包括螺线场和旋度场。在电流所在空间由电流产生的场是旋度场,而在该空间外则是螺线场,但是其标量势是多值的。由磁化物体产生的场是螺线场。因此,将全部的场分为两部分,从而可以比较容易得到简单的标量势表达式。

全磁场强度  $\mathbf{H}$  由简化磁场强度  $\mathbf{H}_m$  和导体磁场强度  $\mathbf{H}_s$  构成:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_m + \mathbf{H}_s \quad (1.2.5)$$

于是,简化磁场强度则可由简化磁标量势表示:

$$\mathbf{H}_m = -\nabla \phi \quad (1.2.6)$$

对于电流产生的静磁场,导体磁场强度可直接由积分得到:

$$\mathbf{H}_s = \int_{\Omega_j} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} d\Omega_j \quad (1.2.7)$$

由于磁通密度的散度永远是零,引入磁导率张量  $\mu$ ,并联立式(1.2.5)至式(1.2.7)便得到简化的磁标量势的偏微分方程:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla \phi) - \nabla \cdot \left( \mu \int_{\Omega_j} \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} d\Omega_j \right) = 0 \quad (1.2.8)$$

上述方程与静电场的 Poisson(泊松)方程非常相似,原则上可以用有限元法解算。然而使用这种方法的全磁场计算会产生很大误差,因此磁场的简化标量势方程并不可用。

这种误差主要是由于  $\mathbf{H}_m$  和  $\mathbf{H}_s$  空间变化差异很大导致:当  $\mathbf{H}_m$  通过有限元形函数的倒数代表,而  $\mathbf{H}_s$  却通过式(1.2.7)中的直接积分得到。在有些空间中,  $\mathbf{H}_m$  与  $\mathbf{H}_s$  还会存在相互抵消从而加剧这种误差。这种抵消尤其在非线性材料内部更为严重从而巨大的误差导致 Newton(牛顿)迭代中 Jacobi(雅克比)矩阵失准。

如果电流不在磁性材料内流动,则上述问题可以完全避免。在电流流动区域以外的空间中可用全磁标量势  $\Psi$  表示:

$$\mathbf{H} = -\nabla\Psi \quad (1.2.9)$$

并满足:

$$\nabla \cdot (\mu \nabla\Psi) = 0 \quad (1.2.10)$$

将全磁标量势与简化磁标量势结合便可以避免上述问题。简化磁标量势只能用在电流流动的区域,而全磁标量势则用在其他任何区域。但是实际上也有一些限定,即简化磁标量势需形状简单。因此,有时候需要对所求空间进行面剪切,从而得到单值标量势,一般情况系统会自动完成剪切过程(automatic cuts)。

## 2. 矢量势方程

矢量势方程用于 ELEKTRA、CARMEN、DEMAG、QUENCH 和 SOPRANO 等模块的有限元分析。对于低频电磁场,采用准静态 Maxwell 方程,忽略位移电流,有

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.2.12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2.13)$$

其中,

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.2.14)$$

$\sigma$  为电导率,  $\mathbf{u}$  为电磁空间场中物体的速度。速度的影响问题会在下一节的运动方程中进一步讨论。

根据式(1.2.13),磁通密度  $\mathbf{B}$  可以由一个矢量势函数得到:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.2.15)$$

## 3. 全磁矢量势与简化磁矢量势

ELEKTRA 及相关的 CARMEN、DEMAG 和 QUENCH 等模块使用全磁矢量势与简化磁矢量势分析随时间变化的电磁场问题。电流在自由空间的分布产生的磁场(如载有一定电流的细导线绕制的线圈产生的磁场)可以由 Biot-Savart(毕奥-萨伐尔)式(1.2.7)积分得到。对于除了此类源电流导体产生的磁场以外的磁场可以用简化磁矢量势  $\mathbf{A}_R$  描述,定义为

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}_s + \nabla \times \mathbf{A}_R \quad (1.2.16)$$

对于仅由全磁矢量势描述的空间,将式(1.2.11)到式(1.2.15)联立,得到如下关于  $\mathbf{A}$  的方程:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \right) \times \mathbf{A} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \sigma \nabla V \quad (1.2.17)$$

上述方程中电标量势  $V$  出现是由于式(1.2.12)的积分的非独一性。在自由空间中电标量矢可以设为零,且不失一般性。但对于导体空间,根据  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ,得到如下方程:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) + \nabla \cdot \left( \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.2.18)$$

这样电标量势和矢量势就都被唯一确定。

对于载有源电流的自由空间,使用简化矢量势,联立式(1.2.11)与式(1.2.16)得到如下关于  $\mathbf{A}_R$  的方程:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \right) \times \mathbf{A}_R = 0 \quad (1.2.19)$$

#### 4. 电流源导体与外电路

前面讲到源电流导体在简化磁矢量势中的使用问题,这里,源电流导体包括以下两类:

- Biot-Savart 电流源。这类源电流导体仅载有电流,所产生的磁场由积分法计算得到。这类导体独立于有限元,但仍需要在简化矢量势描述的空间中。
- 电路元件。这类导体与有限元网格相联系,它们由一定个数的缠绕丝线或者网格划分的体积表示,并与外部定义的电路相联系,作为外部电路的元件。外部电路可以由电流源或者电压源驱动,还可以包含被动元件,如电感、电容等。如果空间中存在 Biot-Savart 类导体,那么电路元件类导体必须存在于全矢量势描述的空间中。

#### 5. 谐波方程

对于稳态交流激励场,可以用复势表述。其中,假设物质材料特性是线性的,电流波形则与场波形一致:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t) &= \mathbf{A}_c e^{i\omega t} \\ V(t) &= V_c e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

其中, $\omega$  为激励的角频率。于是,式(1.2.17)变为

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \right) \times \mathbf{A}_c + i\omega\sigma\mathbf{A}_c + \sigma \nabla V = 0 \quad (1.2.21)$$

而式(1.2.18)变为

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) + i\omega \nabla \cdot (\sigma \mathbf{A}_c) = 0 \quad (1.2.22)$$

以上简化矢量势的形式并没有改变。

#### 6. 准非线性解

虽然上述材料特性要求是线性的,但是仍然可以通过准非线性模型对非线性材料进行分析。

假设  $\mathbf{B}$  和  $\mathbf{H}$  同相,那么式(1.2.20)仍然是可用的。根据 BH 关系,场强大小可以决定磁导率。这是一个非线性过程,采用简单迭代更新的方法:利用方程(1.2.21)得到的解,根据 BH 曲线更新单元的磁导率,然后再次求解,直到满足一定的收敛要求。

#### 7. 运动方程

ELEKTRA/VL 模块计算静场,也计算由运动导致的涡流场。导体可以运动,其速度可以是直线速度或者绕  $z$  轴旋转的角速度,且导体的每一个单元都具有速度矢量  $\mathbf{u}$ 。通常认为,驱动源物体是静止的而产生涡流的导体是运动的。在每一个时刻,模型的几何形状是不变的,这意味着与运动方向垂直的导体,其截面也是不变的。换句话说,直线运动的导体是“无限的”而旋转运动的导体 RZ 截面也是不变的。典型的例子如管道巡查车和涡流圆盘刹车。根据式(1.2.14)与(1.2.16),电流由矢量势  $\mathbf{A}$  和标量势  $V$  确定:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A}) - \sigma \nabla V \quad (1.2.23)$$

其中, $\mathbf{u}$  为速度矢量。根据(1.2.19)解得的方程为

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \right) \times \mathbf{A} - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\mu} \nabla \right) \cdot \mathbf{A} = \sigma(\mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{A}) - \sigma \nabla V \quad (1.2.24)$$

方程(1.2.18)变为

在模块 ELEKTRA/VL 中,源电流是直流,且外部电路不可用。

### 1.3 有限元方法简介

有限元法可以处理无法得到解析解的偏微分及积分问题。对于有限元法,将所求物理空间或物体进行有限个单元划分,每个单元内的场用简单的多项式函数近似。对于所求物理场的偏微分及积分问题,例如磁感应强度  $\mathbf{B}$ ,一般通过使用旋度或梯度表示的势函数处理。

在此以一维问题进一步阐述。考虑关于势函数  $\phi$  的一维泊松方程:

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = \rho \quad (1.3.1)$$

此势函数  $\phi$  可以是静电场中的静电势,而  $\rho$  可以是电荷线密度。为了完全定义  $\phi$ ,还需要给定边界条件,例如导数边界条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (1.3.2)$$

用有限元法求解方程(1.3.1)需要将整个空间(线空间)划分为多个单元(线单元)。在每一个单元内部势函数用线性函数近似为

$$\phi(x) = a + bx \quad (1.3.3)$$

整个空间内势函数是连续的,因此对于有两个节点的线单元而言,每个节点被两个相邻单元共用。势函数的导数未必是连续的,例如对电势来说,不同单元的介电常数  $\epsilon$  不同导致势函数的导数不连续。公式的另一种简化形式为如下节点形函数:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2 \\ N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \end{aligned} \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (1.3.4)$$

其中,  $\phi_1$  和  $\phi_2$  为节点上的势函数值。通过将整个空间进行离散化并用节点势函数值描述解的近似空间分布,再利用其他方法便可求解方程。使用比较多的方法有:变分法、最小乘方法和加权余量法。其中加权余量法使用得最为广泛,它通过下式求解近似解:

$$\int W[\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) - \rho] dx = 0 \quad (1.3.5)$$

其中  $W$  为权函数。对于电磁场方程,迦辽金法更为适用。迦辽金法将每个单元内的势函数用作权函数。方程(1.3.5)也被称为强形式,因为它对势函数的导数有必须连续的限制,而方程(1.3.6)被称为弱形式,它将导数的这一限制去除:

$$\int_a^b [\nabla W \cdot (\epsilon \nabla \phi) + W\rho] dx - \left[ W\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_a^b \quad (1.3.6)$$

其中  $a$  和  $b$  为方程的作用域。利用节点形函数使每一个单元上的节点都满足方程:

$$\sum_i \int_a^b [\nabla N_i \cdot (\epsilon \nabla N_j \phi_j) + N_i \rho] dx - \left[ N_i \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_a^b = 0 \quad (1.3.7)$$

从而建立关于全部节点的线性方程组,用矩阵形式写为

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{S} \quad (1.3.8)$$

其中,  $\mathbf{K}$  为系数矩阵(在力学有限元分析中也被称作刚性矩阵);  $\Phi$  为待求各节点的势函数

值组成的向量； $S$  为源项，例如线电流密度或者边界条件。对于某一个单元，其刚度矩阵为

$$K_{ij} = \int_a^b \nabla N_i \cdot (\epsilon \nabla N_j) dx \quad (1.3.9)$$

在这里，虽然其积分是整个空间，但实际仅是包含节点  $i$  和  $j$  的单元对积分有贡献。一般来说，低于电磁场分析，方程(1.3.9)是非线性的，因为对应的介电常数或磁导率与场强有关。

### 1. 非线性材料问题

对于非线性材料问题，Opera3D 采用 Newton-Raphson 法处理：对于初始解  $\Phi_n$ ，新的解  $\Phi_{n+1}$  由下式得到：

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n - J_n^{-1} R_n \quad (1.3.10)$$

其中，余量  $R$  为

$$R_n = K_n \Phi_n - S_n \quad (1.3.11)$$

Jacobi 系数  $J$  为

$$J_n = \frac{\partial}{\partial \Phi_n} K_n \Phi_n - S_n \quad (1.3.12)$$

使用该方法要求初始解离真实解不能太远，介电常数或者磁导率的曲线应尽量光滑。为此，通过设定松弛因子  $\alpha$  改善该方法的收敛能力：

$$\Phi_{n+1} = \Phi_n - \alpha J_n^{-1} R_n \quad (1.3.13)$$

其中， $\alpha$  默认为 1；如果  $|R|$  太小则乘以 2，如果  $|R_{n+1}|$  比  $|R_n|$  大则除以 2，从而为下一迭代步找到一个较小的  $|R_{n+1}|$ 。

### 2. 有限元法的误差分析

利用有限元法建模和结算，首先需要判断的是所建的有限元模型是否与物理模型一致，然后再去分析网格划分所造成的误差。每新建一个电磁场有限元模型时，建议采用如下步骤检查所建模型。

(1) 如果有可能先建立一个二维有限元模型并解算，然后分析其解是否符合物理模型，再与以下(2)~(4)所建的三维有限元模型进行对比，验证所建三维模型是否符合物理模型。

(2) 建立了三维模型后，可以先设定一些简单的条件，例如线性材料特性，磁导率或介电常数等。

(3) 通过可视化窗口，检查所建模型的对称性，看是否与物理模型相符。

(4) 根据(2)所建模型进行解算，分析解算结果是否与(2)中设定的条件相符。

如果以上的分析初步表明所建有限元模型是可靠的，就再去考察网格划分带来的计算误差。一般说来，物理模型检验相对于网格划分分析更容易。

有限元计算的局部误差主要与该单元周边单元的网格尺寸有关，与整个模型的网格尺寸关系相对不大。网格大小与解的误差之间的关系为

对于线性形函数：

$$E(\Phi) = O(h^2) \quad (1.3.14)$$

对于二次形函数：

$$E(\Phi) = O(h^3) \quad (1.3.15)$$

其中， $E$  为误差， $O$  为误差量级， $h$  为单元的大小。这一关系对于分析有限元求解最差的情况十分有用。举例来讲，一根磁化的钢管，如果整个空间采用相同的网格大小进行有限元分



析,那么在钢管边缘处的磁场就会出现奇异的情况,这是因为低阶多项式函数难以描述这些奇异位置。而且从势函数的解再去得到场值更增加了误差。Opera3D采用两种技术改善这一误差问题。一种是节点平均权重法,将场的计算精度提高到 $O(h^2)$ ;另一种是体积积分法,虽然不会改善精度,但是对于远离磁化或极化区域的空间可以进行更准确的计算。

Opera3D对所建模型进行误差分析,提示用户模型中哪些区域的网格划分需要进一步改善。然而,即使经过网格划分的改善,使用者也必须检查网格划分大小对解的影响。使用者可采用上面介绍的方法,对不同网格大小的模型进行计算,或者先采用线性材料再采用非线性材料进行计算,然后再对不同计算结果进行比较和分析,判断网格划分的可靠性。例如采用不同网格大小的模型分布进行计算,一个计算模型的网格大小是另一个的一半,那么根据式(1.3.14)其误差量级就是前者的 $1/4$ ,检查两解算结果的不同可以很好地估测网格划分带来的误差。

这类方法对二维网格划分十分有效,但是对复杂一些的三维模型,减小网格尺寸会急剧增大网格数量,有时会使计算机难以计算。为此,可以对局部的特定区域进行网格划分的加密工作,然后再与原模型进行对比,检验该区域网格划分的可靠性。这类工作需要使用者不断积累经验,但是再有经验的使用者也要意识到,有限元的解仍可能是不准确的。

## 1.4 边界条件

设置边界条件具有以下作用:

- 对于对称边界条件,可以减少有限元数,缩短计算时间;
- 对于远场边界条件,可用来计算离场源很远处空间的磁场强度;
- 可以用来提供场的驱动,例如电压源或电流源;
- 可以代表边界内的材料,例如处于交变场中具有很小屈服深度的导体。

通过势函数的边界条件可以代表模型或场的对称性,最简单的边界条件类型如表1.4.1所示。表中,势函数既可以是简化势函数,也可以是全势函数,但简化势函数的边界条件仅影响简化场强度。

表 1.4.1 边界条件类型

边界类型	场对称性描述	标量势函数描述	矢量势函数描述
磁切向连续	$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$	$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$	$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = 0$
磁法相连续	$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$	$\phi = \text{constant}$	$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} = 0$
电切向连续	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$	$\frac{\partial V}{\partial n} = 0$	$\nabla V \cdot \mathbf{n} = 0$
电法向连续	$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$	$V = 0$	$\mathbf{V} = 0$

### 1. 压强导致的涡流

通过定义导体两端的电压可以计算导体的电流。电压需要定义在导体两端(电流流入和流出端)的外表面上。应采用电法向边界条件,电标量势用来定义驱动电压。