

● 数学奥林匹克小丛书

高中卷

11

Shuxue Aolinpike

XIAOCONG
SHU



概率与期望

单增 著

华东师范大学出版社

olimpik e

数学奥林匹克小丛书

高中卷

11

概率与期望

olimpik e Xiao Congshu ● 单墀 著

华东师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学奥林匹克小丛书·高中卷, 概率与期望/单增
著. —上海: 华东师范大学出版社, 2005. 3
ISBN 7-5617-4164-2

I. 数... II. 单... III. 数学课—高中—教学参考
资料 IV. G634. 603

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第019479号



数学奥林匹克小丛书·高中卷

概率与期望

著 者 单 增
策划组稿 倪 明
责任编辑 审校部编辑工作组
特约编辑 李 娜
封面设计 高 山
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
市场部 电话 021-62865537
门市(邮购) 电话 021-62869887
门市地址 华东师大校内先锋路口
业务电话 上海地区 021-62232873
华东 中南地区 021-62458734
华北 东北地区 021-62571961
西南 西北地区 021-62232893
业务传真 021-62860410 62602316
<http://www.ecnupress.com.cn>
社 址 上海市中山北路3663号
邮编 200062

印 刷 者 江苏句容市排印厂
开 本 787x960 16开
印 张 11
字 数 159千字
版 次 2005年4月第一版
印 次 2005年6月第二次
印 数 11 001-16 100
书 号 ISBN 7-5617-4164-2/G·2389
定 价 12.00元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社市场部调换或电话021-62865537联系)

数学奥林匹克小丛书

冯志刚

第44届IMO中国队副领队

上海中学特级教师

葛 军

中国数学奥林匹克高级教练、江苏省数学会普委会副主任

南京师范大学副教授

冷岗松

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

上海大学教授、博士生导师

李胜宏

第44届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员

浙江大学教授、博士生导师

李伟固

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

北京大学教授、博士生导师

刘诗雄

中国数学奥林匹克委员会委员

武钢三中校长、特级教师

倪 明

数学奥林匹克小丛书总策划

华东师范大学出版社副总编辑

单 樽

第30、31届IMO中国队领队

南京师范大学教授、博士生导师

吴建平

中国数学会普委会副主任、中国数学奥委会副主席

第40届IMO中国队副领队、《中学生数学》主编

熊 斌

第46届IMO中国队领队、中国数学奥林匹克委员会委员

华东师范大学副教授

余红兵

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

苏州大学教授、博士生导师

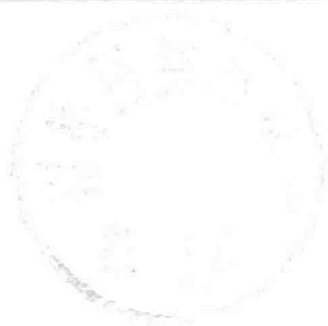
朱华伟

中国数学奥林匹克委员会委员、国家集训队教练

广州大学软件所常务副所长、研究员

Shuxue A Xiao Congshu

Shuxue





数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有踏实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J.W.Milnor)、芒福德(D.B.Mumford)、奎伦(D.Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A.Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L.Fejér)、里斯(M.Riesz)、舍贵(G.Szegö)、哈尔(A.Haar)、拉多(T.Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,应当注意在数学竞赛活动中,注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然，现在有些人过于关注数学竞赛的成绩，组织和参与都具有很强的功利目的，过分扩大数学竞赛的作用，这些都是不正确的，违背了开展数学竞赛活动的本意。这些缺点有其深层次的社会原因，需要逐步加以克服，不必因为有某些缺点，就否定这项活动。

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版。这套书，规模大、专题细。据我所知，这样的丛书还不多见。这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述，而且对竞赛题作了精到的分析解答，不少出自作者自己的研究所得，是一套很好的数学竞赛专题教程，也是中小学生和教师的参考书。

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员，不少是国家集训队的教练和国家队的领队。他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献，为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动。华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上，策划组织了这套丛书，花了不少心血。我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作，并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好。

王元

王元，著名数学家，中国科学院院士，曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席。



概率论是一个重要的数学分支,应用也极为广泛,所以不仅高等学校理工科必须学习,而且现在它也进入了我国中学教材.

这本小册子,通过问题来阐述概率论的内容、方法与意义,着重介绍两个重要概念:概率、数学期望(简称期望).全书共 65 节,也就是 65 个问题,此外还附有习题 107 个,习题均有解答.

这本小册子,是一本课外读物,不是教科书.它可以作为教科书的延伸与补充,目的是为了提高学习的兴趣,开拓眼界.有些问题的讨论稍稍深入,可作探索或研究性学习的内容.初读时如觉得困难,可以略去.

我们假定读者具备排列与组合的知识.如果正在学习或已经学过课本上概率部分的内容,当然更好.不过,课本上已有的内容,我们尽量少说,以免重复.

这本小册子,能否到您手中,是一件随机事件.我不知道它发生的概率有多大,期望它能够到您手中,这表明您与它特别有缘.



0	基本知识	001
1	抛硬币	004
2	名将狄青	006
3	掷骰子	008
4	韦小宝	010
5	一手王牌	012
6	掷出一点	014
7	红球黑球	016
8	同月同日	019
9	数的整除	022
10	重复试验	024
11	银牌之梦	026
12	兄弟阅墙	027
13	学科小组	029
14	骰子多了	031
15	监守自盗	033
16	放不放回	034
17	配对问题	036
18	抽屉放球	038
19	火柴问题	040
20	三堂会审	042
21	连胜两盘	044
22	放空枪	046

23	瓮中捉鳖	048
24	确诊率	050
25	运转正常	052
26	找钱问题	054
27	驴象之争	056
28	东风西风	058
29	嫁奁问题(一)	060
30	嫁奁问题(二)	062
31	招工面试	065
32	拳击比赛(一)	067
33	拳击比赛(二)	070
34	拳击比赛(三)	073
35	悬崖勒马(一)	077
36	悬崖勒马(二)	080
37	谁会输光	081
38	旗鼓相当	083
39	孤注一掷	085
40	不定方程	086
41	铜板上几	088
42	过客匆匆	090
43	钝角三角形	092
44	投针问题	094
45	贝氏奇论	097
46	奇数偶数	100
47	有理无理	102
48	有无实根	104
49	分赌注	107
50	睡美人	109
51	击中次数	111

52	自杀俱乐部	113
53	第一个爱司	115
54	平均几对	117
55	常常放假	119
56	买彩票	120
57	不可嗜赌	122
58	社交派对	124
59	尝试成功	125
60	天罡地煞	127
61	谁有毛病	129
62	棒跌断了	130
63	断成三段	131
64	交点个数	134
65	投铁丝圈	135
习题		137
习题解答		147



本节罗列概率论的一些术语及基本知识,以便读者查阅.

1. **样本点**: 一次试验(例如掷骰子),可能有多种结果,每个结果称为一个样本点,也称为基本事件.

2. **基本事件**: 同 1.

3. **样本空间**: 样本点的集合,称为样本空间,也就是基本事件的总体.本书记为 I .

4. **随机事件**: 样本空间的子集称为随机事件,简称事件.

5. **事件**: 同 4.

6. **必然事件**: 在试验中必然发生的事件,即样本空间 I 自身. 它的概率为 1,即 $P(I) = 1$.

7. **不可能事件**: 不可能发生的事件,即空集 $\emptyset$. 它发生的概率为 0,即 $P(\emptyset) = 0$.

8. **互斥事件**: 事件 A 、 B 不能同时发生,即 $A \cap B = \emptyset$, 则称 A 、 B 为互斥事件,也称为互不相容的事件.

9. **互不相容的事件**: 同 8.

10. **和事件**: $A \cup B$ 称为事件 A 与 B 的和事件.

11. **积事件**: $A \cap B$ 称为事件 A 与 B 的积事件,也简记为 AB .

12. **概率**: 概率是样本空间 I 中的一种测度,即对每一个事件 A ,有一个实数与它对应,记为 $P(A)$,具有以下三条性质:

(1) $P(A) \geq 0$ (非负性);

(2) $P(I) = 1$;

(3) 在 A 、 B 为互斥事件时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (可加性).

13. **频率**: 在同样的条件下进行 n 次试验,如果事件 A 发生 m 次,那么就说 A 发生的频率为 $\frac{m}{n}$.

14. **古典概型**: 如果试验有 n 种可能的结果, 并且每一种结果发生的可能性都相等, 那么这种试验称为古典概型, 也称为等可能概型, 其中每种结果发生的概率都等于 $\frac{1}{n}$.

15. **等可能概型**: 同 14.

16. **对立事件**: 如果事件 A 、 B 满足

$$A \cap B = \emptyset, A \cup B = I,$$

那么 A 、 B 称为对立事件, 并将 B 记为 $\bar{A}$. 我们有一个常用公式

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

17. **条件概率**: 在事件 A 已经发生的条件下, 事件 B 发生的概率称为条件概率, 记为 $P(B|A)$. 我们有

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

即

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

注意 $P(B|A)$, $P(B)$, $P(A|B)$ 的不同. $P(B)$ 是事件 B 发生的概率 (没有条件); $P(B|A)$ 是 A 已经发生的条件下, B 发生的概率; $P(A|B)$ 是 B 已经发生的条件下, A 发生的概率.

18. **独立事件**: 如果事件 A 是否发生, 对于事件 B 的发生没有影响, 即

$$P(B|A) = P(B),$$

那么称 A 、 B 为独立事件. 易知这时

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

并且

$$P(A|B) = P(A),$$

即 B 是否发生, 对于 A 的发生没有影响. 所以事件 A 、 B 是互相独立的.

19. **全概率公式**: 如果样本空间 I 可以分拆为 $B_1, B_2, \dots, B_n$, 即

$$B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = I,$$

并且

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq n),$$

那么事件 A 发生的概率

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A | B_i) P(B_i).$$

20. **贝叶斯(Bayes)公式:** 设 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 是 I 的分拆. 在已知所有的 $P(B_i)$ 与 $P(A | B_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 时, 可用公式

$$P(B_j | A) = \frac{P(AB_j)}{P(A)} = \frac{P(A | B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)}$$

求出 $P(B_j | A)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). 这个公式称为贝叶斯公式.

21. **随机变量:** 随机变量 X 是样本空间 I 上的函数, 即对样本空间 I 中的每一个样本点 e , 有一个确定的实数 $X(e)$ 与 e 对应, $X = X(e)$ 称为随机变量.

22. **数学期望:** 设 X 是随机变量, 则

$$E(X) = \sum_{e \in I} X(e)P(e)$$

称为 X 的数学期望. 其中 e 跑遍样本空间 I 的所有样本点, $P(e)$ 是 e 的概率.

如果 a 是常数, 那么

$$E(aX) = aE(X).$$

如果 X, Y 是两个随机变量, 那么

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$



2004 年欧洲杯足球赛, 首场是希腊对葡萄牙. 主裁判示意两队队长走近, 询问他们谁来猜结果, 然后掏出一枚硬币, 高高抛起, 落下的是正面, 正是希腊队队长猜测的结果. 于是便由希腊选择(上半场)场地. 这场比赛出人意料, 希腊以 2 : 1 战胜了葡萄牙.

假定硬币是均匀的, 出现正面与出现反面的机会应当相等, 即一半对一半, 也就是说, 出现正面与反面的机会都是 $\frac{1}{2}$.

这里所说的机会, 在数学中称为概率(也译作或然率, 几率. 后一名称在分子物理学中经常采用).

如果一个试验有 n 个可能的结果, 并且每个结果出现的可能性都相等, 而其中有 m 个结果属于事件 A , 那么我们就说事件 A 的概率是 $\frac{m}{n}$, 并记为

$P(A) = \frac{m}{n}$, $P(A)$ 表示事件 A 的概率.

例如在抛硬币时, 有两个可能的结果: 正面与反面, $n = 2$. 用 A 表示出现正面, B 表示出现反面, 那么

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}.$$

现将一枚硬币抛掷 3 次. 求:

- (1) 恰有一次出现正面的概率;
- (2) 至少有一次出现正面的概率.

* * * *

- (1) 抛掷 3 次, 共有 $2^3 = 8$ 种结果, 即

正正正 正反正 反正正 反反正
正正反 正反反 反正反 反反反

其中有 3 种情况恰有一次出现正面, 所求概率为 $\frac{3}{8}$.

一般地, 抛掷 n 次, 有 2^n 种情况, 其中正面恰出现 k 次的情况为 C_n^k , 所以正面恰出现 k 次的概率为

$$\frac{C_n^k}{2^n}.$$

(2) 在上面的 8 种结果中, 只有 1 种 3 次都不出现正面, 其他 7 种都有正面出现, 所求概率为 $\frac{7}{8}$.

一般地, 抛掷 n 次, 不出现正面的概率为 $\frac{1}{2^n}$, 至少出现一次正面的概率为 $\frac{2^n - 1}{2^n}$.

上面说掷一次硬币, 出现正面与反面的概率都是 $\frac{1}{2}$, 并不是说抛一次硬币中, 有 $\frac{1}{2}$ 次是正面, $\frac{1}{2}$ 次是反面, 次数只能是整数. 每抛一次, 结果不是正面就是反面, 不会有 $\frac{1}{2}$ 的正面与 $\frac{1}{2}$ 的反面. 但如果抛很多次, 那么其中正面与反面出现的次数应当大致相等. 这件事, 似乎显然, 却也有不少认真的人认真地做过试验. 例如法国的文化名人蒲丰 (Buffon, 1707—1788) 的试验结果如下:

次数	正面	频率
4 040	2 048	0.506 9

这里的(正面出现的)频率指正面出现的次数与总次数的比, 即 $\frac{2\,048}{4\,040}$.

另一位统计学家 K·皮尔逊 (Pearson, 1857—1936) 更为认真. 他做了两次试验, 结果如下:

次数	正面	频率
12 000	6 019	0.501 6
24 000	12 012	0.500 5

由此可见正面出现的机会的确约占 $\frac{1}{2}$ (即 0.5), 而且随着抛掷次数的增加, 频率趋于概率 $\frac{1}{2}$.



北宋名将狄青率兵去打侬智高。出战之前，他召集将士说：“这里有 100 枚铜币，我要将它们抛在地上，如果全部正面朝上，那么表明天助我们，这一仗必胜无疑。”说罢便将钱抛出，居然 100 枚铜币个个正面朝上！

于是将士们欢声如雷。狄青也大为高兴，说：“且将这 100 枚铜币钉在地上，待我们凯旋时再到这里庆贺一番。”

掷 100 枚铜币，全部正面朝上，概率当然很小。请算一下这件事发生的概率是多少？

* * * *

006

共有 2^{100} 种可能结果，而全部正面朝上仅有惟一的 1 种。
所求概率为

$$\frac{1}{2^{100}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 7.88\cdots \times 10^{-31}.$$

粗糙的估计可用 $2^{10} = 1\,024 \approx 10^3$ ，所以

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 10^{-30}.$$

即小数点后 29 个 0，然后 1 个 1。

概率这样小的事，竟然发生，无怪将士们以为这是“天意”。

狄青果然获胜回来，吩咐士兵将铜币全部起起来，大家才发现铜币是特制的，两面一样，都是“正面”，所以狄青一掷，铜币全是正面。这本是概率为 1 的必然事件。狄青利用迷信，以神道设教，建立了将士们的信心。

即使只有一半铜币正面朝上，概率也只有

$$\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}} \approx 0.08.$$