稀疏表示

基础理论与典型应用

刘煜　刘进　李海峰　张茂军　著

国防科技大学出版社

稀疏表示基础理论与典型应用

Sparse Representations：Fundamentals and Applications

刘 煜　刘 进　李海峰　张茂军　著

国防科技大学出版社
湖南长沙

内容简介

稀疏表示是最近几年信号处理领域的热点之一，其核心是借助一个事先得到的字典对输入信号进行分解，并通过字典中少数基线性近似地表示输入信号的过程。稀疏表示理论已经成功应用于压缩感知、图像处理、机器学习等多个领域。全书分为两部分，第一部分介绍了稀疏表示的理论基础，并讨论了多种典型求解算法；第二部分选取了六个典型应用进行剖析。全书理论与实践并重，适合数学与信号处理专业的研究生及科研工作者参考。

图书在版编目（CIP）数据

稀疏表示基础理论与典型应用 / 刘煜, 刘进, 李海峰, 张茂军著. — 长沙 : 国防科技大学出版社, 2014.10

ISBN 978-7-5673-0337-9

Ⅰ. ①稀… Ⅱ. ①刘… ②刘… Ⅲ. ①稀疏表示—应用—图象信息处理 Ⅳ. ①O353.2②TN911.73

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第207624号

国防科技大学出版社出版

电话：(0731)84572640　邮政编码：410073

http://www.gfkdcbs.com

责任编辑：谷建湘　责任校对：陈巧巧

（LaTeX排版）

国防科技大学印刷厂印刷

开本：890 × 1240　1/32　印张：9.625　插页：8页　字数：310 千

2014年10月第1版第1次印刷　印数：1—1000册

定价：40.00元

前 言

信号处理的一个根本问题是：给定任意一个采样信号，是否存在一组基或者原子信号，使得通过这组基或者原子信号的稀疏组合可以逼近原始信号？稀疏表示就是基于该根本问题的解答所形成的一套理论体系。稀疏（Sparse）描述了这么一种物理性质：信号中只含有少数有用的信息，其他大部分信息都趋近于零或者是没有任何意义的冗余量。另一方面，我们从大量的样本中抽取出少数几个具有代表性的特征，那么所有样本都可以由这几个特征线性地或者非线性地表示出来，这种表示称之为稀疏表示(Sparse Representation)，即可以通过少数或极少数信息来表示样本空间中的每个个体。这种将复杂问题分解的方法符合宇宙的一个最基本法则：复杂的物质本质上是由有限多基本物质通过一定方式的组合构成的。

稀疏表示理论的核心思想可以追溯到Fourier变换，即任意在实数域内有意义的曲线可以分解为若干个正弦波函数的组合。然而，由于正弦波函数的带宽被定义在负无穷大到正无穷大区间，这需要被分析的信号也在对应的定义域存在有意义的特征，因此Fourier变换不能很好地处理一些局部

信号。为解决Fourier变换的局部化问题，1986年，著名数学家Meyer与Mallat合作建立了构造小波变换理论，与Fourier变换相比，小波变换能通过伸缩和平移等运算功能对函数或信号进行多尺度细化分析，因而它是一个时间和频率的局域变换，具有多分辨、局部化和多方向性等优良特性，解决了Fourier变换不能解决的许多困难问题。1993年，为了替换更传统的临界采样的小波变换，Mallat和Zhang第一次提出信号在过完备字典上进行分解。通过在过完备字典上对信号进行分解，用来表示信号的基可以自适应地根据信号本身特点灵活选取，其表达形式非常简洁，即信号的稀疏表示。1994年，Mallat和Zhang又提出了匹配追踪（Matching Pursuit，MP）算法，通过逐步逼近的方法来对信号进行稀疏分解。这种方法在变换域用尽量少的基函数来准确地表示原始信号。1995年，Chen, Donoho和Saunders介绍了另一个追踪算法的使用：范数的稀疏性评价。令人惊讶的是，他们发现，稀疏的解决方案的探索可以通过一个凸问题求解。这些工作开创了信号稀疏表示这一信号分析的新方向。因此，从信息表示理论来看，稀疏表示理论经历了从Fourier变化的全局逼近，多小波变化的多尺度、局部逼近，再到冗余字典的非正交、自适应逼近的自然演化过程。

从数学角度来看，稀疏表示的数学模型可以归结到线性代数的基本问题：线性方程组求解。总所周知，方程的个数远小于要求解的未知数的个数，则求解方程$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$是个有无穷多个解的欠定方程组。这些解中最有意义的是稀疏解，即解中包含最少的非零元素（l_0范数：值为0的元素个数）。从Occam's Razor的基本原理来看：当你有两个处于竞争地位的理论能得

出同样的结论，那么简单的那个更好，稀疏解就是最简单的那个。稀疏解同样可以通过对线性方程组追加适当的约束条件，或正则项约束来实现。然而，从计算复杂度的角度来看，L_0问题是个NP问题。为解决这个问题，人们注意到l_0范数有可能松弛到l_1范数，由于l_1范数是凸函数，因此在解的性质和求解效率上都有很好的特性。事实上，在早期的LASSO模型中人们就意识到了l_1范数和稀疏性之间的联系，同样Total Variation (TV)也已经包含了l_1范数的概念，只不过TV 是定义在连续域上的积分形式。然而这种松弛的充要条件一直困扰着研究者，直到2006年，由Candes，Donoho，Tao和Romberg等人在理论上提出两个基本准则：稀疏性和非相干性，或者稀疏性和等距约束性，保证了l_1松弛解的存在性、唯一性和求解算法的收敛性和高效性。很难想象，在线性代数这一被认为已经被很好研究的领域，还存在如此美妙的基本问题，直到最近被研究人员广泛关注并开展深入研究。

从生理机制来看。早在1996年Olshausen等在《Nature》上发表论文指出，在最小二乘的正则化中引入稀疏编码机制，可以得到具有方向特性图像块（basis），很好地解释了初级视皮层（V1）的工作机理，即视觉感知的基本单位是由最简单方向和亮度的图斑组成。最近的深度学习，本质上从仿生学的角度模拟人脑视觉处理回路层次机制，对特征进行从低层到高层的逐层抽象，深度挖据数据的本质信息。深度学习在逐层抽象的过程中，假设问题是稀疏的，逐层将输入数据进行“降维”，把高维的数据投影到抽象但低维的特征空间上。

在应用方面，对高维复杂数据处理的需求迅速增加。这种需求主要体现在两个方面：一方面在极端情况很难对研究对象

进行充分采样，因此核心问题是，能否用远低于 Nyquist 采样定理要求的带宽对信号进行采样，同时又近乎完美的恢复原始信号；另一方面，由于信息采集手段的飞速发展，获取数据的维度呈爆炸式增长，“维度灾难”成为数据分析和处理的噩梦，因此其核心问题是，高维数据中是否存在低维的结构特征。

对于第一个问题，一直以来，受限于Nyquist-Shannon采样定理，采样速率达到信号带宽的两倍以上时，才能精确重建原始信号。因此带宽是Nyquist-Shannon采样定理的核心。然而带宽不是信号的本质信息，基于信号带宽的Nyquist-Shannon采样机制是冗余的或者说是非信息的。于是很自然地引出一个问题，能否利用其他变换空间描述信号，建立新的信号描述和处理的理论框架，使得在保证信息不损失的情况下，与信号带宽相比，稀疏性能够直观地而且相对本质地表达信号的信息。事实上，稀疏性在现代信号处理领域起着至关重要的作用。

对于第二个问题，在复杂的高维数据空间中，我们通常会引入稀疏先验，也即高维数据或者位于低维的子空间，或者位于低维的嵌入流形中。原始的高维数据，可以有这些低维的子空间来表达。也即某个数据和现象，可能只和大量潜在相关的数据和现象中的很小一部分有密切的相关性。这就使得稀疏表示理论可能会大大简化很多问题的处理过程，因此对于高维复杂的数据处理而言，稀疏表示理论具有很大的潜在应用和研究价值。

综上所述，使用更少的采样信号来精确地还原原始信号，其中一个重要的先验知识就是该信号的稀疏性，不管是本身稀疏，还是在变换域稀疏的。由于信号稀疏表示的优良特性——用尽可能少的非零系数表示信号的主要信息，从而简化

信号处理问题的求解过程，在处理各种任务，如去噪，恢复，分离，插值和外推，压缩，采样，分析和综合，检测和识别等方面都表现出极大的优越性。尤其是近年来在数学和工程领域同时兴起的压缩传感与稀疏表示理论，使得稀疏表示理论的研究和应用越来越引起众多研究人员的重视。将信号处理泛化到人脑对信息的处理，稀疏表示理论甚至有生物学意义。可以这么认为，高等生物的进化演变朝向总是用最小的能耗处理最复杂的信号。

我们从事计算机视觉和光学信息处理的相关研究20多年，特别是近10年来，从前端压缩感知技术、量子成像、光学系统设计、CMOS的控制成像，到后端的智能分析算法、图像去噪去模糊算法等都进行过较为深入的研究，对相关研究领域有一定的理解。本书是对我们多年研究工作的总结，同时尽量考虑覆盖稀疏表示涉及的研究领域。所以在我们研究工作的基础上做了适当的扩展，虽然如此，仍有很多稀疏表示相关研究领域在书中没有涉猎。当然，除了图像相关领域的研究，我们还在第12章介绍了基于特征子空间的城市功能形态分析，虽然介绍有些粗略，但是希望可以抛砖引玉，启发其他领域的研究人员对稀疏表示的理解和运用。这并非要把这套理论生搬硬套到其它应用上，而是因为稀疏表示模型对于不同的数据源的处理具有相当通用性和灵活性，使得许多信号处理问题甚至是社会问题的分析变得简单明了。

本书的第一部分（第1–6章）涉及稀疏表示的数学基础，然而，这并不是我们最初想写这本书的出发点，也不是最终想和读者分享的重点。由于我们在计算机视觉和图像处理领域的研究背景，稀疏表示的实践和应用始终牵引着我们的研究方

向。这并非意味着我们对稀疏表示理论方面的研究不感兴趣，而是，如果这些理论可以应用在更多领域，会让许多工作可以从中受益。对于那些已经对稀疏表示理论有一定基础的读者，也可以先阅读本书的第二部分（第7–12章），找到与其研究方向相关的章节，然后再往前翻阅这本书找到对应的理论支撑。

本书第1章、第4章、第6章、第8章和第9章由刘煜博士撰写。第2章、第3章、第5章和第10章由刘进博士撰写。第11章、第12章由李海峰博士撰写。第7章由张茂军教授撰写。全书由刘煜博士统稿。

特别感谢王炜教授对于实验室开展稀疏表示相关理论研究与实践应用的支持与指导，这可以视为我们现在工作的原始动力。感谢王斌博士、李永乐博士，博士生娄静涛、彭杨，硕士生肖华欣、李卫丽对于本书应用部分材料的整理与组织。感谢微软亚洲研究院袁路博士在图像去模糊研究方面对我们做出的指导性工作。感谢实验室李国辉教授、包卫东教授、张军教授、熊志辉副教授、徐玮副教授、谭树人副教授、赖世铭博士、张政博士、陈立栋博士、陈旺博士、李乐博士、石崇林博士、翟永平博士以及博士生谭鑫、左承林、李靖、尹晓晴、肖文华等，硕士生王一波、吕济民、王媛媛、夏青、高成旭、杨健、袁晶等，也正是由于他（她）们的多年共同努力，才使得本书撰写成稿。感谢北京大学地球与空间科学学院博士生支野，他是本书第12章的主要贡献者之一。他们的研究成果直接或间接为本书提供了素材。

感谢恩师国防科技大学张茂军教授，西北工业大学王庆教授，英国University of East Anglia的Dr.Barry-John Theobald，Dr.Stephen Laycock，Prof.Andrew Baham，是他们带领我们进

入科学研究殿堂。感谢University of Alberta的Prof. Anup Basu，西北工业大学的王丽芳教授、张艳宁教授，西南财经大学的段江教授，国防科技大学的查亚兵教授、张维明教授、杨岳湘教授、胡德文教授、徐培德教授、王晖教授、张涛教授，他们在学术上对我们的帮助与鼓励始终是我们不断前行的动力。感谢国家自然科学基金委的支持（No.61403403，No.61402491，No.61175006，No.61175015，No.61271438，No.61275016，No.60803101，No.60872150，No.41001220，No.51178193，No.51278202，No.51378512），教育部归国留学人员科研启动基金，高等学校博士学科点专项科研基金（No.20134307120040），中国博士后科学基金特别资助项目（No.2013T60779），中国博士后科学基金资助项目（No. 2012M511411），湖南省自然科学基金（No.14JJ3005），国防科技大学学校预先研究基金（No.JC13-05-02），国家高技术研究发展计划（重点863项目2012AA121301）。

由于我们对于稀疏表示的理论和应用尚处于探索阶段，本书的许多观点皆基于个人的认识与实践，难免有诸多疏漏、错讹与片面性，恳请读者不吝赐教。

刘 煜

2014年06月

目　录

第 1 章　数学基础：线性空间与方程　1
1.1　定　义　1
1.2　线性映射　4
1.3　基变换　6
1.4　子空间　7
1.5　商空间　9
1.6　Gauss消元法　10
1.7　矩阵的秩、行秩和列秩　12
1.8　解空间的结构　13
1.9　矩阵的相抵　14
1.10　线性映射与矩阵表示　16
1.11　线性变换与不变子空间　19
1.12　特征值与特征向量　21
1.13　方阵的相似　23
1.14　二次型及相合变换　25
1.15　方阵的正交相似　26
1.16　小　结　29
参考文献　30

第 2 章　数学基础：凸集与凸函数　31
2.1　范数与集合　31
2.2　Taylor展式　33
2.3　凸集的性质　35
2.4　凸集分离定理　36
2.5　凸集择一定理　37
2.6　多面体理论　39

2.7 凸函数的性质 41
2.8 凸规划的性质 42
2.9 小 结 43
参考文献 44

第 3 章 数学基础：线性与非线性规划 45
3.1 线性规划基本定理 45
3.2 线性规划单纯形算法 47
3.3 线性规划最优性条件 51
3.4 线性规划对偶定理 52
3.5 无约束优化的最优性条件 53
3.6 下降搜索算法 55
3.7 无约束优化的算法 58
3.8 约束优化的最优性条件 69
3.9 约束优化的对偶定理 80
3.10 约束优化的算法 84
3.11 小 结 88
参考文献 89

第 4 章 数学基础：概率论与随机模型 90
4.1 概率论基础知识 90
4.2 多种随机规划模型 98
4.3 小 结 102
参考文献 103

第 5 章 稀疏表示与稀疏解的性质 104
5.1 稀疏表示问题 104
5.2 稀疏解的性质 109
5.3 小 结 116
参考文献 117

第 6 章 稀疏求解算法简介 118

6.1 概 述 118
6.2 贪婪算法 119
6.3 凸松弛方法 125
6.4 迭代收缩算法 133
6.5 小 结 142
参考文献 143

第 7 章 压缩感知在光学成像中的应用 145

7.1 概 述 145
7.2 压缩感知理论原理 146
7.3 信号的稀疏表示 147
7.4 压缩成像技术 149
7.5 小 结 163
参考文献 165

第 8 章 基于稀疏表示的图像去噪 167

8.1 概 述 167
8.2 传统去噪方法 169
8.3 稀疏表示用于图像去噪 171
8.4 字典构建与稀疏分解 174
8.5 K-SVD算法及其改进算法简介 178
参考文献 186

第 9 章 模糊图像复原技术 189

9.1 图像模糊问题介绍 189
9.2 图像复原的模型 193
9.3 字 典 196
9.4 反卷积中的稀疏先验 196
参考文献 202

第 10 章 图像分类技术 **204**
10.1 概 述 204
10.2 模式识别基本概念 205
10.3 稀疏理论在模式识别问题中的研究背景 207
10.4 基于稀疏表示模型的人脸识别 208
10.5 判别稀疏编码人体动作识别 220
10.6 小 结 230
参考文献 232

第 11 章 运动检测技术 **235**
11.1 概 述 235
11.2 传统运动检测算法 236
11.3 基于稀疏表示的运动检测算法 243
11.4 小 结 260
参考文献 265

第 12 章 基于特征子空间的城市功能形态分析 **269**
12.1 概 述 269
12.2 社会媒体签到数据和城市形态 272
12.3 城市形态的特征功能活动 273
12.4 结果与分析 281
12.5 总结和展望 287
参考文献 289

附录：彩色插图 **294**

第 1 章　数学基础：线性空间与方程

稀疏表示的数学出发点并不复杂：在不定线性系统的解空间中寻求非零元素最少的特殊解。这个出发点和线性代数有着密切的关系，所以在本章我们简约介绍线性空间的定义、概念和基本性质。

1.1 定　义

对于线性空间，我们已有一些直观的印象，比如平面上经过原点的直线，三维欧氏空间中经过原点的平面，等等。按照法国布尔巴基学派的学术观点，在数学上，线性空间是满足一些公理的结构，虽然按照这样的观点理解线性空间会丧失一些几何的直观，但是却在理论和应用上实现了提升。

定义 1.1　假设$\mathbb{R}$实数域，V是一个集合，如果在$V\times V \to V$，$\mathbb{R}\times V \to V$上分别定义了一种运算称为加法和一种运算称为数乘，且满足如下性质：

(1) $\forall x, y \in V,\ \ x+y \in V$

(2) $\forall x, y \in V,\ \ x+y = y+x$

(3) $\forall x, y, z \in V,\ \ (x+y)+z = x+(y+z)$

(4) $\exists 0 \in V$，使得$\forall x \in V,\ \ 0+x = x$

(5) $\forall x \in V,\ \ \exists y \in V$，使得$x+y=0$

(6) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in V,\ \ \alpha x \in V$

(7) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, x, y \in V,\ \ \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(8) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

(9) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

(10) $\forall x \in V,\ \ 1x = x$

则称V是$\mathbb{R}$上的线性空间。实数域$\mathbb{R}$称为线性空间V的系数域，$\mathbb{R}$中的元

素称为数量，V中的元素称为向量。

例 1.1 实数域$\mathbb{R}$上次数小于n的多项式形式全体

$$a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1},\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, ..., n-1$$

是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间。

例 1.2 实数域$\mathbb{R}$上的连续实变函数全体按照如下定义的加法和数乘构成$\mathbb{R}$上的线性空间

$$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f+g)(x) = f(x) + g(x),\ (\alpha f)(x) = \alpha f(x),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

例 1.3 实数域$\mathbb{R}$上的多项式全体构成线性空间。

命题 1.1 线性空间具有性质：

（1）零元素$0 \in V$是唯一的；

（2）V中任意元素x的负元素是唯一的，记为$-x$;

（3）$\alpha x = 0$当且仅当$\alpha = 0$或者$x = 0$;

（4）$(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$;

（5）$\alpha\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha x_i$, $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x$.

定义 1.2 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$是$V$中的向量。$V$中的向量$\boldsymbol{x}$称为向量$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$的线性组合是指$\boldsymbol{x}$可以写为

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{x}_1 + ... + \alpha_r\boldsymbol{x}_r,\ \alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$$

这也称为$\boldsymbol{x}$可由$\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_r\}$线性表达。

定义 1.3 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$S \subset V$是V中的向量组，$\boldsymbol{x} \in V$中称为S的线性组合(线性表达、线性生成)是指$\boldsymbol{x}$可由S中的某有限多个向量线性表达。

定义 1.4 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$S_1 \subset V$, $S_2 \subset V$是V中的两个向量组，若S_2中的任一向量可由S_1线性表达，则称S_2可由S_1线性表达，若S_1与S_2可以相互线性表达，则称S_1与S_2线性等价。

定义 1.5 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$S \subset V$是V中的向量组，若V可由S线性表达，则称S是V的生成元系。若V有一个有限的生成元系，则称V是有限生成的。

定义 1.6 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$是$V$中的向量，称其为线性相关的，如果存在不全为零的实数$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$使得

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}$$

若$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$不是线性相关的，则称其为线性无关或者线性独立，也就是说由方程

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{0}$$

可以推出$\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$. 一个具有无限多个元素的向量组$S\subset V$线性相关是指其某有限部分线性相关，否则称为线性无关。

命题 1.2 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间。一个向量$\boldsymbol{x}$线性无关当且仅当$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 有两个以上向量的向量组线性相关，当且仅当其中一个向量可以表达为其余向量的线性组合。$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$线性相关当且仅当存在某个$\boldsymbol{x}_i,1\leqslant i\leqslant r$可由$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{i-1}\}$线性表达。若向量组$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r\}$线性无关，且可由向量组$\{\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_s\}$线性表达，则$r\leqslant s$.

定义 1.7 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$S\subset V$是一个向量组，称$S_M\subset S$是S的极大线性无关组，如果满足：S_M是线性无关的；S可由S_M线性表达。S_M中元素的个数或者基数称为S的秩，由S唯一决定，记为$\mathrm{rank}(S)$.

命题 1.3 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，$S_1\subset V,S_2\subset V$是$V$中的两个向量组，若$S_2$可由$S_1$线性表达，则$\mathrm{rank}(S_2)\leqslant\mathrm{rank}(S_1)$，线性等价的两个向量组具有相同的秩。

定义 1.8 假设V是实数域$\mathbb{R}$上的线性空间，V的极大线性无关组称为V的基，其秩称为V的维数，记为$\dim(V)$.

命题 1.4 假设V是n维线性空间，则V中任意的n个线性无关的向量必定构成基，V中任意能线性表达出V的n个向量必定构成基。

定义 1.9 假设V是n维线性空间，$\{\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$是基，$\boldsymbol{x}\in V$且表达为

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\vdots\\\boldsymbol{x}_n\end{pmatrix}$$