21世纪高等理工科重点课程辅导教材

本书荣获中国石油和化学工业优秀出版物奖（教材奖）一等奖

# 概率论与数理统计学习指导

陈晓龙 施庆生 邓晓卫 编

第三版

化学工业出版社

21 世纪高等理工科重点课程辅导教材
本书荣获中国石油和化学工业优秀出版物奖(教材奖)一等奖

# 概率论与数理统计学习指导

## 第三版

陈晓龙　施庆生　邓晓卫　编

化学工业出版社
·北京·

本书是根据《高等学校工科本科概率论与数理统计课程教学基本要求》及硕士研究生入学考试大纲编写的教学辅导教材，内容以相关配套教材章节为基础，各章包括基本要求、内容提要、典型例题分析、练习与测试及参考答案。其中基本要求和内容提要有助于读者明确学习目的、理清基本概念；书中例题选材针对性强，既有基础题又有综合题，并有分析、多种解答法及注意点。全书能帮助读者理解概率论与数理统计课程的基本概念，提高分析问题和解决问题的能力。

本书可作为工科类、经济管理类及非数学类的理科的学生学习辅导教材，也可作为考研的强化训练指导书。

**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计学习指导/陈晓龙，施庆生，邓晓卫编. —3版. —北京：化学工业出版社，2017.3
ISBN 978-7-122-29033-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①陈… ②施… ③邓… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第027008号

责任编辑：唐旭华　　装帧设计：张　辉
责任校对：宋　玮

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街13号　邮政编码100011）
印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司
装　　订：北京国马印刷厂
710mm×1000mm　1/16　印张13½　字数278千字　2017年4月北京第3版第1次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

**定　　价：29.80元**

# 前　　言

概率论与数理统计是大部分理工科专业本科生的必修课程，同时也是工学和经济学硕士研究生入学考试数学科目的考试内容。

概率论与数理统计是近代数学的分支，在科学研究、工程技术、国民经济等领域都有广泛的应用。由于概率论与数理统计的方法有其独到之处，初学者往往感到它的基本概念难懂，习题难做，因而便产生“难学”的想法。实际上，正确掌握解题的方法和技巧对学习该门课程是非常重要的。本书将就这些难点，由浅入深，有针对性地给予辅导。为便于读者学习，我们逐章按四个部分编写。其中基本要求和内容提要部分对一些重要概念、定理和公式，作了必要的解释，主要是帮助读者明确学习要求，理清概念。典型例题分析部分既有基本题，也有综合题，题型丰富。通过对典型例题的分析和解法评注，说明解题技巧，以帮助读者在解题过程中正确理解基本概念，掌握解题的方法与技巧，达到举一反三的目的。练习与测试部分为精选习题，供读者自我检查，以帮助读者复习巩固所学内容，培养分析问题和解决问题的能力。

本书在编写过程中，力求做到通俗易懂，简详得当，取材广泛。在选材和叙述上尽量做到突出基本内容的掌握和基本方法的训练。在例题和练习的选择上，既有一般教科书和习题集中的典型题目，也有一部分取材于历届硕士研究生入学考试统考试题，这样的例题和练习都加注了星号“*”。因此本书既可以作为工科类、经济管理类及非数学类的理科的学生学习概率论与数理统计课程的辅导教材，也可以作为考研的强化训练指导书，同时也适于自学者阅读。

本书自2008年出版以来，各方反应良好，并于2012年初推出第二版。这次修订是在第二版的基础上，根据我们多年的教学改革实践进行全面修订而成的。本次修订保留了第二版的系统和风格及其结构严谨、逻辑清晰、概念准确、语言通俗易懂、叙述详细、例题较多、便于自学等优点，同时注意吸收当前教材改革中一些成功的改革举措，使得新版更能适合当前教学要求。

参加本书第一版编写的有施庆生（第一、二、三、五章），陈晓龙（第四、八、九章），邓晓卫（第六、七章），由陈晓龙负责统稿和定稿，金炳陶教授审阅全书，提出了许多宝贵的意见。本书第一版编写得到南京工业大学精品课程建设基金的资助和理学院的大力支持，特别是应用数学系教师的积极参与，在此一并致谢。

这两次修订，我系广大教师提出了许多宝贵意见和建议，在此表示诚挚的

谢意。

本次修订工作，由陈晓龙、施庆生、邓晓卫完成。

由于编者的水平有限，书中难免存在疏漏，敬请读者批评指正。

编　者

2017 年 1 月

# 目　　录

# 第一章　事件与概率

## 第一节　基 本 要 求

（1）理解随机试验的特征．对于一个具体的试验要弄清试验方式，即什么是一次试验？一个试验结果指的是什么？

（2）了解样本空间的概念，理解随机事件（简称事件）的概念．对此，要了解它的基本特征．对一个具体的事件要弄清它是由哪些试验结果构成？什么叫做它发生了？掌握事件之间的基本关系和运算法则．

（3）理解概率和条件概率的概念，掌握概率的基本性质．古典概型下概率计算的若干常见类型，既是重点又是难点，务必掌握其要点，并能熟练完成计算．

（4）掌握概率的运算法则．包括加法公式、乘法公式、全概率公式、逆概公式以及与此有关的超几何公式、泊松公式等都是计算和运用的重点．对于这些公式不仅要知道各自的背景、条件、结论，而且要能熟练地应用它们计算事件的概率．

（5）理解事件独立性的概念，掌握用事件独立性进行概率计算的方法．

## 第二节　内 容 提 要

### 一、随机试验与随机事件

（1）**随机试验**　若试验满足条件

① 试验在相同的条件下可重复进行；

② 每次试验的可能结果不止一个，但每次试验的所有可能结果是已知的；

③ 完成一次试验之前不能确知哪个结果会发生．

则该试验称为**随机试验**．

（2）**基本事件**　试验的直接结果（不可再分解的结果）称为试验的**基本事件**（样本点），用记号 $\omega$ 表示．

（3）**样本空间**　给定试验下所有基本事件（样本点）的集合称为**样本空间**，用记号 $\Omega$ 表示．

（4）**随机事件**　样本空间 $\Omega$ 的一个子集称为**随机事件**，用记号 $A$，$B$，$C$ 等表示．在试验中一定发生的事件称为必然事件，仍用字母 $\Omega$ 表示．而把在试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用符号 $\Phi$ 表示．从集合论的观点看，必然事件

相当于全集，不可能事件相当于空集，它们可视为随机事件的两种极端情形．在试验中，称一随机事件发生了，是指当且仅当它所包含的一个基本事件（样本点）出现了．

## 二、随机事件的概率

（1）**概率** 用以度量在试验中事件发生可能性大小的数，称为事件的**概率**.

（2）**概率的统计定义** 假设试验在相同条件下可以重复进行，当试验次数 $n$ 充分大时，事件 $A$ 发生的次数（频数）$m$ 与 $n$ 的比 $m/n$（频率），始终围绕某个常数 $p$ 作稳定而微小的摆动（统计概型），则称事件 $A$ 有概率．常数 $p$ 就是它的概率，记为 $P(A)=p$.

（3）**概率的古典定义与计算** 假设随机试验 $E$ 的样本空间 $\Omega$ 只有 $n$ 个等可能的基本事件（古典概型），而事件 $A$ 包括其中的 $m$ 个基本事件，则事件 $A$ 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A\text{ 包括的基本事件数})}{n(\text{样本空间所含基本事件总数})}.$$

（4）概率的统计定义 设 $\Omega$ 是一个有度量的几何区域，$g\subset\Omega$ 是一个有度量的小几何区域，记它们的度量（长度、面积、体积等）分别为 $\mu(\Omega)$，$\mu(g)$．若随机点落在 $\Omega$ 内任一位置是等可能的，则事件 $A=\{$向 $\Omega$ 内投掷的随机点落入区域 $g\}$ 的概率为

$$P(A)=\frac{\mu(g)}{\mu(\Omega)}$$

（5）**概率的公理化定义** 设样本空间 $\Omega$ 的某些子集组成的集合 $F$ 是事件的全体，$A$ 是属于 $F$ 的任一事件，$P$ 是定义在 $F$ 上的一个集合函数，则称满足下述公理的实数 $P(A)$ 为事件 $A$ 的概率．

公理 1 对任意事件 $A\in F$，有 $P(A)\geqslant 0$ （非负性）;

公理 2 对于必然事件 $\Omega$，有 $P(\Omega)=1$（规范性）;

公理 3 对任意的 $A_i\in F(i=1,2,\cdots)$，$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互斥，即

$$A_iA_j=\Phi \quad (i\neq j),$$

有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i) \qquad (\text{可列可加性}).$$

## 三、随机事件关系与相应的概率运算

为清楚起见，这里的讨论用列表方式进行（见表 1-1).

## 四、概率的运算法则

### 1. 概率的加法公式

$$P(A\cup B)=\begin{cases} P(A)+P(B), & A,B\text{ 为互斥事件}, \\ P(A)+P(B)-P(AB), & A,B\text{ 为相容事件}, \\ P(A)+P(B)-P(A)P(B), & A,B\text{ 为独立事件}, \\ 1-[1-P(A)][1-P(B)], & A,B\text{ 为独立事件}. \end{cases}$$

**表 1-1　事件关系与相应的概率关系表**

| 事件关系与运算 | | 相应的概率运算 |
|---|---|---|
| 包含 | $B\supset A$：$A$ 发生必将导致 $B$ 发生<br>（事件 $B$ 包含事件 $A$） | $P(B)\geqslant P(A)$ |
| | 对任一事件 $A$：$\Phi\subset A\subset\Omega$ | $0\leqslant P(A)\leqslant 1$ |
| 等价 | $B=A$：$B\supset A$ 同时 $A\supset B$<br>（$A,B$ 为等价事件） | $P(B)=P(A)$ |
| 互斥<br>（不相容） | $AB=\Phi$：$A,B$ 不能同时发生<br>（$A,B$ 为互斥事件） | $P(AB)=0$ |
| 对立<br>（互逆） | $AB=\Phi$：$A,B$ 不能同时发生，<br>且 $A\cup B=\Omega$：$A,B$ 恰有一个发生<br>（$A,B$ 互为对立事件） | $P(AB)=0$<br>$P(A)+P(B)=1$ |
| | 记 $B=\overline{A}$：$B$（即$\overline{A}$）为 $A$ 对立事件，<br>$A\overline{A}=\Phi,A\cup\overline{A}=\Omega$ | $P(A)=1-P(\overline{A})$ |
| 互斥<br>完备<br>事件组 | $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足：<br>(1) $A_iA_j=\Phi(i\neq j;i,j=1,\cdots,n)$<br>（$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥）；<br>(2) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\Omega$<br>（$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组） | $\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)=1$ |
| 独立 | $A$、$B$ 的概率满足：$P(B\mid A)=P(B)$，<br>$A$ 发生与否不影响 $B$ 发生的概率；<br>或 $A,B$ 的概率满足：$P(A\mid B)=P(A)$，<br>$B$ 发生与否不影响 $A$ 发生的概率<br>（$A,B$ 互为独立事件） | $P(AB)=P(A)P(B)$ |
| 和（并） | $A\cup B$ $(A+B)$：<br>$A,B$ 至少有一发生<br>[$A$ 与 $B$ 的和（$A$ 或 $B$）] | 概率加法公式：<br>$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；<br>若 $A,B$ 为互斥事件：<br>$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ |
| 积（交） | $AB(A\cap B)$：<br>$A,B$ 同时发生<br>[$A$ 与 $B$ 的积（$A$ 且 $B$）] | 概率乘法公式：<br>$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$；<br>若 $A,B$ 为独立事件：<br>$P(AB)=P(A)P(B)$ |
| 差 | $A-B=A\overline{B}$：<br>$A$ 发生而 $B$ 不发生<br>[$A$ 与 $B$ 的差（$A$ 且$\overline{B}$）] | $P(A-B)=P(A)-P(AB)$ |
| 和积差的特例 | $AB\subset A\subset A\cup B(AB\subset B\subset A\cup B)$：<br>事件求积越求越“小”<br>事件求和越求越“大” | $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A\cup B)$，<br>$P(AB)\leqslant P(B)\leqslant P(A\cup B)$<br>（概率的单调性） |
| | 在 $A\supset B$ 的约定下：<br>$AB=B,A\cup B=A$；<br>（求积取“小”的，求和取“大”的）<br>特殊情况下：$A\Omega=A$，$A\cup\Omega=\Omega$，<br>$A\Phi=\Phi,A\cup\Phi=A$ | $P(A-B)=P(A)-P(B)$，<br>$P(AB)=P(B)$，<br>$P(A\cup B)=P(A)$ |
| 对偶法则 | $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，<br>$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$ | $P(\overline{A\cup B})=P(\overline{A}\,\overline{B})$，<br>$P(\overline{AB})=P(\overline{A}\cup\overline{B})$ |
| 互斥分解 | $A=AB\cup A\overline{B}$，<br>$A\cup B=A\cup\overline{A}B$ | $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$，<br>$P(A\cup B)=P(A)+P(\overline{A}B)$ |

**推广**

设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

一般地，对任意的 $n$ 个事件，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

特别地，当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为独立事件时，公式

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - P(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdots \overline{A}_n) \\ &= 1 - [1 - P(A_1)][1 - P(A_2)] \cdots [1 - P(A_n)] \end{aligned}$$

在解决某些实际问题时非常有用，应给予足够的重视.

**2. 条件概率与乘法公式**

**条件概率**　设 $A, B$ 是同一试验的两个事件，且 $P(B) > 0$，称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 $B$ 已发生条件下事件 $A$ 发生的**条件概率**.

**乘法公式**　若 $P(A) > 0$，则　$P(AB) = P(A)P(B|A)$，

或若 $P(B) > 0$，　　　　则　$P(AB) = P(B)P(A|B)$.

**推广**　若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$，那么

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_n | A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

特别地，当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为独立事件时，对任何正整数 $k$ 有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}) \quad (2 \leqslant k \leqslant n).$$

**3. 全概率公式和贝叶斯公式**（逆概率公式）

**全概率公式**　假设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为互斥完备事件组，$P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$，$B$ 为 $\Omega$ 中任一事件，则全概率公式为

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B | A_i).$$

保持全概率公式的题设，增设 $P(B) > 0$，则有

**贝叶斯公式**（逆概率公式）

$$P(A_j / B) = \frac{P(A_j) P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B \mid A_i)} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

## 五、排列组合基本公式

**1. 排列公式**

**全排列**　将 $N$ 个元素按一定顺序排列，共有 $N!$ 种不同的排法.

**选排列** 从 $N$ 个元素中任选 $n$ 个元素进行排列，共有

$$A_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$$

种不同的排法．

**可重复排列** 从 $N$ 个元素中任选 $n$ 个元素进行可重复（即 $N$ 中的每一个元素允许重复选用）的排列，共有 $N^n$ 种不同的排法．

**2. 组合公式**

从 $N$ 个元素中任选 $n$ 个元素构成一组（不计序），其所有不同组合的个数有

$$C_N^n = \frac{N!}{n!\ (N-n)!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!}.$$

排列组合是计算古典概率的重要工具，应熟练掌握．

# 第三节 典型例题分析

**【例 1】** 某库房存放有 3 个供备用的同类零件，其中 2 个是编号为 1、2 的一等品，另一个是编号为 3 的二等品．今从中任意抽取 2 个，用数对 $(i,j)$ 表示随机抽取下的基本事件，其中 $i$ 代表第一次抽得的零件编号，$j$ 为第二次抽得的零件编号．试就抽取的放回与不放回两种方式，写出试验的样本空间 $\Omega$ 以及下列事件包括的基本事件：

$A$="第一次抽得一等品"；$B$="第二次抽得一等品"；

$C$="第二次才抽得一等品"；$D$ ="至少一次抽得一等品"．

**解** 放回抽样：

$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$；

$A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$；

$B=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$；

$C=\{(3,1),(3,2)\}$；

$D=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2)\}$.

不放回抽样：

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$；

$A=\{(1,2),(1,3),(2,1),(2,3)\}$；

$B=\{(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)\}$；

$C=\{(3,1),(3,2)\}$；

$D=\Omega$.

**注** 列举样本空间首先要弄清试验的结果如何表达，而列举有关事件中包含的基本事件必须认真识别事件的构成．例如，事件 $B$ 的本意是，第一次可以取一等品也可以取二等品，但第二次只能取一等品．而事件 $C$ 则不同，它指的是，第一次取二等品，同时第二次取一等品．类似于例 1 的问题可帮助弄清试验方式，这对于以后计算事件的概率是必要的．

**【例 2】** 设 $A,B,C$ 为三事件，用 $A,B,C$ 的运算关系表示下列各事件．

(1) $A$ 发生，$B$ 与 $C$ 不发生；　　(2) $A$ 与 $B$ 都发生，而 $C$ 不发生；

(3) $A,B,C$ 中至少有一个发生；　　(4) $A,B,C$ 都发生；

(5) $A,B,C$ 都不发生；　　(6) $A,B,C$ 中不多于一个发生；

(7) $A,B,C$ 至少有一个不发生；　　(8) $A,B,C$ 中至少有两个发生．

**分析**　简单的事件可以由事件运算的定义直接写出．而复杂的事件可借助①利用维恩图进行分析；②对所述事件换个角度重新描述，比如用逆事件．如（7）可翻译成“$A,B,C$ 不可能同时发生”或“$\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 至少有一个发生”等．

**解**　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；　(2) $AB\overline{C}$；　(3) $A\cup B\cup C$；

(4) $ABC$；　(5) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(6) $\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(7) $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$；

(8) $AB\cup AC\cup BC$ 或 $AB\,\overline{C}\cup A\,\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

**【例 3】**　对飞机进行两次射击，每次射一弹，设事件 $A=\{$第一次击中飞机$\}$，$B=\{$第二次击中飞机$\}$，$C=\{$恰有一弹击中飞机$\}$，$D=\{$至少有一弹击中飞机$\}$，$E=\{$两弹都击中飞机$\}$．

(1) 试用事件 $A,B$ 表示事件 $C,D,E$.

(2) $C$ 与 $E$ 是互逆事件吗？为什么？

**解**　(1) $C=A\,\overline{B}\cup\overline{A}B$，$D=A\cup B=AB\cup A\,\overline{B}\cup\overline{A}B$，$E=AB$；

(2) $C$ 与 $E$ 不是互逆事件，$C$ 与 $E$ 互不相容，但 $C\cup E\neq\Omega$.

**【例 4】**　从 1,2,3,4,5 这 5 个数中，任取其三，构成一个三位数．试求下列事件的概率：

(1) 三位数是奇数；　　(2) 三位数为 5 的倍数；

(3) 三位数为 3 的倍数；　　(4) 三位数小于 350.

**分析**　本题关心的是三位数的构成，由于是从 1,2,3,4,5 这 5 个数中，任取其三，构成一个三位数．显然取出的三个数是不同的，故基本事件是 3 个不同数的一个排列．

**解**　设 $A=\{$三位数是奇数$\}$，$B=\{$三位数为 5 的倍数$\}$，

$C=\{$三位数为 3 的倍数$\}$，$D=\{$三位数小于 350$\}$．

基本事件总数为　$A_5^3=60$，

(1) 有利于 $A$ 的基本事件数为　$A_4^2\times 3$，$P(A)=\dfrac{A_4^2\times 3}{A_5^3}=\dfrac{36}{60}=0.6$；

(2) 有利于 $B$ 的基本事件数为　$A_4^2\times 1$，$P(B)=\dfrac{A_4^2\times 1}{A_5^3}=\dfrac{12}{60}=0.2$；

(3) 有利于 $C$ 的基本事件数为　$4\times 3!$，$P(C)=\dfrac{4\times 3!}{A_5^3}=\dfrac{24}{60}=0.4$；

**注**　三位数为 3 的倍数事实上就是三位数的位数和是 3 的倍数．

(4) 有利于 $D$ 的基本事件数为　$A_4^2\times 2+A_3^1\cdot A_3^1$，

$$P(D)=\frac{A_4^2\times 2+A_3^1\cdot A_3^1}{A_5^3}=\frac{33}{60}=0.55.$$

**注** 若将 1,2,3,4,5 这 5 个数改为 0,1,2,3,4,5 等 6 个数，又将如何求解？请读者思考．

**【例 5】** 某停车场有 12 个位置排成一列，求有 8 个位置停了车而空着的 4 个位置连在一起的概率．

**分析** 12 个位置占去 8 个共有 $C_{12}^8$ 种占位法，故样本空间基本事件总数为 $C_{12}^8$. 设所求的事件为 $A$，则有利于 $A$ 的情形可看成空着的 4 个位置整个作为一个位置而插入 8 个停车位置的中间或两端，为此，事件 $A$ 包含的基本事件数为 9.

**解** 设 $A=\{$有 8 个位置停了车而空着的 4 个位置连在一起$\}$．

基本事件总数为 $$C_{12}^8=495.$$

而事件 $A$ 包含的基本事件数为 9，于是

$$P(A)=\frac{9}{C_{12}^8}=\frac{9}{495}\approx 0.0182.$$

**【例 6】** 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

**解** 方法一 设 $A=\{$4 只鞋中至少有 2 只配成一双$\}$，则

$\overline{A}=\{$4 只鞋中没有 2 只能配成一双$\}$．先求出 $P(\overline{A})$，再求 $P(A)$. 5 双不同的鞋子共有 10 只，任取 4 只，则基本事件总数为

$$C_{10}^4=210.$$

有利于 $\overline{A}$ 的情形共有 $\frac{10\times 8\times 6\times 4}{4!}$ 种（先在 10 只中取 1 只，去掉能与其配对的 1 只，再在剩下的 8 只中取 1 只，如此等．因为不考虑取 4 只鞋的次序，所以被 4！除），所以

$$P(\overline{A})\frac{\frac{10\times 8\times 6\times 4}{4!}}{C_{10}^4}=\frac{8}{21}\approx 0.381.$$

故 $$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{8}{21}=\frac{13}{21}\approx 0.619.$$

方法二 有利于事件 $A$ 的总数为 $C_5^1C_8^2-C_5^2$（$C_5^2$是重复的数目，因为 4 只恰能配成两双被重复计数），所以

$$P(A)=\frac{C_5^1C_8^2-C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}\approx 0.619.$$

方法三 “恰有 2 只配成一双”，共有 $C_5^1C_4^2\cdot 2^2$（由于配成对的一双有 $C_5^1$ 种取法，剩下的 2 只可在其余 4 双中任取两双各取一只有 $C_4^2\cdot 2^2$ 种取法，以上搭配共有 $C_5^1C_4^2\cdot 2^2$ 种取法）. 4 只配成两双共有 $C_5^2$ 种取法．于是

$$P(A)=\frac{C_5^1C_4^2\cdot 2^2+C_5^2}{C_{10}^4}=\frac{13}{21}\approx 0.619.$$

【例 7】 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中去，求杯子中球的最大个数分别为 1，2，3 的概率．

**分析** 将 3 个球随机地放入 4 个杯子中的任一个，故要用重复排列的方法计算．

**解** 依题意知基本事件总数为 $4^3$ 个．

以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“杯子中球的最大个数为 $i$”，则 $A_1$ 表示每杯最多放一只球，共有 $\mathrm{P}_4^3$ 种放法，故

$$P(A_1)=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{6}{16}.$$

$A_2$ 表示由 3 个球中任取 2 个放入 4 个杯中的任一个中，其余一个球放入其余 3 个杯子中，放法总数为 $\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1$ 种

$$P(A_2)=\frac{\mathrm{C}_3^2\mathrm{C}_4^1\mathrm{C}_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}.$$

$A_3$ 表示 3 个球放入同一个杯中，共有 $\mathrm{C}_4^1$ 种放法，故

$$P(A_3)=\frac{4}{4^3}=\frac{1}{16}.$$

**注** 例 4 至例 7 均属于古典概型的概率计算，其基本方法是，利用排列组合方法来计算基本事件总数和有利基本事件数．具体计算时要注意区分事件的构成，以便考虑使用排列（与次序有关）或组合（与次序无关）来计算，若在排列中元素可重复，则要用可重复排列进行计算．此外，用排列组合方法在考虑一切可能出现的结果时，既不要遗漏，也不要重复．对有附加条件的排列组合问题（如例 6），通常有两种方法，一条是直接法，即对有附加条件的特殊元素或排列中特殊位置先处理，直接求出满足条件的种数．另一条是间接法（求差），先撇开附加条件求出一个总数，再扣除不合要求的种数．

【例 8】 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头，它们在一昼夜内到达的时间是等可能的．如果甲船的停泊时间是一小时，乙船的停泊时间是两小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率是多少？

**分析** 设自当天 0 时算起，甲乙两船到达码头的时刻分别为 $x$ 及 $y$，这是涉及两个连续量 $x,y$ 的概率问题，所以该问题为平面几何概率问题．

**解** 设自当天 0 时算起，甲乙两船到达码头的时刻分别为 $x$ 及 $y$，则 $\Omega$ 为：$0\leqslant x\leqslant 24$，$0\leqslant y\leqslant 24$，所以 $L(\Omega)=24^2$，

设 $A=\{$它们中任何一艘都不需要等候码头空出$\}$，则有利于 $A$ 的情形分别为：

(1) 当甲船先到时，乙船应迟来一小时以上，

即 $y-x\geqslant 1$ 或 $y\geqslant 1+x$；

(2) 当乙船先到时，甲船应迟来两小时以上，

即 $x-y\geqslant 2$ 或 $y\leqslant x-2$；

所以事件 $A$ 应满足关系：$y\geqslant 1+x$，$y\leqslant x-2$，

$$L(A)=\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2.$$

所以 $$P(A)=\frac{L(A)}{L(\Omega)}=\frac{\frac{1}{2}(23^2+22^2)}{24^2}\approx 0.879.$$

**【* 例 9】** 设事件 $A,B$ 的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{2}$，试求下列三种情况下 $P(\overline{A}B)$ 的值.

(1) $A$ 与 $B$ 互斥； (2) $A\subset B$； (3) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

**解** (1) 由于 $A$ 与 $B$ 互斥，故 $B\subset\overline{A}$，于是 $B=\overline{A}B$，从而有

$$P(\overline{A}B)=P(B)=\frac{1}{2};$$

(2) 由于 $A\subset B$ 且 $\overline{A}B=B\overline{A}=B-A$，所以

$$P(\overline{A}B)=P(B-A)=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6};$$

(3) 因为 $B=AB\cup\overline{A}B$，所以

$$P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}.$$

**【例 10】** 已知 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$，求 $P(B)$，$P(A\cup B)$ 和 $P(A\overline{B})$.

**分析** 要求 $P(A\cup B)$ 首先要知道 $P(B)$ 及 $P(AB)$，利用已知条件及概率的乘法公式可求得 $P(B)$ 及 $P(AB)$.

**解** 由乘法公式知

$$P(AB)=P(B|A)P(A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$P(AB)=P(A|B)P(B),$$

所以 $$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6},$$

所以 $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

而 $$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3},$$

故 $$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B}|A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}.$$

**【例 11】** 已知在 10 只晶体管中有 2 只次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样．求下列事件的概率．

(1) 两只都是正品； (2) 两只都是次品；

(3) 一只是正品，一只是次品； (4) 第二次取出的是次品．

**解** 设 $A=\{$两只都是正品$\}$，$B=\{$两只都是次品$\}$，$C=\{$一只是正品，一只是

次品}．以 $A_i(i=1,2)$ 表示事件“第 $i$ 次取出的是正品”，则有 $A=A_1A_2$，$B=\overline{A}_1\overline{A}_2$，$C=A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2$.

因为不放回抽样，故

(1) $P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$；

(2) $P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$；

(3) $P(C)=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)$

$=P(A_1)P(\overline{A}_2|A_1)+P(\overline{A}_1)P(A_2|\overline{A}_1)$

$=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{9}=\frac{16}{45}$；

(4) $P(\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$=\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{9}{45}$.

**【*例 12】** 设 10 件产品中有 4 件不合格品，从中任取两件，已知两件中有一件是不合格品，问另一件也是不合格品的概率是多少？

**解** 设 $A,B$ 分别表示取出的第一件和第二件为正品，则所求概率为

$$P(\overline{A}\,\overline{B}\,|\,\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{P(\overline{A}\cup\overline{B})}=\frac{P(\overline{A}\,\overline{B})}{1-P(AB)}.$$

因为 $$P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{A_4^2}{A_{10}^2}=\frac{2}{15}\quad 及\quad 1-P(AB)=1-\frac{A_6^2}{A_{10}^2}=\frac{2}{3},$$

所以 $$P(\overline{A}\ \overline{B}|\overline{A}\cup\overline{B})=\frac{1}{5}.$$

**【例 13】** 某光学仪器厂制造的透镜，第一次落下时打破的概率为 0.5，若第一次落下未打破，第二次再落下打破的概率为 0.7，若前两次落下未打破，第三次落下打破的概率为 0.9. 试求透镜落下三次而未打破的概率．

**解** 设 $A=$ {透镜落下三次而未打破}，$B_i=$ {第 $i$ 次落下打破}，$i=1,2,3$.

则 $A=\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3$，故有

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3)=P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}|\overline{B_1})P(\overline{B_3}|\overline{B}_1\overline{B}_2)\\&=(1-0.5)(1-0.7)(1-0.9)=0.015.\end{aligned}$$

另解 依题意 $\overline{A}=B_1\cup\overline{B_1}B_2\cup\overline{B_1}\ \overline{B_2}B_3$，而 $B_1,\overline{B_1}B_2,\overline{B_1}\ \overline{B_2}B_3$ 是两两互不相容事件，故有

$$P(\overline{A})=P(B_1)+P(\overline{B_1}B_2)+P(\overline{B_1}\ \overline{B_2}B_3),$$

又已知 $P(B_1)=0.5$，$P(B_2|\overline{B_1})=0.7$，$P(B_3|\overline{B}_1\overline{B}_2)=0.9$，故

$$\begin{aligned}P(\overline{A})&=P(B_1)+P(\overline{B_1}B_2)+P(\overline{B}_1\overline{B}_2B_3)\\&=P(B_1)+P(\overline{B_1})P(B_2|\overline{B_1})+P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}|\overline{B_1})P(B_3|\overline{B_1}\ \overline{B_2})\end{aligned}$$