21世纪 高等学校电子信息类规划教材

《电磁场与电磁波(第四版)》学习指导

王家礼 朱满座 路宏敏 王新稳 编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

21 世纪高等学校电子信息类规划教材

《电磁场与电磁波(第四版)》学习指导

王家礼　朱满座　路宏敏　王新稳　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是依据《电磁场与电磁波(第四版)》一书(西安电子科技大学出版社,2016),为指导读者深入理解“电磁场与电磁波”课程内容,提高学习水平而编写的。全书分八章,每章都由“基本内容与公式”、“例题示范”和“习题及参考答案”三部分组成。

本书既可作为“电磁场与电磁波”课程的学习指导书,也可作为读者报考相关专业研究生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

《电磁场与电磁波(第四版)》学习指导/王家礼等编著.

—西安:西安电子科技大学出版社,2016.11

21世纪高等学校电子信息类规划教材

ISBN 978-7-5606-4166-9

Ⅰ.①电… Ⅱ.①王… Ⅲ.①电磁场—高等学校—教学参考资料 ②电磁波—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第263014号

策　　划　云立实

责任编辑　云立实

出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　陕西利达印务有限责任公司

版　　次　2016年11月第1版　2016年11月第1次印刷

开　　本　787毫米×1092毫米　1/16　印张　11.5

字　　数　269千字

印　　数　1～3000册

定　　价　21.00元

ISBN 978-7-5606-4166-9/O

XDUP　4458001—1

前　　言

本书作为高等学校电子类专业“电磁场与电磁波”课程的学习指导书，是与西安电子科技大学出版社出版的教材《电磁场与电磁波(第四版)》(2016)配套使用的。王家礼、朱满座、路宏敏、王新稳参加了全书的编写工作，其中第一、八章由王新稳负责编写，第二、三、四章由朱满座负责编写，第五、六、七章由路宏敏负责编写，王家礼负责全书的统稿工作。

西安电子科技大学出版社相关人员为本书的出版付出了艰辛的劳动，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免出现不当之处，衷心希望使用本书的老师、同学和读者批评指正。

编　者

2016 年 3 月

目　　录

第一章　矢 量 分 析

一、基本内容与公式

1. 我们讨论的物理量若只有大小，则它是一个标量函数，该标量函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场，该场称为标量场。若我们讨论的物理量既有大小又有方向，则它是一个矢性函数，该矢性函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场，该场称为矢量场。矢量运算应满足矢量运算法则。

2. 标量函数 u 在某点沿 l 方向的变化率$\frac{\partial u}{\partial l}$，称为标量场 u 沿该方向的方向导数。标量场 u 在该点的梯度 $\mathrm{grad}u = \nabla u$ 与方向导数的关系为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \boldsymbol{l}$$

标量场 u 的梯度是一个矢量，它的大小和方向就是该点最大变化率的大小和方向。

在标量场 u 中，具有相同 u 值的点构成一等值面。在等值面的法线方向上，u 值变化最快。因此，梯度的方向也就是等值面的法线方向。

3. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 S 的通量为 $\Psi = \int_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$。矢量 $\boldsymbol{A}$ 在某点的散度定义为

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

它是一标量，表示从该点散发的通量体密度，描述了该点的通量源强度。其散度定理为

$$\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A} \mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

4. 矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合曲线 c 的线积分 $\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿该曲线的环量。矢量 $\boldsymbol{A}$ 在某点的旋度定义为

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\left[\oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]_{\max}}{\Delta S}$$

它是一矢量，其大小和方向是该点最大环量面密度的大小和此时的面元方向，它描述旋涡源强度。其斯托克斯定理为

$$\int_S (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_c \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

5. 哈密顿微分算子 ∇ 是一个兼有矢量和微分运算作用的矢量运算符号。$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 可看做两个矢量的标量积，$\nabla \times \boldsymbol{A}$ 可看做两个矢量的矢量积。计算时，先按矢量运算法则展开，然后再做微分运算。∇u 可看做矢量与标量相乘。在直角坐标系中，其 ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

在圆柱坐标系中，其 ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

在球面坐标系中，其 ∇ 算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\boldsymbol{e}_\phi$$

6. 亥姆霍兹定理总结了矢量场共同的性质：矢量场可由矢量场的散度和旋度唯一地确定；矢量场的散度和旋度各对应矢量场中的一种源。所以分析矢量场时，应从研究它的散度和旋度入手，旋度方程和散度方程构成了矢量场的基本方程。

二、例题示范

例 1－1 求数量场 $\varphi = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面方程。

解： 函数在点 $M(1, 2, 3)$ 处的值为

$$\varphi = \ln(1 + 4 + 9) = \ln 14$$

故通过点 $M(1, 2, 3)$ 的等值面为

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln 14$$

即

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

例 1－2 设

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_x + a_2\boldsymbol{e}_y + a_3\boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$

求矢量场 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$ 的矢量线。

解： 由矢量积的运算规则可得

$$\boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2 z - a_3 y)\boldsymbol{e}_x + (a_3 x - a_1 z)\boldsymbol{e}_y + (a_1 y - a_2 x)\boldsymbol{e}_z$$

则矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_2 z - a_3 y} = \frac{\mathrm{d}y}{a_3 x - a_1 z} = \frac{\mathrm{d}z}{a_1 y - a_2 x} \tag{1-1}$$

上式是一个等比式。设比值为 K，根据分子分母同乘一个数比值不变，则(1－1)式第一项分子分母同乘 a_1，第二项分子分母同乘 a_2，第三项分子分母同乘 a_3，比值不变，可得

$$\frac{a_1\,\mathrm{d}x}{a_1(a_2z-a_3y)}=\frac{a_2\,\mathrm{d}y}{a_2(a_3x-a_1z)}=\frac{a_3\,\mathrm{d}z}{a_3(a_1y-a_2x)}=K$$

则可写成如下形式：

$$\frac{a_1\,\mathrm{d}x}{a_1(a_2z-a_3y)}=K \quad 或 \quad a_1\,\mathrm{d}x=Ka_1(a_2z-a_3y)$$

$$\frac{a_2\,\mathrm{d}y}{a_2(a_3x-a_1z)}=K \quad 或 \quad a_2\,\mathrm{d}y=Ka_2(a_3x-a_1z)$$

$$\frac{a_3\,\mathrm{d}z}{a_3(a_1y-a_2x)}=K \quad 或 \quad a_3\,\mathrm{d}z=Ka_3(a_1y-a_2x)$$

对上面三式求和可得

$$\begin{aligned}a_1\,\mathrm{d}x+a_2\,\mathrm{d}y+a_3\,\mathrm{d}z&=\mathrm{d}(a_1x)+\mathrm{d}(a_2y)+\mathrm{d}(a_3z)\\&=\mathrm{d}(a_1x+a_2y+a_3z)=0\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{d}(a_1x+a_2y+a_3z)=0$，所以

$$a_1x+a_2y+a_3z=C_1 \tag{1-2}$$

式中 C_1 为任意常数。

再将(1－1)式第一项分子分母同乘 x，第二项分子分母同乘 y，第三项分子分母同乘 z，比值不变，同理可以求出：

$$x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=0$$

因为 $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)=0$，所以

$$x^2+y^2+z^2=C_2 \tag{1-3}$$

式中 C_2 为任意常数。

最后得矢量线方程为

$$\begin{cases}a_1x+a_2y+a_3z=C_1\\x^2+y^2+z^2=C_2\end{cases}$$

式中 C_1、C_2 为任意常数。

例 1－3 求函数 $\varphi=3x^2y-y^3z^2$ 在点 $M(1,-2,-1)$ 处沿矢量 $\boldsymbol{a}=yz\boldsymbol{e}_x+xz\boldsymbol{e}_y+xy\boldsymbol{e}_z$ 方向的方向导数。

解： 矢量 $\boldsymbol{a}$ 在 M 点处的值为

$$\boldsymbol{a}\,|_M=2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_z$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=-\frac{1}{3},\ \cos\gamma=-\frac{2}{3}$$

而

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M=6xy\,|_M=-12$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M=(3x^2-3y^2z^2)\,|_M=3-12=-9$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_M = -2y^3z\mid_M = -16$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma\right|_M = -12\times\frac{2}{3} + 9\times\frac{1}{3} + 16\times\frac{2}{3} = \frac{17}{3}$$

例 1-4 求函数 $\varphi = 3x^2y - y^2$ 在点 $M(2, 3)$ 处沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 x 增大一方的方向导数。

解： 函数 φ 在某点处沿某曲线的某一方向的方向导数等于函数 φ 在该点处沿同方向的切线方向的方向导数，而曲线 $y = x^2 - 1$ 在点 M 处沿所取方向的切线斜率为

$$y'\mid_M = 2x\mid_M = 4$$

即

$$\tan\alpha = 4$$

其方向余弦

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

而

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|_M = 6xy\mid_{(2,3)} = 36$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right|_M = (3x^2 - 2y)\mid_{(2,3)} = 6$$

于是所求的方向导数为

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right|_M = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta\right|_M = 36\times\frac{1}{\sqrt{17}} + 6\times\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{60}{\sqrt{17}}$$

例 1-5 求数量场 $\varphi = \dfrac{1}{r}$ 在过点 $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 的等值面上过该点的切平面方程。

解： 数量场 $\varphi = \dfrac{1}{r}$ 的等值面方程为 $\dfrac{1}{r} = c$，即

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{c^2}$$

而通过点 $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ 的等值面则为单位球面：

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

由于过点 M 的切平面的法线矢量 $\boldsymbol{n}$ 垂直于等值面，也就是该数量场在 M 点处的梯度，即

$$\boldsymbol{n} = \nabla\varphi\Big|_M = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\Big|_M = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_x + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_y + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}_z\right)$$

所以，所求的切平面方程为

$$-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(z - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

即

$$x+y+z=\sqrt{3}$$

例 1-6　如图 1-1 所示，设 P 为焦点在 A、B 处的某一椭圆上的任一点，试证明，直线 AP、BP 与椭圆在 P 点的切线所成之夹角相等。

证明： 令 $\boldsymbol{R}_1=AP$，$\boldsymbol{R}_2=BP$ 分别代表由焦点 A、B 至 P 点的向量，$\boldsymbol{T}$ 为椭圆在 P 点的单位切向量。$\boldsymbol{R}_1$ 与 $\boldsymbol{T}$ 的夹角为 α_1，$\boldsymbol{R}_2$ 与 $-\boldsymbol{T}$ 的夹角为 α_2。

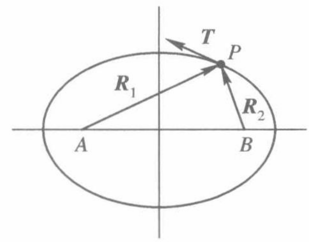

图 1-1　例 1-6 用图

根据椭圆的性质可知，该椭圆方程为 $R_1+R_2=C$（C 为一常数），则该椭圆的法向量 $\boldsymbol{n}$ 为

$$\boldsymbol{n}=\nabla(R_1+R_2)$$

显然 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}=0$，即

$$\nabla(R_1+R_2)\cdot\boldsymbol{T}=0$$

或

$$\nabla R_1\cdot\boldsymbol{T}=\nabla R_2\cdot(-\boldsymbol{T})$$

由于

$$\nabla R_1=\frac{\boldsymbol{R}_1}{R_1}=\boldsymbol{R}_1^\circ\text{（单位矢量）}$$

$$\nabla R_2=\frac{\boldsymbol{R}_2}{R_2}=\boldsymbol{R}_2^\circ\text{（单位矢量）}$$

所以

$$\nabla R_1\cdot\boldsymbol{T}=\cos\alpha_1,\quad \nabla R_2\cdot(-\boldsymbol{T})=\cos\alpha_2$$

即

$$\alpha_1=\alpha_2$$

该题的物理解释是：由椭圆的一个焦点发出的光线、电磁波或声波，会被椭圆反射后经过另一个焦点。$\alpha_1=\alpha_2$ 表明，入射角等于反射角。

例 1-7　已知矢量场 $\boldsymbol{A}=(axz+x^2)\boldsymbol{e}_x+(by+xy^2)\boldsymbol{e}_y+(z-z^2+cxz-2xyz)\boldsymbol{e}_z$，试确定 a、b、c，使得 $\boldsymbol{A}$ 成为一无源场。

解： 要使矢量场 $\boldsymbol{A}$ 无源，则必要求 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$，即

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}&=az+2x+b+2xy+1-2z+cx-2xy\\&=(a-2)z+(2+c)x+b+1=0\end{aligned}$$

要使上式成立，必须有

$$a-2=0,\quad 2+c=0,\quad b+1=0$$

故

$$a=2,\quad b=-1,\quad c=-2$$

此时

$$\boldsymbol{A}=(2xz+x^2)\boldsymbol{e}_x+(xy^2-y)\boldsymbol{e}_y+(z-z^2-2xz-2xyz)\boldsymbol{e}_z$$

例 1－8　如图 1－2 所示，设 S 是由柱面 $x^2+y^2=a^2$ 及平面 $z=0$ 和 $z=h$ 围成的封闭曲面，求矢径 $\boldsymbol{r}$ 穿出 S 的柱面部分的通量。

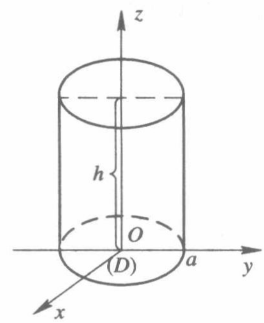

图 1－2　例 1－8 用图

解：设 S_1 和 S_2 为闭曲面 S 的顶部与底部的圆面，则所求的通量可用穿出闭曲面 S 的总通量减去穿出 S_1 和 S_2 面的通量求得，即

$$\begin{aligned}\Psi&=\oint\!\!\!\!\oint_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}-\iint_{S_1+S_2}\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\&=\iiint_\Omega \nabla\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}V-\iint_{S_1}h\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{S_2}0\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint_\Omega 3\,\mathrm{d}V-\pi a^2h+0\\&=3\pi a^2h-\pi a^2h\\&=2\pi a^2h\end{aligned}$$

例 1－9　已知 $\varphi=3x^2y$，$\boldsymbol{A}=x^3yz\boldsymbol{e}_y+3xy^2\boldsymbol{e}_z$，求 $\mathrm{rot}\,(\varphi\boldsymbol{A})$。

解：　　$\mathrm{rot}\,(\varphi\boldsymbol{A})=\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\varphi\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}$

而

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\0&x^3yz&3xy^2\end{vmatrix}=(6xy-x^3y)\boldsymbol{e}_x-3y^2\boldsymbol{e}_y+3x^2yz\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\6xy&3x^2&0\\0&x^3yz&3xy^2\end{vmatrix}=9x^3y^2\boldsymbol{e}_x-18x^2y^3\boldsymbol{e}_y+6x^4y^2z\boldsymbol{e}_z$$

所以

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=3x^2y^2[(9x-x^3)\boldsymbol{e}_x-9y\boldsymbol{e}_y+5x^2z\boldsymbol{e}_z]$$

例 1-10 证明矢量场：

$$\boldsymbol{A}=(y^2+2xz^2)\boldsymbol{e}_x+(2xy-z)\boldsymbol{e}_y+(2x^2z-y+2z)\boldsymbol{e}_z$$

证明： 若 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，则其源应是发散的，而非涡旋源，即

$$\text{rot}\,\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$$

由于

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2+2xz^2 & 2xy-z & 2x^2z-y+2z\end{vmatrix}$$

$$=(-1+1)\boldsymbol{e}_x-(4xz-4xz)\boldsymbol{e}_y+(2y-2y)\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为有势场。

由 $\nabla\times(\nabla\varphi)\equiv 0$ 可知，$\boldsymbol{A}$ 可表示成势函数 φ 的梯度，即

$$\boldsymbol{A}=-\nabla\varphi$$

由此可得如下三个方程：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-A_x=-(y^2+2xz^2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-A_y=z-2xy$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-A_z=-(2x^2z+2z-y)$$

由第一个方程对 x 积分得

$$\varphi=-xy^2-x^2z^2+c(y,z) \tag{1-4}$$

其中 $c(y,z)$ 暂时是任意的。为了确定它，将上式对 y 求导得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-2xy+\frac{\partial c(y,z)}{\partial y}$$

与第二个方程比较可得

$$c'_y(y,z)=z,\quad c(y,z)=yz+c(z)$$

代回(1-4)式可得

$$\varphi=-xy^2-x^2z^2+yz+c(z) \tag{1-5}$$

为确定 $c(z)$，将(1-5)式对 z 求导，并与第三个方程比较可得

$$c'_z(z)=-2z,\quad c(z)=z^2+c$$

故所求势函数为

$$\varphi=-xy^2-x^2z^2+yz-z^2+c$$

并且

$$\boldsymbol{A}=-\nabla\varphi$$

例 1-11 试证明 $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{e}_x+zx\boldsymbol{e}_y+xy\boldsymbol{e}_z$ 为调和场，并求出场的势函数 φ(φ 也称为调和函数)。

证明： 若矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中恒有 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$ 与 $\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$，则该矢量场 $\boldsymbol{A}$ 称为调和场。也就是说，调和场是指既无源又无旋的矢量场。

由 $\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \boldsymbol{0}$ 可知，调和场存在势函数 φ 满足：

$$\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi$$

又由于 $\nabla \cdot \boldsymbol{A} \equiv 0$，即

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{1-6}$$

可知，势函数 φ 还满足方程(1-6)，而方程(1-6)称为拉普拉斯方程。满足拉普拉斯方程的势函数 φ 也叫调和函数。而

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为拉普拉斯算子。

对于题目中给出的矢量 $\boldsymbol{A}$，由于

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x - x)\boldsymbol{e}_x - (y - y)\boldsymbol{e}_y + (z - z)\boldsymbol{e}_z \\ &= \boldsymbol{0} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{A} &= 0\end{aligned}$$

所以，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为调和场。由于 $\boldsymbol{A} = -\nabla \varphi$，即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -yz, \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -zx, \ \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -xy$$

解之有

$$\varphi = -xyz + c$$

又由于

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -yz, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -xz, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -xy, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

即

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

所以 $\varphi = -xyz + c$ 即为所求调和函数。

例 1-12　设 $\psi(x,y,z)$ 为任意函数，$\boldsymbol{A}(x,y,z)$ 为任意矢量函数，试证明下列矢量恒等式成立。

(1) 任意函数梯度的旋度恒等于零，即 $\nabla \times \nabla \psi \equiv \boldsymbol{0}$

(2) 任意矢量旋度的散度恒等于零，即 $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) \equiv 0$

(3) $\nabla \cdot \nabla \psi = \nabla^2 \psi$

(4) $\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{A} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$

解：(1) 根据梯度的定义，可知

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z = B_x\boldsymbol{e}_x + B_y\boldsymbol{e}_y + B_z\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{B}$$

$$\nabla \times \nabla \psi = \nabla \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ B_x & B_y & B_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z$$

因为

$$\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

所以

$$\nabla \times \nabla \psi = \left(\frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z \equiv \boldsymbol{0}$$

证明完毕。

(2) 已知

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$= C_x\boldsymbol{e}_x + C_y\boldsymbol{e}_y + C_z\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{C}$$

因为

$$\nabla \cdot \nabla \times A = \nabla \cdot \boldsymbol{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial C_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial y}$$

$$\frac{\partial C_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}$$

所以

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}\equiv 0$$

证明完毕。

(3)

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\nabla\psi&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial\psi}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right)\psi\\&=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=\nabla^2\psi\end{aligned}$$

证明完毕。

(4) 已知

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{A}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\A_x&A_y&A_z\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z\\&=B_x\boldsymbol{e}_x+B_y\boldsymbol{e}_y+B_z\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{B}\end{aligned}$$

式中:

$$B_x=\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)$$

$$B_y=\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)$$

$$B_z=\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{B}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x&\boldsymbol{e}_y&\boldsymbol{e}_z\\B_x&B_y&B_z\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\end{vmatrix}\\&=\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

式中:

$$\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial y}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}$$

因此

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z\partial y}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$+\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y-\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{e}_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla^2 A_x=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_x$$

$$\nabla^2 A_x-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$$

同理，有

$$\nabla^2 A_y=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_y,\qquad \nabla^2 A_y-\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 A_z=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A_z,\qquad \nabla^2 A_z-\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}$$

所以

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\left(\nabla^2 A_x-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial z}+\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\nabla^2 A_y-\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y-\left(\nabla^2 A_z-\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{e}_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_z$$

又因为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\partial A_x}{\partial x}=\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\partial A_y}{\partial y}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z},\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\partial A_z}{\partial z}=\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial x}$$

所以

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\left(\nabla^2 A_x-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\right)\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_x$$

$$-\left(\nabla^2 A_y-\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\right)\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_y$$

$$-\left(\nabla^2 A_z-\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{e}_z+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-(\nabla^2A_x)\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial^2A_x}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_x+\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_x-\frac{\partial^2A_x}{\partial x^2}\boldsymbol{e}_x$$
$$-(\nabla^2A_y)\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial^2A_y}{\partial y^2}\boldsymbol{e}_y+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_y-\frac{\partial^2A_y}{\partial y^2}\boldsymbol{e}_y$$
$$-(\nabla^2A_z)\boldsymbol{e}_z+\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}\boldsymbol{e}_z+\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_z-\frac{\partial^2A_z}{\partial z^2}\boldsymbol{e}_z$$
$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

证明完毕。

三、习题及参考答案

1-1　矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z$ 与各坐标轴正向的夹角为 α、β、γ，请用坐标 (x, y, z) 来表示 α、β、γ，并证明：

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

解： 由于

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

所以

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2}=1$$

1-2　已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x-9\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{e}_x-4\boldsymbol{e}_y+3\boldsymbol{e}_z$，求：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

(4) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$

解：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{e}_x-13\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$

(2) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=2+36-3=35$

(4) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & -9 & -1\\ 2 & -4 & 3\end{vmatrix}=-31\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y+14\boldsymbol{e}_z$

1-3　已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+b\boldsymbol{e}_y+c\boldsymbol{e}_z$，$\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x+3\boldsymbol{e}_y+8\boldsymbol{e}_z$，若使 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}\parallel\boldsymbol{B}$，则 b 和 c 各为多少？

解：

(1) 若使 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{B}$，则要求 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，即

$$-1+3b+8c=0$$