普通高等教育基础课规划教材

高等数学学习辅导

第2版

南京理工大学应用数学系　编

CALCULUS

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学学习辅导

第 2 版

南京理工大学应用数学系　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”而编写的一本教学参考书，是与南京理工大学应用数学系编《高等数学》第2版配套的学习辅导书．全书包括一元函数微积分、多元函数微积分、向量代数与空间解析几何、无穷级数和微分方程等内容，共有十二章，每章按主要知识点分成若干小节，每小节由内容提要，重点、难点分析，典型例题三部分组成．

对于中学教学中淡化的某些重要教学内容（如：数学归纳法、极坐标、行列式、复数等），我们在相应章节进行了补充．在每一章的结尾，给出了两套自测题，按照上、下两个学期，分别汇编了两套期中考试试卷和三套期末考试试卷，以及三套数学竞赛试题，供读者考前模拟练习使用．

本书主要是作为普通高等工科院校学生的课外学习指导用书，也可作为夜大、职大、自考、考研等学生的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导/南京理工大学应用数学系编．
—2版．—北京：机械工业出版社，2015.12
普通高等教育基础课规划教材
ISBN 978-7-111-54500-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．南…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第183795号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　孟令磊
责任印制：常天培　责任校对：段凤敏　任秀丽
北京京丰印刷厂印刷
2016年10月第2版·第1次印刷
169mm×239mm·23印张·442千字
标准书号：ISBN 978-7-111-54500-2
定价：43.00元

前　言

本书是参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，配合《高等数学》教材的学习而编写的一本教学参考书．全书共有十二章，每章按主要内容分小节，每小节均由三部分内容组成：

1．内容提要：结合编者多年教学经验，对本小节的主要内容按照基本概念、重要结论、方法与技巧等方面进行归纳总结，便于学生查找复习．

2．重点、难点分析：给出本小节的重点、难点，并对重要内容进行强调，使学生学习时心中有数，目的明确．

3．典型例题：总结本节的典型例题，并给出详细的分析和解答，供学生课后复习．

另外，对于中学教学中淡化的某些重要教学内容（如：数学归纳法、极坐标、行列式、复数等），我们在相应章节进行了补充．且在每章后增加了应用能力矩阵，以及编有两套自测题，第一套主要是基本题，第二套有提高题．学生既可用来检测本章的学习效果，也可作为章节测验题．最后，还按照上、下两个学期，分别汇编了两套期中考试试卷和三套期末考试试卷，以及三套数学竞赛试题，供学生考前模拟练习使用．

本书主要作为普通高等工科院校学生的课外学习指导书，也可作为夜大、职大、自考、考研等学生的参考书．本书由许春根、王为群、徐慧玲、张丽琴、杨建新、邱志鹏共同编写．许春根负责全部稿件的统稿工作，并完成第一、二章的编写．王为群编写第三、四章，徐慧玲编写第五、六章，张丽琴编写第七、八章，杨建新编写第九、十章，邱志鹏编写第十一、十二章．杨孝平教授、俞军副教授仔细审阅了全部书稿，并提出了许多宝贵意见，机械工业出版社的郑玫编辑给予很多帮助，在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳请同行专家和热心读者批评指教，不胜感激．

编　者

目　录

第一章　函数、极限与连续

第一节　函　　数

一、内容提要

1. 映射

设 A、B 是两个非空集合，若对每个 $x \in A$，按照某种确定的法则 f，有唯一确定的 $y \in B$ 与它相对应，则称 f 为从 A 到 B 的一个映射，记作 $f: A \to B$，其中 y 称为 x 在映射 f 下的像，并记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$.

2. 函数

设非空数集 $D \subseteq \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，记作 $y = f(x)$，$x \in D$.

确定函数有两个要素，分别是定义域 D 和对应法则 f.

3. 反函数

若函数 $f: A \to B$ 是一一映射，则其逆映射 $f^{-1}: B \to A$ 称为函数 f 的反函数. 若函数 $f: A \to f$（A）是单射，则 f 一定存在反函数 $f^{-1}: f(A) \to A$.

一般地，$y = f(x)$，$x \in D$ 的反函数记为 $y = f^{-1}(x)$，$x \in f(D)$.

4. 复合函数

设有函数 $y = g(u)$，$u \in D_g$ 及 $u = f(x)$，$x \in D$，且 $f(D) \subseteq D_g$，则对于 D 中每一个 x 值，通过变量 u，有一个确定的 y 值与之对应，称 y 是定义在 D 上的由 f 和 g 复合而成的复合函数，记作 $y = g(f(x))$，$x \in D$，其中 u 称为中间变量.

5. 初等函数

基本初等函数是指下列几类函数：常函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所得到的并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

6. 函数的几种特性

函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性是函数的几种特性，并不是函数的共性，每一种函数特性都有明显的几何意义.

函数在定义域 X 上有界的图形特征是对应于 X 上的函数值被限制在平行于 x 轴的两条直线之间. 单调函数的图形特征是在 X 上函数曲线是始终上升或下降的.

奇函数的图形是关于原点对称的. 偶函数的图形是关于 y 轴对称的. 周期函数在一个周期上的图形周期出现.

二、重点、难点分析

初等函数是高等数学研究的主要对象，它们由基本初等函数构成. 本节的一个重点是函数的复合运算，把一个复合函数分解成几个简单函数，是我们必须掌握的一项基本技能. 在后面几章中，关于复合函数的求导，积分计算中的换元法和分部积分法都基于复合函数的分解.

求一个函数的反函数也是本节的一个难点. 一般步骤为：①由方程 $f(x)=y$ 解出 x，即用关于 y 的解析式来表示 x；②把上述解析表达式中的 x 与 y 对换，即得反函数 $y=f^{-1}(x)$.

三、典型例题

例 1 指出函数 $y=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$是由哪些简单函数复合而成.

【分析】 从内层开始，逐层向外找出复合函数的复合关系.

解 设 $v=\dfrac{x-1}{2}$，$u=v^{\frac{1}{3}}$，$y=\arctan u$，所以 $y=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$是 $y=\arctan u$，$u=v^{\frac{1}{3}}$，$v=\dfrac{x-1}{2}$复合而成.

例 2 求 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 的反函数，其中 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$.

【分析】 由分段函数求反函数，需要逐段讨论函数的单调性和取值范围.

解 先从 $y=f(x)$ 中解出 x，因为 $f(x)$ 是分段函数，所以要分区间来考虑，当 $x\geqslant 0$ 时 $y=x+1$，单调增加的，解出 $x=y-1$，此时 $y\geqslant 1$；当 $x<0$ 时 $y=-x^2$，单调增加的，解出 $x=-\sqrt{-y}$，此时 $y<0$. 即

$$x=\begin{cases}y-1 & y\geqslant 1\\ -\sqrt{-y} & y<0\end{cases},$$

反函数为
$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}x-1 & x\geqslant 1\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}.$$

例 3 判别下列各组函数是否相同：

（1）函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

（2）函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与 $g(x)=x+1$.

【分析】 对于给定的两个函数，当且仅当它们的定义域和对应法则完全相同时，才表示同一个函数，否则表示不同的函数.

解　(1)函数$f(x)$和$g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，但$f(x)$和$g(x)$的对应法则却不同，特别是当$x<0$时，$f(x)=x$，$g(x)=-x$，故两个函数不相同.

(2)由于函数$f(x)$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而$g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$，故两个函数不相同.

例4　已知$f(x)=e^{x^2}$，$f(\varphi(x))=1-x$，且$\varphi(x)\geqslant 0$，求$\varphi(x)$并写出它的定义域.

【分析】　由复合函数的定义写出$f(\varphi(x))$的另一种表达式，再通过比较求出未知函数.

解　由于$f(\varphi(x))=e^{\varphi^2(x)}=1-x$，可得$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，再根据$\ln(1-x)\geqslant 0$知$1-x\geqslant 1$，即$x\leqslant 0$，故$\varphi(x)$的定义域为$x\leqslant 0$.

例5　讨论双曲函数$y=\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$，$y=\mathrm{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$，以及它们的反函数$y=\mathrm{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ (x\in\mathbf{R})$，$y=\mathrm{arch}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$，$y=\mathrm{arth}x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\ (x\in(-1,1))$的奇偶性.

【分析】　主要根据定义域的对称性，以及$f(-x)$与$f(x)$或$-f(x)$是否相等来确定奇偶性.

解　由奇偶性定义易知$y=\mathrm{sh}x$、$y=\mathrm{th}x$是奇函数，$y=\mathrm{ch}x$是偶函数；由于

$\mathrm{arsh}(-x)=\ln(-x+\sqrt{x^2+1})=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\ln(x+\sqrt{x^2+1})=-\mathrm{arsh}x$；

$\mathrm{arth}(-x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}=-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-\mathrm{arth}x$，所以$y=\mathrm{arsh}x$和$y=\mathrm{arth}x$是奇函数，而$y=\mathrm{arch}x$的定义域不对称，所以$y=\mathrm{arch}x$不具有奇偶性.

例6　指出下列函数在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？

① $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；　　② $y=x\sin x$.

【分析】　证明有界，只需找到一个M，使$|f(x)|\leqslant M$，$x\in D$. 证明无界，可以采取反证法，任取一个正数M，都可找一个函数值$f(x_0)$，使得$|f(x_0)|>M$.

解　① 当$x\neq 0$时$|y|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$　（因为$1+x^2\geqslant 2|x|,x\neq 0$）

又当$x=0$时，$y=0$，所以$|y|\leqslant\dfrac{1}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，故此函数在$(-\infty,+\infty)$内有界.

② 对任意正数$M>0$，取$x_0=\left(2[M]+\dfrac{1}{2}\right)\pi$，则$\sin x_0=1$. 于是$|f(x_0)|=$

$\pi\left(2[M]+\dfrac{1}{2}\right)\sin\left(2[M]+\dfrac{1}{2}\right)\pi=(2[M]+1)\pi>M$，所以，函数 $y=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.

例 7 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{c}{x}$，其中 a、b、c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式并证明 $f(x)$ 是奇函数.

解
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}, \tag{1}$$

在式(1)中用 $\dfrac{1}{x}$ 代 x，则得
$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx, \tag{2}$$

由式(1)、(2)消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx,$$

故

$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right).$$

由于

$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{-x}+bx\right)=\frac{-c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)=-f(x),$$

所以，$f(x)$ 是奇函数.

第二节 极　　限

一、内容提要

1. 预备知识：数学归纳法

归纳法是一种由特殊到一般的推理方法. 分完全归纳法和不完全归纳法二种.

由于不完全归纳法中推测所得结论可能不正确，因而必须作出证明，证明可用数学归纳法进行.

数学归纳法作为一种证明方法，它的基本思想是递推(递归)思想，由归纳法得到的与自然数有关的数学命题常采用数学归纳法来证明，它的操作步骤分为二步：

(1) 先证明当 $n=n_0$(n_0 是使命题成立的自然数)时命题成立；

(2) 假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}_+, k\geqslant n_0)$ 时命题成立，再证明当 $n=k+1$ 时命题也成立，那么就能证明这个命题成立，这种证明方法叫数学归纳法.

例如，利用数学归纳法证明 $2^n>n^2$($n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant5$)成立，过程如下：

(1) 当 $n=5$ 时，$2^n>n^2$ 成立.

(2) 假设 $n=k(k\in\mathbf{N}, k\geqslant5)$ 时 $2^k>k^2$ 成立，那么

$$
\begin{aligned}
2^{k+1} &= 2\cdot 2^k = 2^k + 2^k > k^2 + 2^k(\text{利用了假设 } 2^k > k^2 \text{ 成立}) \\
&= k^2 + (1+1)^k > k^2 + C_k^0 + C_k^1 + C_k^{k-1} \\
&= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2,
\end{aligned}
$$

从而，当 $n=k+1$ 时，$2^n > n^2$ 成立.

由过程(1)(2)可知，对 $n\geqslant 5$ 的一切自然数 $2^n > n^2$ 都成立.

2. 极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n - A|<\varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $|x|>N$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立.

上述给出了当 $n\to\infty$（数列极限）、$x\to\infty$、$x\to x_0$ 时，函数极限的 $\varepsilon-\delta(N)$ 定义，其他情况：$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，可类似给出定义. 数列也是一种函数(整标函数)，我们为了叙述的方便，有时用符号 $\lim f(x)$ 表示上述某一极限过程的函数极限.

3. 极限的性质

① 唯一性：收敛数列的极限是唯一的；函数在某一极限过程的极限值是唯一的.

② 有界性：如果数列收敛，则该数列是有界数列；如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时以 A 为极限，则存在正数 δ，使得函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心 δ 邻域内有界. 其他极限过程也有类似的局部有界性.

③ 保号性：若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a>0$（或 <0），则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，恒有 $u_n>0$（或 <0）；若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）. 其他极限过程也有类似的保号性.

4. 极限的四则运算

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A\pm B$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)] = \lim f(x)\cdot\lim g(x) = A\cdot B$，特别地，$\lim[k\cdot f(x)] = k\lim f(x)$；

(3) 当 $B\neq 0$ 时，$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

上述四则运算对所有极限过程都成立.

5. 极限存在的准则

(1) 夹逼准则

设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 满足

① $\exists \eta>0$，当 $0<|x-x_0|<\eta$ 时 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

② $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

其他极限过程也有类似夹逼准则，如数列极限：$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n\,(n\geqslant n_0)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$.

（2）单调有界准则：单调有界数列必有极限.

6. 无穷小和无穷大

如果函数 $f(x)$ 在某一极限过程中以零为极限，则称 $f(x)$ 为该极限过程中的无穷小量，简称无穷小. 若函数 $f(x)$ 在某一极限过程中 $f(x)$ 的绝对值无限地增大，则称 $f(x)$ 为该极限过程中的无穷大量，简称无穷大. 在同一极限过程中，无穷大量的倒数是无穷小量，恒不为零的无穷小量的倒数是无穷大量.

7. 无穷小的比较

设变量 α 与 β 是在同一个极限过程中的无穷小量，如果在这一极限过程中，当

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0 & \text{称}\beta\text{是比}\alpha\text{高阶无穷小，记作}\beta=o(\alpha),\\ \infty & \text{称}\beta\text{是比}\alpha\text{低阶无穷小，}\\ c & \text{称}\alpha\text{和}\beta\text{同阶无穷小}(c\neq 0),\\ 1 & \text{称}\alpha\text{和}\beta\text{等阶无穷小，}\alpha\sim\beta.\end{cases}$$

8. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

二、重点、难点分析

1. 数列极限的“$\varepsilon-N$”定义中的 N 是与 ε 有关的正整数，它的作用在于刻划保证不等式 $|x_n-A|<\varepsilon$ 成立所需要的 n 变大的程度. 一般来说，当 ε 给得更小时，N 要更大些，但当 ε 给定后，随之而取定的 N 并不是唯一的. 因为根据 N 的作用，如果 N 是一个能满足定义要求的正整数，那么任何一个大于 N 的正整数 $N+1$，$N+2$，…，当然也都能满足要求，定义也并不要求取定的 N 是所有符合要求的正整数中最小的一个，只要求存在符合要求的正整数就可以了.

由于 ε 是任意给定的正数，自然 2ε，$\frac{\varepsilon}{2}$，$\sqrt{\varepsilon}$，ε^2，…，也都是任意给定的正数，虽然它们形式上与 ε 有差异，而本质上与 ε 起同样的作用，今后在极限的证明中，常用到这些与 ε 等价的形式.

2. 无穷小是一个以零为极限的变量，在变化过程中其绝对值可以任意小，绝不能将一个很小的数（如 10^{-1000}）看成是无穷小. 在常量中，唯一的只有零可以作为无穷小.

3. 函数极限与数列极限的关系. 我们以函数在点 x_0 的极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 说明这个问题.

如果$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，那么对于任何一个趋向于 x_0 的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0,n=1,2,\cdots)$都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

如果对于每一个收敛于 x_0 数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0,n=1,2,\cdots)$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$存在且相等，用 A 表示这个共同的极限，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

4. 由函数极限的保号性知，若函数的极限大于零(或小于零)，则函数值在某一时刻后大于零(或小于零)，反之不成立. 例如：$f(x)=\dfrac{1}{x^2}>0(x\neq 0)$，而$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$，也就是说，函数值大于零(或小于零)，并不能保证它的极限一定大于零(或小于零).

三、典型例题

例 1　下列命题是否互相等价，简要说明理由.

(1) 对于任意正数 ε，都能找到自然数 N，只要 $n>N$，就有 $|a_n-A|<\varepsilon$;

(2) 对于任意正数 ε，都能找到自然数 N，只要 $n\geqslant N$，就有 $|a_n-A|<\varepsilon$;

(3) 对于任意正数 ε，都能找到自然数 N，只要 $n>N$，就有 $|a_n-A|<M\varepsilon$(其中 M 是某个确定的正数);

(4) 对于任意正数 ε，都能找到自然数 N，只要 $n>N$，就有 $|a_n-A|<\sqrt{\varepsilon}$;

(5) 对于任意自然数 k，都能找到自然数 N_k，只要 $n>N_k$，就有 $|a_n-A|<\dfrac{1}{2^k}$.

解　上述五个命题是互相等价的，命题(1)就是极限"$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$"的定义. 命题(2)与命题(1)的等价性是明显的. 命题(3)，(4)，(5)中的 $M\varepsilon$，$\sqrt{\varepsilon}$，$\dfrac{1}{2^k}$都具有任意性，和 ε 起着同样的作用(能够任意小)，从而上述命题是等价的.

例 2　证明：对于数列 x_n，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 的充要条件是$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=A$.

证　必要性. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则由数列极限定义有：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

因此我们取自然数 k_0，使 $2k_0>2k_0-1>N$，则当 $k>k_0$ 时恒有 $|x_{2k-1}-A|<\varepsilon$，且 $|x_{2k}-A|<\varepsilon$.

于是由数列极限定义知

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k-1}=A\ 且\lim_{k\to\infty}x_{2k}=A.$$

充分性. 设$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=A$，则由数列极限定义有：$\forall\varepsilon>0$，$\exists k_1$，$k_2\in\mathbf{N}_+$，当 $k>k_1$ 时，恒有 $|x_{2k-1}-A|<\varepsilon$，当 $k>k_2$ 时，恒有 $|x_{2k}-A|<\varepsilon$.

取自然数 N，使 $N>\max\{2k_1-1,2k_2\}$，则 $n>N$ 时，上两个等式都成立，从而有 $|x_n-A|<\varepsilon$.

于是由数列极限定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 证毕.

例 3 设 $a>0$，任取 $x_1>0$，令 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$，证明数列 x_n 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 首先用单调收敛准则证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

利用数学归纳法证明 $x_n\geqslant\sqrt{a}(n\geqslant2)$. 事实上，当 $n=1$ 时，$x_1>0$. 当 $n=2$ 时，$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right)\geqslant\sqrt{x_1\cdot\frac{a}{x_1}}=\sqrt{a}>0$.

假设当 $n=k$ 时 $x_k\geqslant\sqrt{a}>0$，则

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{a}{x_k}\right)\geqslant\sqrt{x_k\cdot\frac{a}{x_k}}=\sqrt{a}>0,$$

从而由数学归纳法知

$$x_n\geqslant\sqrt{a}>0\quad(n\geqslant2).$$

又由于

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}{x_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{a}\right)=1,$$

所以 x_n 单调减少，于是由单调收敛准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$. 由于 $x_n\geqslant\sqrt{a}$ $(n\geqslant2)$，知 $A\geqslant\sqrt{a}>0$，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{A}$，由 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，两边同时令 $n\to\infty$，得 $A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，解此方程得到 $A=\sqrt{a}$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

注 此例题告诉我们计算 $\sqrt{a}$ 的一种数值迭代方法.

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证 不难看出 $\sqrt[n]{n}>1(n\geqslant2)$，令 $\sqrt[n]{n}=1+a_n(a_n>0,n\geqslant2)$，则由二项展开式，得 $n=(1+a_n)^n=1+na_n+C_n^2a_n^2+\cdots+a_n^n>1+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2$，由此得 $\frac{n(n-1)}{2}a_n^2<n-1$，即得 $0<a_n^2<\frac{2}{n}$，由夹逼准则知，当 $n\to\infty$ 时，$a_n^2\to0$，从而 $a_n\to0$，因此，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)=1$.

注 同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$，常把三个极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ $(a>$

0)，$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$（$|q|<1$）当作结论使用.

例 5　证明数列 $x_1=\sqrt{6}$，$x_2=\sqrt{6+\sqrt{6}}$，$x_3=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$，…的极限存在，并求极限值.

【分析】　先通过单调有界准则证明极限的存在性，再求极限值.

证　运用数学归纳法证明此数列单调增加，当 $n=1$ 时，$x_1=\sqrt{6}<\sqrt{6+\sqrt{6}}=x_2$ 成立；假定 $n=k$ 时 $x_k<x_{k+1}$，则当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}<\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$. 故当 $n\geqslant 1(n\in\mathbf{N}_+)$时，$x_n<x_{n+1}$，即此数列是单调增加的. 同理，由数学归纳法容易证明，对任意的自然数 n，都有 $x_n<3$，即数列有界. 因此，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在. 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，令 $n\to\infty$，对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$的两边同时取极限，得方程$a=\sqrt{6+a}$或 $a^2-a-6=0$，解得 $a=3$ 或 -2(舍负)，故极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

例 6　已知 $x_0=1$，$x_n=1+\dfrac{1}{x_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$，证明$\{x_n\}$收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【分析】　数列本身没有单调性，但是它的奇数子列、偶数子列具有单调性，分别应用单调有界准则证明它们的极限的存在性.

解　由 $x_0=1$，知 $x_1>1$，由归纳法知 $x_n>1(n=1,2,\cdots)$，且当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$x_n=1+\frac{1}{x_{n-1}}=1+\frac{1}{1+\dfrac{1}{x_{n-2}}}=1+\frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}}=2-\frac{1}{1+x_{n-2}}<2,$$

$$x_n-x_{n-2}=\frac{x_{n-2}-x_{n-4}}{(1+x_{n-2})(1+x_{n-4})},\quad n=4,5,\cdots,$$

故数列$\{x_{2n-1}\}$和$\{x_{2n}\}$均单调，又因为

$$x_1=2,\ x_3=2-\frac{1}{3}<x_1;\ x_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>x_0,$$

故$\{x_{2n-1}\}$单调递减且$\{x_{2n}\}$单调增加.

又因为 $1\leqslant x_n\leqslant 2$，故$\{x_{2n-1}\}$和$\{x_{2n}\}$都收敛. 又 $x_n=2-\dfrac{1}{1+x_{n-2}}$，设

$$\lim_{n\to\infty}x_{2n-1}=A,\ \lim_{n\to\infty}x_{2n}=B,$$

从而 $A^2-A-1=0$，$B^2-B-1=0$，解得

$$A=B=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad\left(舍去\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.