主编 龙松

普通高等院校数学类课程教材

概率统计及应用

GAILü TONGJI JI YINGYONG

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等院校数学类课程教材

概率统计及应用

主　编　龙　松
副主编　朱祥和　李春桃

华中科技大学出版社
中国·武汉

内容简介

"概率论与数理统计"是高等院校理工、经管等各专业的一门必修基础课,是后续专业课程和现代科学技术的重要理论基础,在自然科学、工程技术以及经济等领域里都有着十分广泛的应用.

本书的主要内容有概率论的基本概念、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及其抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析、Excel 软件在概率统计中的应用等.

本书结构严谨,逻辑清晰,叙述清楚,说明到位,行文流畅,例题丰富,可读性强,可作为高等院校各专业的教材,也可供相关领域的技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计及应用/龙松主编.—武汉:华中科技大学出版社,2016.7
ISBN 978-7-5680-1811-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①龙… Ⅲ.①概率统计 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 103127 号

概率统计及应用
GaiLü Tongji Ji YingYong

龙 松 主编

策划编辑:谢燕群
责任编辑:熊 慧
封面设计:原色设计
责任校对:张 琳
责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)81321913
录 排:武汉市洪山区佳年华文印部
印 刷:武汉鑫昶文化有限公司
开 本:710mm×1000mm 1/16
印 张:17.25
字 数:358 千字
版 次:2016 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
定 价:34.80 元

华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务

前 言

概率论与数理统计是研究随机现象的数量规律性的一门学科.一方面,它有自己独特的概念和方法,另一方面,它与其他数学分支又有紧密的联系,是现代数学的重要组成部分.概率论与数理统计的应用几乎遍及所有的科学技术领域.随着科学技术的迅速发展,它在经济、管理、工程、技术、物理、化学、地质、天文、医学、生物、环境、教育、国防等领域中的作用日益显著.可以毫不夸张地说,几乎在人类活动的一切领域,都不同程度地应用了概率论与数理统计提供的数学模型.

然而,在传统的应试教育的引导下,学生在学习过程中只重知识的堆积而不重概念的理解,只会死记硬背数学公式而不注重应用背景,更不会进行应用.而在工程实践和科学研究中,将相应具有严格的条件限制、缜密逻辑推理的定理以及公式直接在现实中进行应用几乎是不可能的,甚至一个貌似简单的计算都要花费很长的时间.因此,在大学数学教学中,特别是在非数学类专业的数学教学中,如何把复杂的理论学习与具体的应用实践结合起来就成了研究的重点,本书也正是因此而编写.

随着近几年计算机的飞跃发展,各种统计软件的功能越来越强大,这些强有力的计算工具为数学教育改革提供了良好的契机,而在这些统计软件中,最简单易学的莫过于 Excel.该软件操作简单,界面清晰,是 Office 办公软件的一个重要成员,现在基本所有的电脑都安装有该类软件.该软件采用电子表格的形式进行数据处理,工作界面直观简单,采取可视化操作,可操作性强.由于其提供了丰富的函数,因此可以进行大量的数据处理、统计分析和决策,还可以方便地进行制图.

本书作者在多年从事概率论与数理统计教学及组织并辅导全国大学生数学建模竞赛的基础上,编写了这本教材,旨在为广大读者提供较系统的概率论与数理统计及其 Excel 应用的教材.

本书的主要内容有概率论的基本概念、一维随机变量及其分布、二维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及其抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析、Excel 软件在概率统计中的应用等.

本书着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本原理、基本方法,突出基本思想和应用背景,注意将实际例子融入课程内容,表述上从具体问题入手,由易到难,由具体到抽象,深入浅出,便于学生学习以及教师教学.

本书的主要特点是:① 强化了理论的基本原理的介绍,弱化了理论的具体推导,更加注重理论的应用实践.② 内容安排上,不仅加强了应用数理统计的介绍,同时也增加了 Excel 的数据分析功能的介绍,即将复杂的计算公式应用计算机技术进行了

很方便的计算，从而使学生有更多的精力去理解定理的内容，同时也可使理论教学与实验教学、实践训练密切结合，摆脱了数学理论教学与数学实验教学分离的困境，教学效果更加显著. ③ 为了使概念更加清晰，书中提供了大量的示例，还有丰富的习题，以帮助读者理解.

本书由龙松主编，朱祥和、李春桃担任副主编，其中龙松编写了第 1、2、3、4、5、6、7、10 章的内容，朱祥和编写了第 8、9 章的内容，李春桃编写了全书的习题. 另外参与讨论和编写的还有徐彬、张丹丹、沈小芳、张文钢、张秋颖等，在此，对他们的工作表示感谢！

在教材的编写中，多次与华中科技大学齐欢教授、中国地质大学叶牡才教授、第二炮兵指挥学院阎国辉副教授进行了讨论，他们提出了许多宝贵的意见，对本书的编写与出版产生了十分积极的影响，在此表示由衷的感谢！

在教材的编写中参考的相关书籍均列于书后的参考文献中，在此也向有关作者表示感谢！

最后，再次向所有支持和帮助过本书编写和出版的单位和个人表示衷心的感谢，同时更要感谢家人对我们工作的支持，没有他们的默默奉献，就没有该书的顺利出版.

尽管对概率论与数理统计的教材的编写一直在进行着各种努力和尝试，很想奉献给读者一本非常满意的教材，但由于作者水平的限制，书中的错误和缺点在所难免，欢迎广大读者批评与指正，以期不断完善，谢谢！

作　者

2016 年 4 月

目　　录

第1章 概率论的基本概念

自然界和社会上发生的现象是多种多样的.有一类现象,称之为确定现象,其特点就是在一定的条件下必然发生,或必然不发生.例如,一枚硬币向上抛后必然下落;在一个标准大气压下,水加热到100 ℃,必然会沸腾等.而另一类现象称为不确定性现象,例如,随意抛掷一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是正面朝下,并且每次在抛掷之前都不能确切地知道其具体的结果.又如,从装有黑白两种不同颜色的球的盒子中随意摸一个球,则摸到的可能是黑球,也可能是白球,而在具体摸之前也不知其具体的结果.这类现象,其特点就是在一定的条件下可能出现这样的结果,也可能出现那样的结果,且在试验和观察之前,不能预知确切的结果,而这个不确定性实际上具有两方面的含义,一是客观结果的不确定性,二是主观猜测或判断的不确定性.尽管该类现象具有不确定性,但人们经过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量重复试验或观察下,它的结果却呈现出某种规律性.例如,多次重复抛掷硬币,得到正面朝上的次数与抛掷的总次数之比随着次数的增多越来越接近于0.5.这种在大量重复试验或观察中所呈现的固有规律性,就是我们以后所说的统计规律性.这种规律性的存在使得利用数学工具研究随机现象成为可能.概率论与数理统计正是研究其统计规律性的一门学科.

概率论与数理统计的应用是很广泛的,几乎渗透到所有科学技术领域,如工业、农业、国防与国民经济的各个部门.例如,工业生产中,可以应用概率统计方法进行质量控制、工业试验设计、产品抽样检查等.还可使用概率统计方法进行气象预报、水文预报和地震预报,等等.另外,概率统计的理论与方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透,产生了各种边缘性的应用学科,如排队论、计量经济学、信息论、控制论、时间序列分析、社会统计学、医药统计学等.

本章主要讲述随机试验、样本空间、随机事件、事件间的关系与运算、概率的定义、古典概型、几何概型、概率的性质、条件概率、乘法公式、全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性等内容.

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验

我们遇到过各种试验,在这里,我们把试验作为一个含义广泛的术语,它包括各

种各样的科学试验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.下面举一些试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币抛一次,观察出现正面的次数.

E_3:抛一枚骰子,观察出现的点数.

E_4:记录汽车站售票处一天内售出的车票数.

E_5:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命.

E_6:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

这些试验都具有以下的特点:

(1) 可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 每次进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

在概率论中,将具有上述三个特点的试验称为随机试验(random experiment).我们约定,本书中以后所提到的试验都是指随机试验.

1.1.2 样本空间

对于随机试验,尽管在每次试验之前不能预知试验的结果,但试验的一切可能的结果是已知的,我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间(sampling space),记为 S 或 Ω. 样本空间的元素,即 E 的每个结果,称为样本点(sampling point),常记为 ω. 例如,上面的 6 个随机试验的样本空间分别为

$S_1=\{H,T\}$;

$S_2=\{0,1\}$;

$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$S_4=\{1,2,\cdots,n\}$(n 是汽车站售票处一天内准备出售的车票数);

$S_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$;

$S_6=\{(x,y)\mid T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$($x$ 表示最低温度,y 表示最高温度,并设这一地区的温度不会低于 T_0,也不会高于 T_1).

应该注意的是,试验 E_1 和 E_2 的过程都是将硬币抛一次,但由于试验的目的不一样,因此样本空间 S_1 和 S_2 完全不同,这说明试验的目的决定试验所对应的样本空间.

1.1.3 随机事件

在随机试验中,可能发生也可能不发生的事情就称为随机事件(random event).随机事件常用大写字母 $A,B,C,\cdots$表示,它是样本空间 S 的子集合. 在每次试验中,

当出现的样本点 $\omega \in A$ 时，称事件 A 发生，否则，称 A 没有发生.

例如，在 E_3 中，如果用 A 表示事件"掷出偶数点"，那么 A 是一个随机事件. 在一次投掷中，当且仅当掷出的点数是 2、4、6 中的任何一个时才称事件 A 发生了，所以我们把事件 A 表示为 $A=\{2,4,6\}$. 同样地，若用 B 表示事件"掷出的点数大于 3"，那么 B 也是一个随机事件，且 $B=\{4,5,6\}$.

必然事件：对于一个试验 E，在每次试验中必然发生的事件，称为 E 的必然事件(certain event)，记为 S 或 Ω.

不可能事件：在每次试验中都不发生的事件，称为 E 的不可能事件(impossible event)，记为 $\varnothing$. 例如，在 E_3 中，"掷出的点数不超过 6"就是必然事件，用集合表示这一事件就是 E_3 的样本空间 $S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$，而事件"掷出的点数大于 6"是不可能事件，这个事件不包括 E_3 的任何一个可能结果，所以用空集 $\varnothing$ 表示.

对于一个试验 E，它的样本空间 S 是随机试验 E 的必然事件，空集 $\varnothing$ 是不可能事件. 必然事件与不可能事件虽已无随机性可言，但在概率论中，常把它们当作两个特殊的随机事件，这样做是为了数学处理上的方便.

基本事件：只含有单个样本点的事件称为基本事件. 样本空间也称为基本事件空间.

1.1.4　事件间的关系与运算

因为事件是一个集合，所以事件间的关系和运算可以按集合间的关系和运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据"事件发生"的含义，给出它们在概率论中的含义.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 $A, B, A_k (k=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 事件的包含与相等(inclusion and equivalent relation). 若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$ 或者 $A \subset B$. 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，即 $A=B$，则称事件 A 与事件 B 相等.

为了方便起见，规定对于任一事件 A，有 $\varnothing \subset A$. 显然，对于任一事件 A，有 $A \subset \Omega$.

(2) 事件的和(union of events). 事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A \cup B$. 事件 $A \cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 与事件 B 都发生.

事件的和可以推广到多个事件的情景. 设有 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，定义它们的和事件为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生$\}$，记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$. 类似地，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件.

显然，对任一事件 A，有

$$A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cup \varnothing = A$$

（3）事件的积（product of events）. 事件 A 与事件 B 都发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记为 $A \cap B$，简记为 AB. 事件 $A \cap B$（或 AB）发生意味着事件 A 发生，且事件 B 也发生，即 A 与 B 都发生.

类似地，可以定义 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k = \{A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生$\}$ 以及可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的积事件 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 都发生$\}$.

显然，对任一事件 A，有

$$A \cap \Omega = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$$

（4）互不相容事件（互斥）（incompatible events）. 若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB = \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是互斥的，或称它们是互不相容的. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中的任意两个都互斥，则称这些事件是两两互斥的. 当事件 A 与事件 B 互不相容时，有时将两事件的和事件 $A \cup B$ 记为 $A + B$.

注 基本事件是两两互不相容的.

（5）对立事件（opposite events）. “A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件，记为 $\overline{A}$. A 和 $\overline{A}$ 满足：$A \cup \overline{A} = \Omega$，$A\overline{A} = \varnothing$，$\overline{\overline{A}} = A$. 对立事件有时也称逆事件.

注 对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件未必是对立事件.

（6）事件的差（difference of events）. 事件 A 发生而事件 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A - B$，即 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A$ 且 $\omega \notin B\}$，由事件的积和对立事件的定义，有

$$A - B = A - AB = A\overline{B}$$

显然，对任一事件 A，有

$$A - A = \varnothing, \quad A - \varnothing = A, \quad A - \Omega = \varnothing$$

以上事件之间的关系及运算可以用文氏（Venn）图来直观地描述. 若用平面上一个矩形表示样本空间 Ω，矩形内的点表示样本点，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，则 A 与 B 的各种关系及运算如图 1-1 至图 1-6 所示.

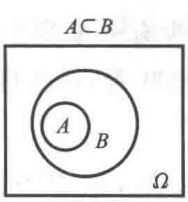

图 1-1

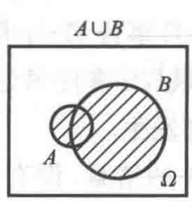

图 1-2

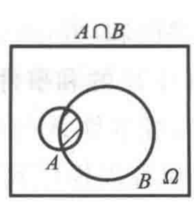

图 1-3

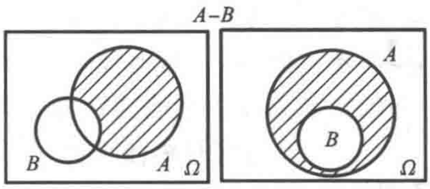

图 1-4

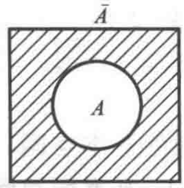

图 1-5

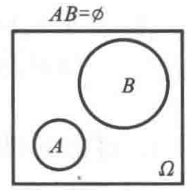

图 1-6

1.1.5　事件运算满足的定律

设 A、B、C 为事件，则有

交换律(exchange law)：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

结合律(combination law)：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

分配律(distributive law)：$(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

对偶律(dual law)：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

易证下面常用等式的正确性：

$$A\cup A=A,\quad A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cap A=A,\quad A\cap\Omega=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing$$

$$A-B=A-AB=A\overline{B},\quad A\cup B=A\cup B\overline{A}=B\cup\overline{B}A$$

例 1.1.1　向指定目标射三枪，观察射中目标的情况. 用 A_1、A_2、A_3 分别表示事件“第一、二、三枪击中目标”，试用 A_1、A_2、A_3 表示以下各事件：

(1) 只击中第一枪；

(2) 只击中一枪；

(3) 三枪都没击中；

(4) 至少击中一枪.

解　(1) 事件“只击中第一枪”，意味着第二枪不中，第三枪也不中. 所以，可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(2) 事件“只击中一枪”，并不指定哪一枪击中. 三个事件“只击中第一枪”、“只击中第二枪”、“只击中第三枪”中，任意一个发生都意味着事件“只击中一枪”发生. 同时，因为上述三个事件互不相容，所以，可以表示成 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$.

(3) 事件“三枪都没击中”，就是事件“第一、二、三枪都未击中”，所以，可以表示成 $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

(4) 事件“至少击中一枪”，就是事件“第一、二、三枪至少有一次击中”，所以，可以表示成 $A_1\cup A_2\cup A_3$ 或 $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3+A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3+A_1A_2A_3$.

例 1.1.2　设事件 A 表示“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，求其对立事件 $\overline{A}$.

解　设 $B=$“甲种产品畅销”，$C=$“乙种产品滞销”，则 $A=BC$，故

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\text{“甲种产品滞销或乙种产品畅销”}$$

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时掷出两枚骰子,观察两枚骰子点数之和；

(2) 抛出一枚硬币,观察其正反面出现的情况；

(3) 抽查某位同学概率论考试通过与否；

(4) 观察某十字路口红绿灯的颜色.

2. 设 A、B、C 是三个随机事件,试用 A、B、C 表示下列事件：

(1) A 与 B 都发生,而 C 不发生.

(2) A、B、C 中恰好发生一个.

(3) A、B、C 中至少发生一个.

(4) A、B、C 都不发生.

(5) A、B、C 中至少有两个发生.

3. 若事件 A、B 满足 $B \subset A$,则下列命题中正确的是(　　).

A. A 与 B 必同时发生　　B. A 发生,B 必发生

C. A 不发生,B 必不发生　　D. B 不发生,A 必不发生

1.2 概率的定义

研究随机现象不仅要知道可能出现哪些事件,更重要的是要研究各种事件出现的可能性的大小.我们将在一次试验中事件 A 发生的可能性大小的度量,称为事件 A 的概率,记为 $P(A)$.在概率论的发展历史上,人们曾针对不同的问题,从不同的角度给出了定义和计算概率的各种方法,然而,之前概率的定义都存在一定的缺陷,正是在这些局限性较强的定义和算法的基础之上,人们才获得了概率论公理化定义的“丰富营养”,并由此建立了现代概率论.

下面将介绍概率论发展早期的三种简单的概率定义以及由此得出的公理化定义.

1.2.1 概率的统计定义

1. 频率

设 E 为任一随机试验,A 为其中任一事件,在相同条件下,把 E 独立地重复 n 次,n_A 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(称为频数),比值 $f_n(A)=n_A/n$ 称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率(frequency).

人们在实践中发现:在相同条件下重复进行同一试验,当试验次数 n 很大时,某