"十二五"普通高等教育本科规划教材

概率论与数理统计

主编　朱开永　王升瑞　李　媛

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

“十二五”普通高等教育本科规划教材

概率论与数理统计

主编 朱开永 王升瑞 李 媛

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是根据高等工程教育的办学定位和工程技术型人才培养的目标，参考“高等院校概率论与数理统计教学大纲与基本要求”，结合笔者多年教学实践经验编写而成.

本书的第一至第五章是概率论部分，包含了随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限；第六至第八章是数理统计部分，包含了样本及其分布、参数估计与假设检验. 每章最后配有习题并在书后附答案. 另外，本书附有多媒体课件. 本书在编写过程中着重把握“以应用为主，必须够用为度”注意强调学生基本分析问题和运算能力的培养，取材少而精，文字叙述通俗易懂，论述正确；条理清晰，循序渐进；重点突出、难点分散；例题较多，典型性强；深广度合适，非常便于教与学.

本书可作为高等院校(含独立学院、民办高校)理工类及经管类各专业应用型人才培养的教材，也可以作为高等技术教育、成人教育的本科教材以及自学者学习概率论与数理统计的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 朱开永，王开瑞，李媛主编. -- 上海：同济大学出版社，2013. 8

ISBN 978-7-5608-5237-9

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①朱…②王…③李… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 172019 号

“十二五”普通高等教育本科规划教材

概率论与数理统计

主编 朱开永 王升瑞 李 媛

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 江苏句容排印厂
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 14.25
印 数 2 101—5 200
字 数 285 000
版 次 2013 年 8 月第 1 版 2014 年 1 月第 2 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-5237-9

定 价 26.00 元

前　　言

随着社会对高素质应用型人才大量需求，目前我国对高等工程技术教育日益强化，迫切需要我们编写与这种教学层次特征相适应的优秀教材，其中包含针对高等院校（尤其独立学院、民办高校、应用技术学院）的数学教材.

在编写本书的过程中，根据“概率论与数理统计”教学大纲与基本要求，参考了兄弟院校的有关资料，结合笔者多年教学实践经验，在适度注意本课程自身的系统性与逻辑性的同时，着重把握“以应用为主，必须够用为度”的原则，侧重于学生完整而全面地掌握基本概念、基本方法、强调了培养和提高学生基本运算能力。本书取材少而精，文字叙述通俗易懂，论述确切，对超出基本要求的内容一般不编入. 对一些理论性较强的内容尽量做好背景的铺垫，并通过典型的例题，简洁细腻的解题方法帮助学生掌握本课程的知识.

学习本课程需要具备一定的数学基础知识，包括集合论、排列组合、函数的导数、定积分、变上限积分求导、偏导数和二重积分等.

本书由朱开永组织策划，制定编写计划和思路. 第一至第五章由王升瑞编写，第六至第八章由李媛编写. 全书由王升瑞统稿、定稿及编写与教材配套的多媒体课件，由朱开永对本教材进行了全面的审核. 本书的编者都是在教学第一线工作多年，教学经验丰富的教师，在编写和审定教材时，大家紧扣指导思想和编写原则，准备定位，注重构建教材的体系和特色，并严谨细致地对内容的排序、例题和习题的选择深入探讨、斟字酌句，倾注了大量的心血，为提高本书质量提供了重要的保障. 由于编者水平有限，书中难免有不足之处，欢迎批评指正.

编　者

2013 年 8 月

目　录

附录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件与样本空间

一、随机现象

人类社会和自然界发生的现象是多种多样的，一般分为两大类，其中一类称为必然(确定)现象，其规律为只要具备一定的条件，该现象就一定会发生或一定不会发生，例如，物体在重力的作用下(条件)，必然做下落运动(现象)；在常温下(条件)，铜铁一定不熔化(现象).

这种例子可以举出很多，我们称在一定条件下必定会发生或必定不会发生的现象为必然现象. 研究必然现象的数学工具是微积分、线性代数等.

与必然现象不同的另一类现象称为随机(不确定)现象，其规律是在一定条件下该现象可能发生，也可能不发生，例如，人的寿命(条件)达到 90 岁(现象)；某人买彩票(条件)中奖(现象).

以上都是可能发生，也可能不发生的现象. 我们称在一定条件下可能发生也可能不发生的现象为**随机现象**. 正是由于有了随机现象才使我们的世界丰富多彩. 可以知道，在一定条件下对随机现象进行大量重复观察后就会发现，随机现象的发生具有统计规律性. 概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的学科.

二、随机试验

要发现并掌握随机现象在数量方面的规律性，必须对随机现象进行深入观察. 我们把在一定条件下对某种随机现象特征的一次观察称为**随机试验**(简称试验)，其必须满足三个条件：

(1) 可以在相同情况下重复进行(可重复性)；

(2) 每次试验的结果具有多种可能性，并能事先知道试验的所有可能结果(结果具有多个性)；

(3) 试验前不能确定会出现哪种结果(结果具有随机性).

随机试验用字母 E 表示. 为了区分不同的试验,可用 E_1, E_2, …符号表示.

这里试验的含义十分广泛,它包括各种各样的科学试验,也包括对事物的某一特征的观察.

例 1.1 E_1:将一枚硬币抛三次,观察正面出现的次数;

E_2:将一枚硬币抛三次,观察正面、反面出现的情况;

E_3:将一颗均匀的骰子掷一次,观察出现的点数;

E_4:从标有 1, 2, 3, 4, 5, 6 号码的六张卡片(其中 4 张红色,2 张白色)中任取一张,观察抽得的号码;

E_5:同 E_4 的条件,观察抽得卡片的颜色;

E_6:记录寻呼台 1 min 内接到呼叫的次数;

E_7:在一批电子元件中任意抽取一只,测试它的寿命;

E_8:记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

对于一个随机试验,必须注意试验条件要相同,观察特征也要相同. 观察的特征不同,其可能结果也不同,如 E_4, E_5 就是如此. 观察特征相同但条件不同(如 E_1, E_2),其结果也不相同. 我们所说:"在一定条件下,进行一次试验",实际上是包括试验条件和观察特征两方面的内容.

三、样本空间

定义 1.1 试验 E 的所有可能结果所组成的集合,称为 E 的样本空间记为 Ω 或 S. 样本空间的元素即 E 的每个结果为 $\omega_i(i=1, 2, \cdots, n)$, 称为样本点.

如例 1.1 中,抛一枚硬币,用 H 表示出现正面,T 表示出现反面. E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{0, 1, 2, 3\}$; E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{THH}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTT}\}$; E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; E_7 的样本空间 $\Omega_7=\{t \mid t\geqslant 0\}$; E_8 的样本空间 $\Omega_8=\{(x, y) \mid T_0\leqslant x<y\leqslant T_1\}$. 其中,$x$ 为最低温度,y 为最高温度,并设这一地区的温度不会低于 T_0,也不会高于 T_1.

注意 样本空间的元素由试验目的所确定,即使试验条件相同,试验目的不一样,其样本空间也不一样,如 Ω_1, Ω_2.

例 1.2 设试验 E 是甲乙二人各自对目标射出一发子弹,观察命中目标情况,试写出 E 的样本空间.

解 因为 E 的所有可能结果为: $\omega_1=$"甲中,乙不中", $\omega_2=$"甲中,乙中", $\omega_3=$"甲不中,乙中", $\omega_4=$"甲不中,乙不中". 则 E 的样本空间是 $S=\{\omega_1, \omega_2,$

$\omega_3, \omega_4\}$.

四、随机事件

定义 1.2　随机试验 E 的样本空间的子集称为**随机事件**(简称事件). 随机事件一般用大写字母 A, B, C 等来表示.

注意　只要做试验,就会产生一个结果,即样本空间 Ω 就会有一个样本点 ω 出现,当 $\omega \in A$ 时,称事件 A 发生了. 例如,

E_1 中用事件 A 表示"正面出现 1 次".

E_2 中用事件 A 表示"第一次出现的是正面".

E_3 中用事件 A_k 表示"抛出的骰子上面的点数为 k"$(k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$. 用事件 B_3 表示"抛出的骰子上面的点数小于 3".

E_7 中用事件 B_1 表示"电子元件是次品", $B_1 = \{t \mid t < 1\,000\}$;

用事件 B_2 表示"电子元件是合格品", $B_2 = \{t \mid t \geqslant 1\,000\}$;

用事件 B_3 表示"电子元件是一级品", $B_3 = \{t \mid t \geqslant 5\,000\}$.

随机事件是本课程主要的研究对象. 下面,我们要特别强调随机事件中几种有特殊意义的事件.

1. 必然事件

随机试验 E 中一定会发生的结果称为**必然事件**,记为 S.

例如,E_3 中"抛出的点数小于等于 6";E_7 中"电子元件的寿命不小于 0",即 $\{t \mid t \geqslant 0\}$,均为必然事件.

2. 不可能事件

在随机试验 E 中一定不发生的结果称为**不可能事件**,记为$\varnothing$.

例如,E_3 中"抛出的点数大于 6";E_7 中"电子元件的寿命小于 0",均为不可能事件.

必然事件与不可能事件是随机事件的特例.

注意　(1) 由于样本空间 Ω 包含了所有的样本点,且是样本空间自身的一个子集,所以在每次试验中 Ω 总是发生. 因此 Ω 为必然事件.

(2) 空集$\varnothing$不包含任何样本点,但它也是样本空间 Ω 的一个子集,由于它在每次试验中肯定不会发生,所以称$\varnothing$为不可能事件.

在 E_3 中事件 $B_3=$"抛出的骰子的点数小于 3"要比事件 $A_1=$"抛出的骰子的点数为 1",$A_2=$"抛出的骰子的点数为 2"复杂些.

实际上,B_3 是由 A_1, A_2 构成的. 这就是说,事件 B_3 还可以再分开. 但 A_1, A_2

就不能再分开了.或者说,对于所观察的特征来说不能再分了.我们把这种最简单的事件叫做基本事件.

3. 基本事件

定义 1.3 随机试验 E 中只含有一个结果的事件,称为**基本事件**.设试验 E 的基本事件满足:

(1) 在任何一次试验中这些结果至少有一个发生(即除这些结果外,试验 E 没有其他结果),这种性质称为**完备性**.

(2) 在任何一次试验中这些结果至多有一个发生,这种性质称为**互不相容(互斥)性**.

例如 E_4 中, $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $\cdots$, $A_6 = \{6\}$ 为六个基本事件.

注意 基本事件有可列的、不可列的、有限的和无限的之分.

4. 复合事件

若干个基本事件组合而成的事件称为**复合事件**.复合事件在一次试验中发生是指组成复合事件的某一个基本事件发生.

例如 E_4 中, $B =$“抽到的号码小于 3”是由 A_1, A_2 组合而成的复合事件.

例 1.3 一口袋中装有编号分别为 1, 2, …, 10 的 10 个形状相同的球,从袋中任取一球(取后放回),观察球的号数.

样本空间 $S = \{1, 2, \cdots, 10\}$;

基本事件 $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $\cdots$, $A_{10} = \{10\}$;

必然事件 S;

不可能事件 $\varnothing$;

复合事件 $B_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B_2 = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B_3 = \{8, 9, 10\}$, $B_4 = \{1, 4\}$, $\cdots$

§ 1.2 事件的关系与运算

一个随机试验有多个不同的事件发生,这些事件有的简单,有的复杂,详细分析寻求它们之间的关系是学习概率论的基础.

由于事件是一个集合,因此事件间的关系和运算自然要按照集合论中的集合之间的关系和运算来处理.概率论中所说的事件的“和”、“差”、“积”等运算与初等代数中的和、差、积概念是有区别的.在学习中要把握住运算的含义,掌握其运算规律.

一、事件的包含与相等

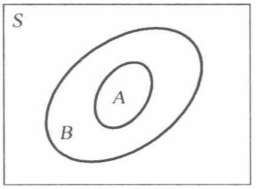

图 1-1

定义 1.4　若事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 B **包含**事件 A，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，如图 1-1 所示.

用集合语言表示为：若对任意 $\omega \in A$，总有 $\omega \in B$，则称集合 B 包含了集合 A，记为 $B \supset A$.

定义 1.5　若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B **相等**，记为 $A = B$.

如例 1.3 中，设 $A =$“球号 $\geqslant 2$”，$B =$“球号为 2，4”，$C =$“球号为偶数”，$D =$“球号数能被 2 整除”.

由定义 1.4 可知：$A \supset B$，$A \supset C$，$A \supset D$，$C \supset B$，$D \supset B$.

由定义 1.5 可知：$C = D$.

例 1.4　同时抛两个硬币，观察出现正、反面的情况，事件 $A =$“正好一个正面”，$B =$“都是正面”，$C =$“至少一个正面”，$D =$“无反面”.

则 $A \subset C$，$B \subset C$，$B = D$.

二、事件的运算与关系

1. 事件的和（和运算）

定义 1.6　由“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”所构成的事件称为事件 A 与 B 的**和事件**，记为 $A \cup B$ 或 $A + B$，如图 1-2 所示的阴影部分. 即

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 或 } \omega \in B\}.$$

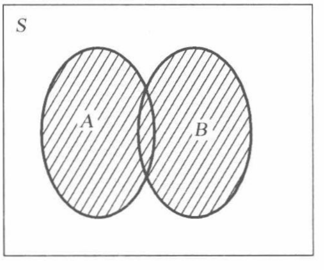

图 1-2

若 A 与 B 有公共元素，此元素在 $A \cup B$ 中只出现一次.

例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{c, d, e, f\}$，$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

再如，工地上 $A_1 =$“缺水泥”，$A_2 =$“缺黄沙”，则 $B = A_1 \cup A_2 =$“缺水泥或黄沙”.

类似地，由“事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 中至少有一个发生”所构成的事件，称为 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的和，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

例如，设事件 $A_1 =$“甲没来”，$A_2 =$“乙没来”，事件 $B =$“甲、乙至少有一个没来”，则 $B = A_1 \cup A_2$.

例 1.5　如图 1-3 所示电路中，设事件：$A_1 =$“开关 K_1 闭合”，$A_2 =$“开关 K_2 闭合”，$A_3 =$“开关 K_3 闭合”，$B =$“灯亮”.

因为只要开关 K_1，K_2，K_3 中至少有一个闭合(包括 K_1，K_2，K_3 中仅有一个闭合；K_1，K_2，K_3 中任意两个闭合；K_1，K_2，K_3 三者都闭合)，便有"灯亮"发生. 这就是说，事件 B 是由事件 A_1，A_2，A_3 至少一个发生构成的. 于是有 $B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

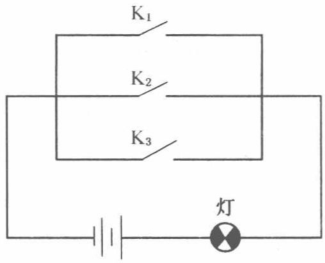

图 1-3

2. 事件的积(积运算)

定义 1.7 由"事件 A 与事件 B 同时都发生"所构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A \cap B$ 或 AB，如图 1-4 所示的阴影部分. 即

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \in B\}.$$

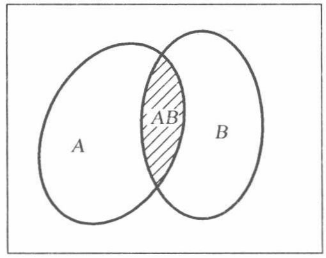

图 1-4

例如，$A = \{a, b, c, d\}$，$B = \{c, d, e, f\}$，$A \cap B = \{c, d\}$.

例 1.6 在图 1-5 所示电路中，设事件 $A_1 =$"开关 K_1 闭合"，事件 $A_2 =$"开关 K_2 闭合"，事件 B ="灯亮".

因为只有当开关 K_1，K_2 同时都闭合上，才有"灯亮"发生，于是有 $B = A_1 \cap A_2$.

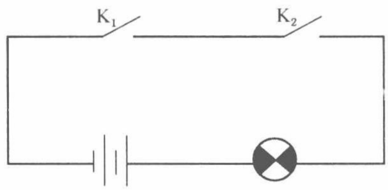

图 1-5

若 $A \cap B \neq \varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是相容的.

类似地，由"事件 A_1，A_2，…，A_n 同时都发生"所构成的事件 B 称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的积，记为 $B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $B = A_1A_2\cdots A_n$.

例如，设以 A_1，A_2，…，A_n 分别表示毕业班一位学生各门课程(n 门)合格，则 $B = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 表示该位学生 n 门课程都合格.

由图可见，事件 $A \cup B$ 包含了事件 A、B 和 AB.

3. 事件的差(差运算)

定义 1.8 由"事件 A 发生，而事件 B 不发生"构成的事件称为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记为

$$A - B.$$

即 $A-B=\{\omega \mid \omega \in A \text{ 且 } \omega \notin B\}$，同时，$A-B=A-AB$，如图 1-6 中的阴影部分.

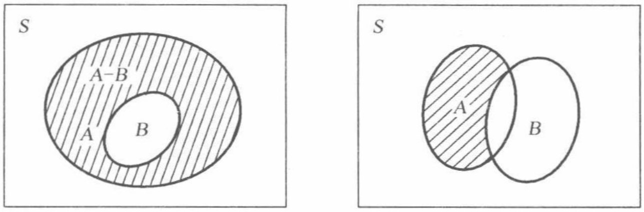

图 1-6　$A-B$

例如，$A=\{a, b, c, d\}$，$B=\{c, d, e, f\}$，$A-B=\{a, b\}$.

又如，某人体检，设事件 $A_1=$“身高合格”，事件 $A_2=$“体重不合格”，事件 $B=$“身高与体重都合格”，则 $B=A_1-A_2$.

例 1.1 中 E_7，S_7：$\{t \mid t \geqslant 0\}$ 中差事件 B_2-B_3 表示电子元件是合格品但不是一级品.

4. 互不相容事件

定义 1.9　若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即

$$A \cap B=\varnothing,$$

则称事件 A 与事件 B 是**互不相容(互斥)**的.

图 1-7 中，区域 A 与区域 B 互不相交，它直观地表现了事件 A 与事件 B 互不相容.

例 1.3 中，令事件 $A=$“偶数号”；事件 $B=$“摸到 3 号球”，则 $AB=\varnothing$，即 A 与 B 互不相容. 对于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，如果它们两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing$ $(i \neq j;\ i, j=1, 2, \cdots, n)$，则称事件 A_1，A_2，…，A_n 为**互不相容(互斥)**事件.

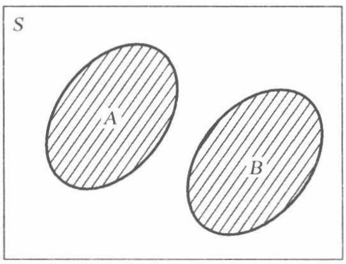

图 1-7　A 与 B 互不相容

例如，任何试验 E 的基本事件是互不相容的，如产品检验，检验出产品是一等品、二等品、次品是互不相容的.

5. 对立事件

定义 1.10　若事件 A、B 满足 $A \cup B=S$，且 $A \cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 相互为**对立事件**(或称 A 与 B 互逆)，如图 1-8 所示.

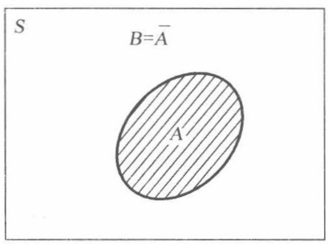

图 1-8　A 与 B 互逆

对立事件即对每次试验而言，事件 A、B 中必有

一个发生，且仅有一个发生. A 的对立事件记为$\overline{A}$，$\overline{A}=S-A$.

从定义可知，若试验 E 只有两个互不相容的结果，那么这两个结果便构成对立事件.

例如，设事件 $A=$"地震后一建筑物倒塌了"，则事件$\overline{A}=$"地震后一建筑物没有倒塌"；检查一产品，记事件 $A=$"产品合格"，事件$\overline{A}=$"产品不合格"，两者均为对立(**互逆**)事件.

再如，设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 分别表示毕业班某位学生的各门功课程合格，则其对立事件的和 $B=\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\cdots\cup\overline{A}_n$ 表示这位学生至少有一门功课不合格.

6. 完备事件组

定义 1.11 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 运算满足

(1) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$；

(2) $A_iA_j=\varnothing \quad (i\neq j;\ i, j=1, 2, \cdots, n)$，

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为**完备事件组**，如图 1-9 所示.

例如，学生的考试成绩由 0 至 100 分的 101 个完备事件组成.

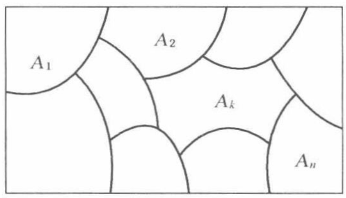

图 1-9

三、事件的运算规律

在进行事件运算时，经常用到下述定律.

设 A, B, C 为事件，则有：

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

特别地，$A\cup A=A$；$A\cap A=A$；

$A\cup\varnothing=A$；$A\cap\varnothing=\varnothing$；

$A\cup\overline{A}=S$；$A\cap\overline{A}=\varnothing$；

$A\cup S=S$；$A\cap S=A$.

(3) 分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) 德·摩根定律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

这些运算规律除用定义可验证其正确性外，还可通过图形直观地看出.

例如，$A\cap S=A$，因为 S 是必然事件，有 $S\supset A$. $A\cap S$ 表示 A 与 S 同时发生. 图 1-10 中表示 A 与 S 的公共部分(图 1-10 中阴影部分)，就是 A 所包含的部

分. 故 $A \cap S = A$.

同样,只要 $A \supset B$ 则有 $A \cap B = B$;

$A \cup B = A$; $B - A = \varnothing$; $\overline{A} \subset \overline{B}$;

易证,$A - B = A - AB = A\overline{B}$; $A = AB \cup A\overline{B}$.

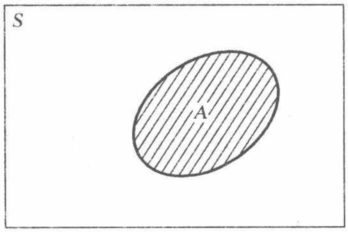

图 1-10

例 1.7　在试验 E_2 中事件 A_1 = "第一次出现的是 H",即

$$A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}.$$

事件 A_2 = "三次出现同一面",即

$$A_2 = \{HHH, TTT\}.$$

则　$A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$;

$A_1 \cap A_2 = \{HHH\}$;　$A_2 - A_1 = \{TTT\}$;

$A_1 - A_2 = \{HHT, HTH, HTT\}$.

例 1.8　如图 1-11 所示的电路中,设事件 A_1 = "开关 K_1 闭合"; A_2 = "开关 K_2 闭合"; A_3 = "开关 K_3 闭合"; B = "灯亮".

可见, $A_1A_2 \subset B$, $A_1A_3 \subset B$, $A_1A_2 \cup A_1A_2 = B$,而$\overline{A}_1 B = \varnothing$, 即事件$\overline{A}_1$ 与事件 B 互不相容.

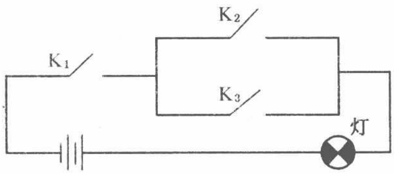

图 1-11

例 1.9　从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回),事件 A_k 表示第 k 次取到合格品 ($k = 1, 2, 3$). 试用事件的运算符号表示下列事件:三次都取到合格品;三次中至少有一次取到合格品;三次中恰有两次取到合格品;三次中最多有一次取到合格品.

解　三次全取到合格品: $A_1A_2A_3$;

三次中至少有一次取到合格品: $A_1 \cup A_2 \cup A_3$;

三次中恰有两次取到合格品: $A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3$;

三次中最多有一次取到合格品: $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3$.

例 1.10　一名射手连续向某个目标射击三次,事件 A_k 表示该射手第 k 次射击时击中目标 ($k = 1, 2, 3$). 试用文字叙述下列事件: $A_1 \cup A_2$; $\overline{A}_2$; $A_1 \cup A_2 \cup A_3$; $A_1A_2A_3$; $A_3 - A_2$; $A_3\overline{A}_2$; $\overline{A}_1\overline{A}_2$; $\overline{A_1 \cup A_2}$; $\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$; $\overline{A_2A_3}$; $A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$.

解　$A_1 \cup A_2$: 前两次中至少有一次击中目标;

$\overline{A}_2$：第二次射击未击中目标；

$A_1 \cup A_2 \cup A_3$：三次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2A_3$：三次射击都击中了目标；

$A_3 - A_2 = A_3\overline{A}_2$：第三次击中但第二次未击中目标；

$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A}_1\,\overline{A}_2$：前两次均未击中目标；

$\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 = \overline{A_2A_3}$：后两次中至少有一次未击中目标；

$A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3$：三次射击中至少有两次击中目标.

例 1.11 已知事件 $A=$“甲产品畅销，乙产品滞销”，写出 $\overline{A}$ 所表示的事件.

解 设事件 $B=$“甲产品畅销”，$C=$“乙产品畅销”，则

$$A = B\overline{C},\quad \overline{A} = \overline{B\overline{C}} = \overline{B} \cup C,$$

所以 $\overline{A}=$“甲产品滞销或乙产品畅销”.

§1.3 概率的概念与性质

在一定条件下，随机事件的出现具有偶然性，但随机事件出现的可能性大小是可以比较的. 例如，甲射手是久经训练的射击运动员，乙射手是新手. 现甲、乙二人各对靶射出一发子弹，在射击之前人们总会认为甲命中的可能性大些. 既然随机试验中随机事件出现的可能性有大有小，自然使人想到用一个与随机事件 A 相联系的实数 $P(A)$ 来表示事件 A 出现的可能性的大小. 若出现的可能性大，就用较大的数表示；若出现的可能性小，就用较小的数表示. 例如，人们常说：“有百分之百的把握完成某项任务”实际上是用一个较大的数（100%=1）来表示在一定条件下“完成这项任务”这个事件出现的可能性. 用来表示随机事件出现的可能性大小的这个数 $P(A)$ 称为事件 A 的概率（后面有定义）. 然而对于一个事件 A，怎样确定实数 $P(A)$ 呢？这就是下面我们所要介绍的事件的概率.

一、概率的概念

概率是概率论中最基本的概念，在引入概率之前，先介绍频率的概念.

定义 1.12 将试验 E 重复 n 次，设事件 A 在 n 次试验中出现 n_A 次，则称比值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$